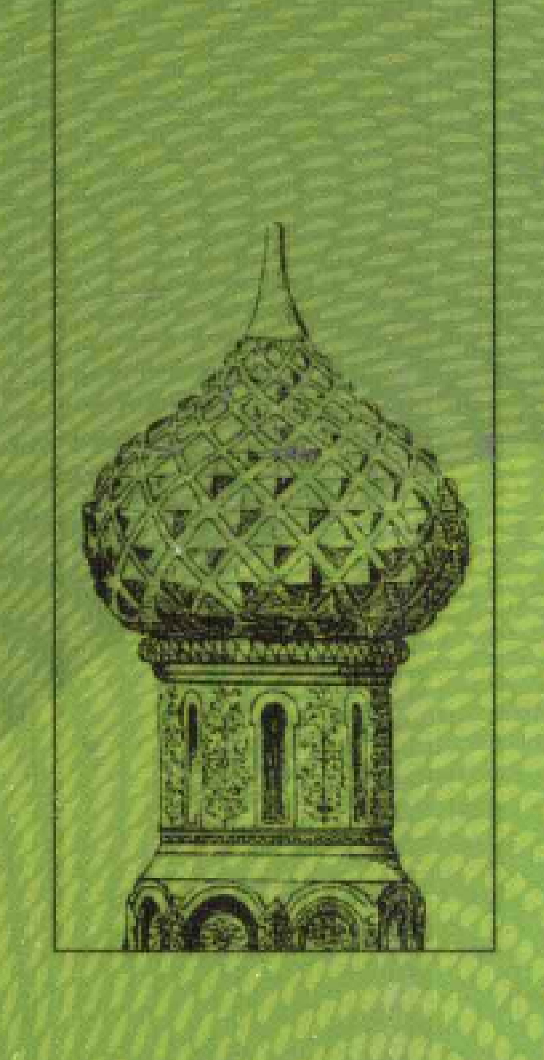


吉米多维奇数学分析习题集学习指引

(第三册)

□ 谢惠民 沐定夷 编著
□ 卫瑞霞 吴茂庆 审校

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

《吉米多维奇数学分析习题集》是最为经典的微积分习题集，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分和高等数学的教与学产生了重大的影响。本书是为该习题集的俄文2010年版的中译本编写的学习指引。全书分三册出版，第一册为分析引论和一元微分学，第二册为一元积分学与级数，第三册为多元微积分。

本书通过对习题集中的部分典型习题的讲解与分析，由浅入深、分层次、分类型地介绍微积分的解题思路，讲道理、讲方法，揭示出习题集中的丰富多彩的内容和结构，特别注重一法多用、一题多解和发展几何直观的形象思维，同时通过补注、命题等多种方式补充介绍与习题有关的背景知识和联系，不回避任何难点，为读者更有效地利用该习题集掌握微积分的基本功提供适当的帮助。

本书适用于正在学习微积分的大学生和需要提高自己数学水平与能力的各类自学者，对于讲授微积分或高等数学的教师和准备考研的学生也有参考价值。

■ 学科类别：数学

academic.hep.com.cn



定价 39.00 元

吉米多维奇
数学分析习题集
学习指引

(第三册)

□ 谢惠民　沐定夷　编著
□ 卫瑞霞　吴茂庆　审校

JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUEXI ZHIYIN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

《吉米多维奇数学分析习题集》是最为经典的微积分习题集，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分和高等数学的教与学产生了重大的影响。本书是为该习题集的俄文2010年版的中译本编写的学习指引。全书分三册出版，第一册为分析引论和一元微分学，第二册为一元积分学与级数，第三册为多元微积分。

本书通过对习题集中的部分典型习题的讲解与分析，由浅入深、分层次、分类型地介绍微积分的解题思路，讲道理、讲方法，揭示出习题集中的丰富多彩的内容和结构，特别注重一法多用、一题多解和发展几何直观的形象思维，同时通过补注、命题等多种方式补充介绍与习题有关的背景知识和联系，不回避任何难点，为读者更有效地利用该习题集掌握微积分的基本功提供适当的帮助。

本书适用于正在学习微积分的大学生和需要提高自己数学水平与能力的各类自学者，对于讲授微积分或高等数学的教师和准备考研的学生也有参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

吉米多维奇数学分析习题集学习指引．第3册／谢惠民，沐定夷编著．—北京：高等教育出版社，2011.7

ISBN 978-7-04-032293-4

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①谢… ②沐… Ⅲ.①数学分析-高等学校-题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第126021号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 王凌波　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	24.25	版　　次	2011年7月第1版
字　　数	570 000	印　　次	2011年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 32293-00

使用说明

《学习指引》的第三册对应于《吉米多维奇数学分析习题集》(以下简称为《习题集》) 的第六章、第七章和第八章, 即从多元函数微分学、含参变量的积分到多元函数积分学.

与本书的前两册相同, 由于很多节内的习题量相当大, 含有不同的内容和层次, 因此在大多数节中, 都将习题分成若干小节. 例如 §8.17.7 就是第八章第 17 节的第 7 小节. 在引用前两册时, 请注意第一册对应于《习题集》的第一、二章, 而第二册则对应于《习题集》的第三、四、五章. 例如 §1.4.7, §2.3 在第一册中, 而 §3.6.4, §4.6 和 §5.2.1 则在第二册中.

这样的安排也会带来一些不便, 这就是在节内的各个小节之间的习题顺序与原有的题号顺序不完全一致. 为了方便读者对习题的检索, 本书的目录中在每一节和每一小节的标题后都在括号内标明它们所覆盖的习题编号.

本书在各节或各小节所覆盖的习题中只能选取部分习题作讲解或分析. 在解答时, 无论是计算题还是证明题一律用"**解**"开始. 在交叉引用前后的习题时, 如果它在本书有讲解, 则会指明所在的节或小节. 否则, 一般会简述其内容, 至于该题的完整叙述则请看《习题集》的全译本.

在某几节的最后, 本书会添加一小节, 称为补注, 其中包含对某些难题的解、对某些内容的注解和补充. 由于在多元函数的微积分学中的许多问题的进一步引申将直接导致偏微分方程、泛函分析和现代分析的许多领域, 我们在多数情况下只限于列出有关的参考文献, 因此在第三册中的补注小节的数量要比前两册少得多.

根据需要, 本书还增加了若干命题和少量例题, 其中命题按章编号, 例题不独立编号. 第三册在正文后设置一个附录, 其中列出前面所有命题的内容和页码.

本书的编写中利用了大量的参考资料. 在参考文献中只列出第三册引用到的书籍. 对于引用的论文, 只在引用处写明其所在杂志、标题、页码和年份.

本书采取以下常用的数学记号:

(1) 用 $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, 用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数, 用 $\mathbb{Q}$ 表示全体有理数, 用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数. 用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维的欧几里得空间.

(2) 设 P, Q 为命题, 用 $P \Longleftrightarrow Q$ 表示 P 与 Q 等价; 用 $P \Longrightarrow Q$ 表示若 P 成立, 则 Q 成立.

(3) 用记号"$\square$"表示解、分析和证明等的结束.

最后还要指出, 在第三册的编写中广泛地应用了高等代数 (即线性代数) 中的知识. 这不仅简化了许多习题的求解, 实际上在很多情况下也只有如此才能揭示有关问题的核心所在. 考虑到多数读者在学习多元微积分之前已经学过有关的矩阵向量知识, 因此若有"学而时习之"的机会是件好事.

目　录

第六章 多元函数微分学

内容简介 这一章是多元函数的微分学, 从多元函数的极限、连续概念开始, 直到多元泰勒公式和极值计算.

§6.1 函数的极限. 连续性 (习题 3136–3210)

内容简介 本节的习题除了多元函数的定义域和等值线 (等值面) 计算外, 主要是学习累次极限和多重极限的计算, 以及多元函数的连续性和一致连续性.

6.1.1 多元函数的定义域、等值线和等值面 (习题 3136–3170)

习题 3136–3150 均为给定多元函数的表达式后求其自然定义域. 这是一元函数的相应概念的推广. 对于 n 元函数 $u = f(x_1, \cdots, x_n)$ 而言, 即是要求出 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\mathscr{D}$, 使得函数 f 在此集合上取实数值. 称此集合 $\mathscr{D}$ 为函数 f 的自然定义域.

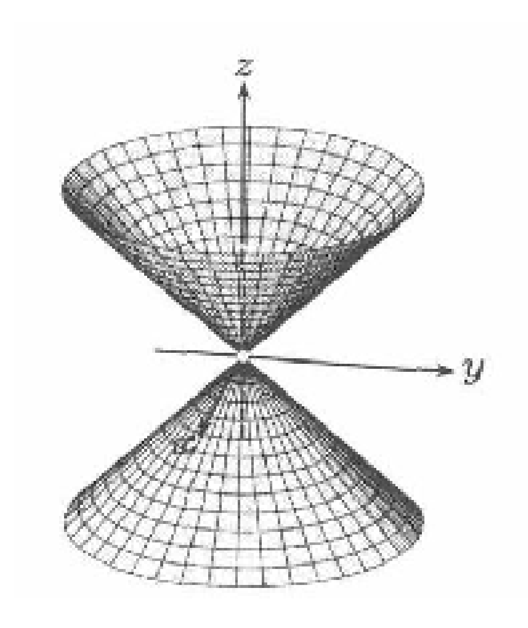
下面看一个例子.

习题 3148 确定并画出 $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的定义域.

解 u 是三元函数. 从它的表达式可见首先要求 x, y 不能同时为 0, 然后根据反余弦函数的定义, 必须要求 $|z| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, 于是其定义域为

$$\mathscr{D} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \neq 0, z^2 \leqslant x^2+y^2\}.$$

如附图所示, 即包含圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 及其以外的区域, 但要去掉圆锥的顶点, 即原点. □



习题 3148 的附图

对于二元函数 $z = f(x,y)$, 设其定义域为 $\mathscr{D}$, 值域为 $\mathscr{R} = f(\mathscr{D})$, 则对于实数 $c \in \mathscr{R}$, 集合

$$S_c = \{(x,y) \in \mathscr{D} \mid f(x,y) = c\} \ (\subset \mathbb{R}^2)$$

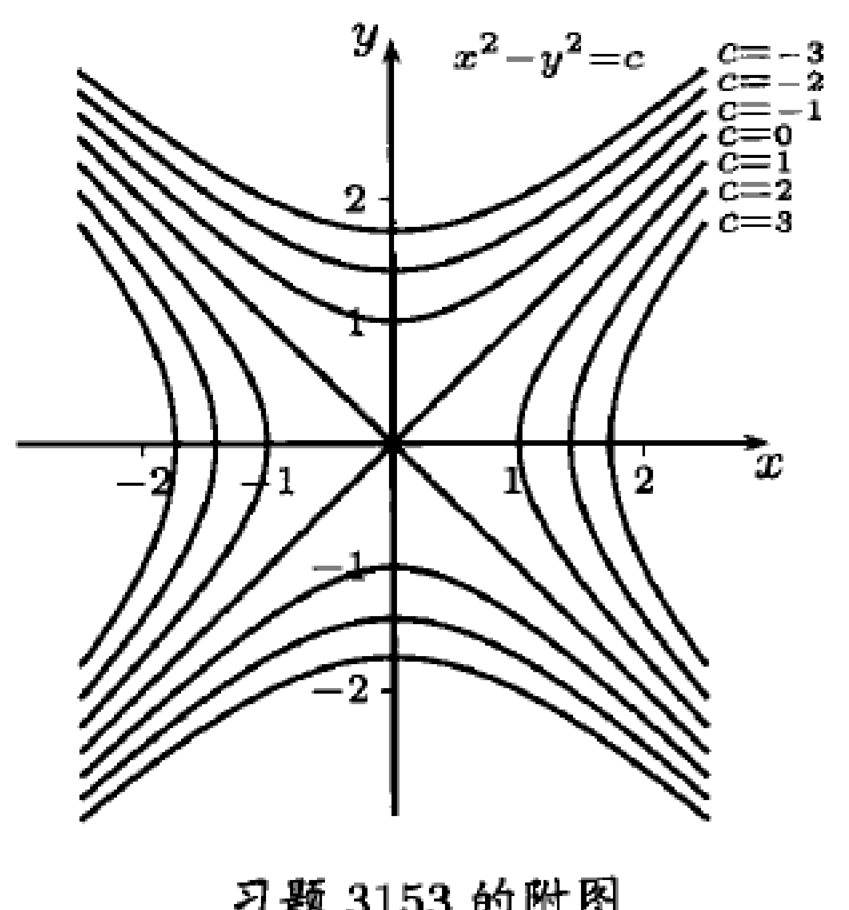
非空. 我们将 S_c 称为函数 f 取值为 c 的等值线 (也称为等位线等), 简记为 $f = c$. 相仿地对于自变量个数大于 2 的多元函数, 例如三元函数 $u = f(x,y,z)$, 则将集合

$$S_c = \{(x,y,z) \in \mathscr{D} \mid f(x,y,z) = c\} \ (\subset \mathbb{R}^3)$$

称为函数 f 取值为 c 的等值面 (也称为等位面等), 也简记为 $f = c$.

通过等值线或等值面来研究多元函数是一种常用的方法. 例如气象学中的等温线、地形图中的等高线等等, 都已经成为大众熟知的名词了.

习题 3153 作出函数 $z = x^2 - y^2$ 的等值线.



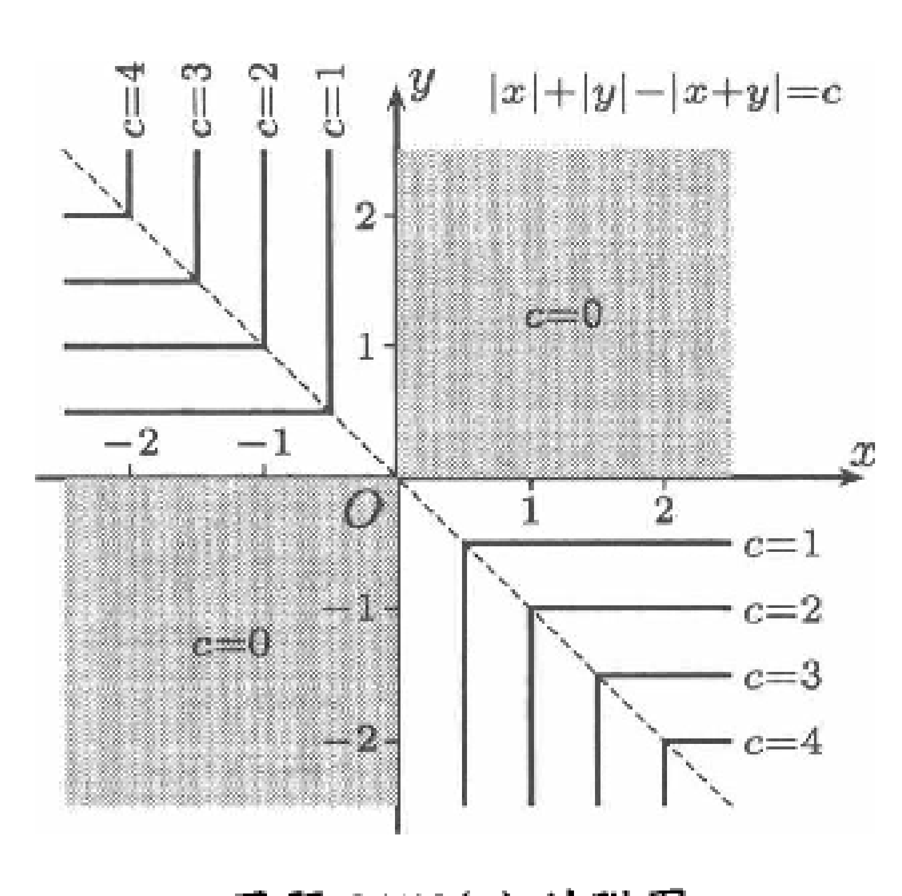
习题 3153 的附图

解 等值线为 $x^2 - y^2 = c$. 若取 $c > 0$, 则得到焦点在 x 轴上的双曲线; 若取 $c < 0$, 则得到焦点在 y 轴上的双曲线. 当 $c = 0$ 时则得到直线 $y = \pm x$, 它们恰好是上述所有双曲线共有的渐近线. 因此只要通过坐标面 xOy 上的旋转变换即可将上述双曲线变成为 $xy = a$ 这样的直角双曲线.

在附图中作出了 $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 时的等值线. □

注 通过等值线容易想象函数 $z = x^2 - y^2$ 在三维空间中的几何图像. 实际上, 这就是解析几何中的双曲抛物面, 它的一个通俗名称是马鞍面, 原点 $O(0,0)$ 就是鞍点. 鞍点在地形图中是常见的. 在附图中即可看出它的特征: 在原点的左右两个方向上的高度增加, 而在上下两个方向上的高度下降 (参见 §6.7.1 的习题 3622 的附图中的马鞍面).

习题 3159(a) 作出函数 $z = |x| + |y| - |x + y|$ 的等值线.



习题 3159(a) 的附图

解 从三点不等式 $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ 可见该函数的值域为 $[0, +\infty)$, 因此只可能对于 $c \geqslant 0$ 有等值线 $z = c$.

由 $z(-x, -y) = z(x, y)$ 可见, 每一个等值线都关于原点对称, 因此可先讨论 $x + y \geqslant 0$.

在 $x + y \geqslant 0$ 的半平面中有以下情况: (1) 在第一象限中及其边界上, $z = 0$; (2) 在第二象限中 $x < 0, y > 0$, 因此有 $z = -x + y - (x + y) = -2x$, 于是等值线 $z = c$ 就是 $x = -c/2$; (3) 同理在第四象限中, 等值线 $z = c$ 就是 $y = -c/2$.

将以上结果关于直线 $x + y = 0$ 作反射, 就得到附图所示的等值线图. □

习题 3161 作出函数 $z = x^y$ $(x > 0)$ 的等值线.

解 (概要) 由条件可见该函数的值域为 $(0, +\infty)$. 对于 $c > 0$, 对 $x^y = c$ 取对数就得到 $y \ln x = \ln c$. 由于 $\ln c = C$ 可取到任意实数, 于是等值线的方程可记为

$$y = \frac{C}{\ln x}.$$

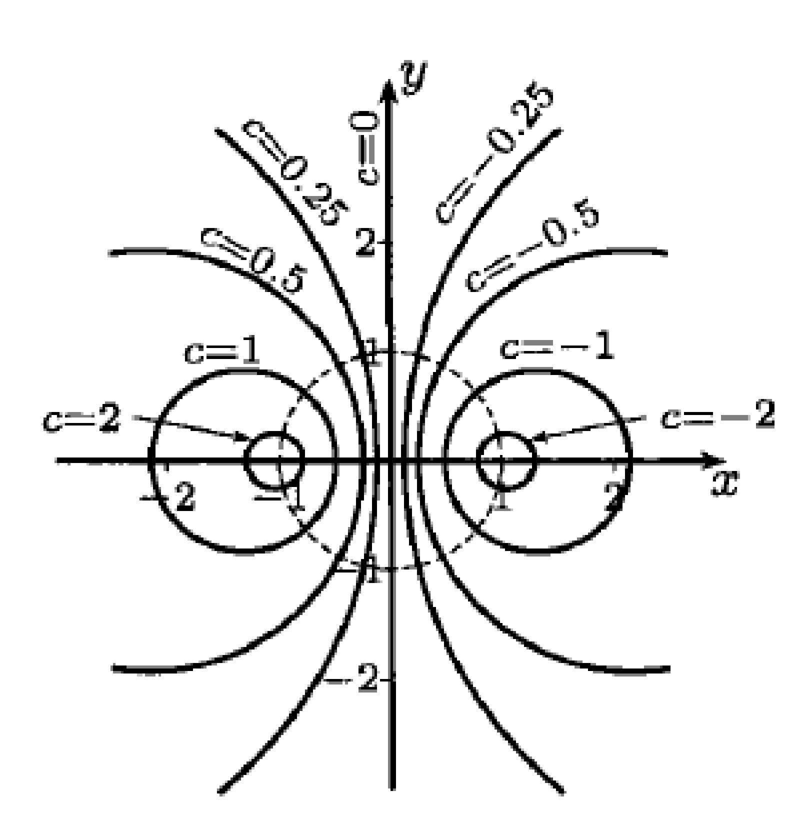
参考第一册附录一的习题 354 的函数 $y = \dfrac{1}{\ln x}$ 的图像就不难作出本题的等值线图. □

习题 3163 作出函数 $z=\ln\sqrt{\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}$ $(a>0)$ 的等值线.

解 函数在去掉点 $(\pm a,0)$ 之外的全平面上的其他点处都有定义. 对于 $z=c$, 记 $k=\mathrm{e}^c>0$, 则等值线方程为 $\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2$. 当 $c=0$ 时, $k=1$, 等值线为直线 $x=0$. 对于 $k\neq1$, 则可将上述方程整理成为

$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\frac{(2ak)^2}{(1-k^2)^2},$$

可见是圆心在 $\left(\dfrac{a(1+k^2)}{1-k^2},0\right)$ 而半径为 $\dfrac{2ak}{|1-k^2|}$ 的圆. 当 $0<k<1$ (即 $c<0$) 时圆在右半平面内, 而当 $k>1$ (即 $c>0$) 时圆在左半平面内.



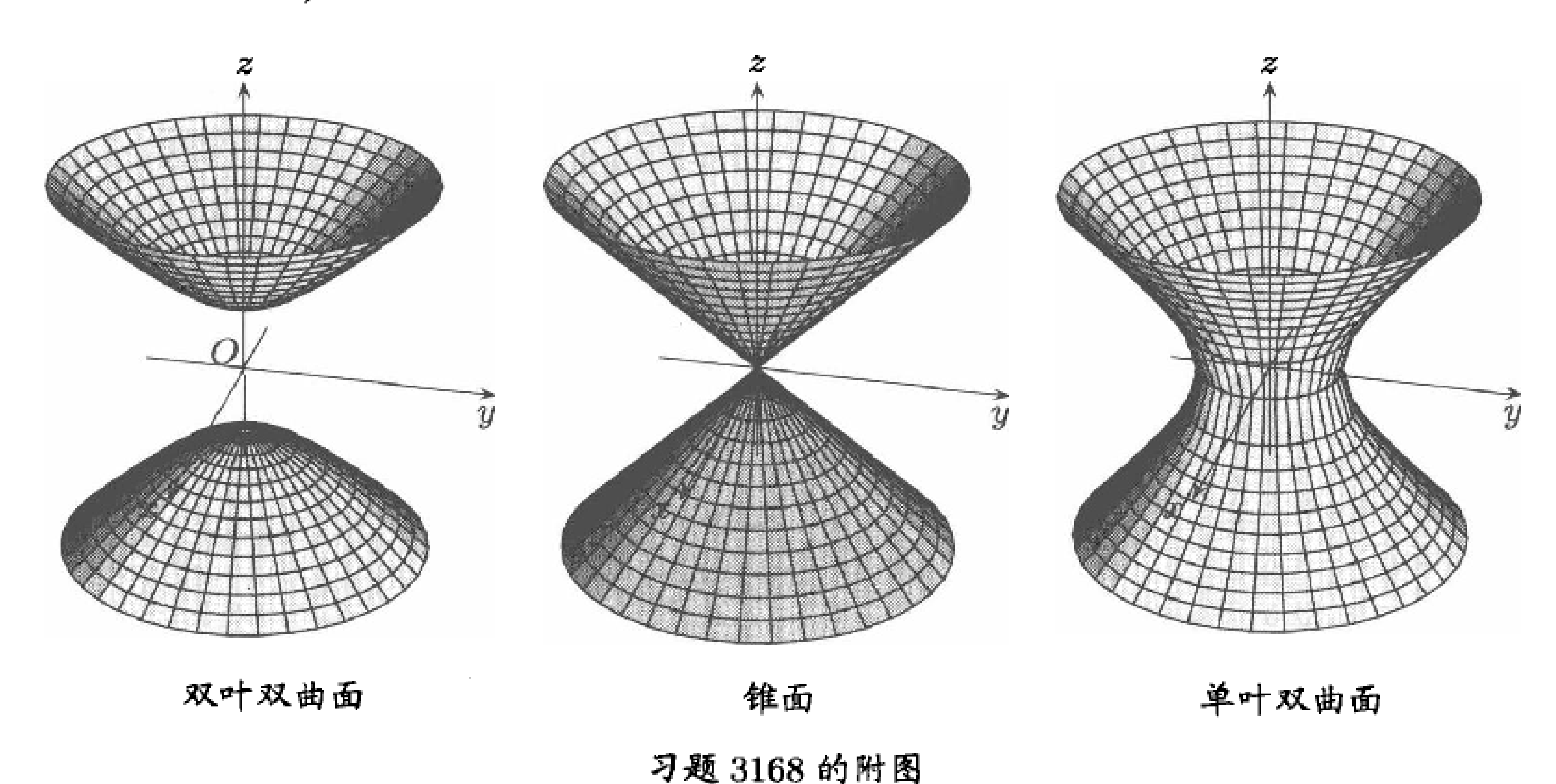
习题 3163 的附图 (取 $a=1$)

可以看出, 当 c 换为 $-c$ 时, k 换为 $1/k$, 而对应的等值线关于 y 轴对称. 在附图中取 $a=1$, 作出了 $c=-2,-1,-0.5,-0.25,0,0.25,0.5,1,2$ 的等值线 (或其一部分). □

注 本题的所有等值线都与 (附图中的虚线) 圆 $x^2+y^2=a^2$ 正交. 为此先在等值线方程 $\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2$ 中用 $x^2+y^2=a^2$ 代入, 得到 $x=\dfrac{a(1-k^2)}{(1+k^2)}$. 这就是它们的交点的横坐标 x. 利用这个关系式就容易证明在该交点处两个圆的切线正交.

习题 3168 求函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 的等值面.

解 当 $u=c<0$ 时等值面族为双叶双曲面族, 当 $u=0$ 时等值面为锥面, 当 $u=c>0$ 时等值面族为单叶双曲面族 (在附图中对于 $u>0$ 和 $u<0$ 都只作出了曲面族中的一个曲面). □



双叶双曲面　　锥面　　单叶双曲面

习题 3168 的附图

6.1.2　杂题 (习题 3171–3180)

习题 3171–3174 要求确定由几类方程给定的曲面的特征. 由于这是几类常见的方程, 因此将这几题以及答案列表如下.

3171 $z = f(y - ax)$ 是柱面, 其母线平行于坐标面 xOy 上的直线 $y = ax$, 准线为 $x = 0, z = f(y)$;

3172 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 是旋转面, 由坐标面 xOz 上的曲线 $z = f(x)$ 绕 Oz 轴旋转得到;

3173 $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 是锥面, 以坐标原点为顶点, 准线为 $x = 1, z = f(y)$ (不含顶点);

3174 $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 是直纹面, 其中的直线均平行于坐标面 xOy, 准线为 $x = 1$, $z = f(y)$.

下面给出上述几题中的最后一题的解答.

习题 3174 根据曲面的方程 $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 研究其性质.

解　从方程可见曲面与平面 $x = 0$ (即坐标面 yOz) 不交.

设点 $M(x_0, y_0, z_0)$ (其中 $x_0 \neq 0$) 在曲面上, 则可见直线 $x = tx_0, y = ty_0, z = z_0$ 除去 $t = 0$ 对应的点 $(0, 0, z_0)$ 之外都在曲面上. 因此该曲面为直纹面.

取平面 $x = 1$ 上的 $z = f(y)$ 为准线, 则如上所述, 通过准线上的任何点作平行于坐标面 xOy 且经过 Oz 轴的直线, 就得到属于曲面的直线, 只是要去掉它与 Oz 轴的交点. 还可以注意到, 上述直线就是函数 z 的等值线.

一般来说, 这样的曲面既不是柱面, 也不是锥面.　□

注　称由直线组成的曲面为直纹面, 它是包含柱面与锥面在内的一大类曲面. 例如在解析几何中列举的九种二次曲面中就有六种是直纹面, 其中包括双曲抛物面 (又称马鞍面, 见 §6.7.1 的习题 3622 的附图) 和单叶双曲面 (见前面习题 3168 的附图). 实际上, 在本题中取方程 $z = \dfrac{y}{x}$ 就得到一个马鞍面 $y = xz$, 只不过它以 Oy 轴为对称轴. (有兴趣的读者可参考名著 [19] 的第一章.)

习题 3175–3180 是多元函数的一些简单的代数计算题, 下面举其中的一个例子.

习题 3179 设

$$z = x + y + f(x - y).$$

若当 $y = 0$ 时 $z = x^2$, 求函数 f 和 z.

解　由条件得到

$$x^2 = x + f(x),$$

可见已经得到 $f(x) = x^2 - x$, 于是即可求出

$$z = x + y + (x - y)^2 - (x - y) = 2y + (x - y)^2. \quad \square$$

6.1.3 多元函数的极限 (习题 3181–3193)

将一元函数的极限概念推广到多元函数是容易的. 例如, 为了给出二元函数的极限

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A$$

的定义, 只要 (参见 §1.5.2 中对于一元函数极限分类中的基本类型) 写出

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

的 ε–δ 定义, 然后将其中的 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 改写为 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, 又将 $0 < |x - a| < \delta$ 改写为 $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ 即可. 这里的 $\|\cdot\|$ 是平面上两个点 (x, y) 和 (a, b) 之间的距离, 即是

$$\|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

也称为欧几里得距离. 利用

$$\max\{|x - a|, |y - b|\} \leqslant \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \leqslant |x - a| + |y - b|,$$

可见若将 $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ 换为 $|x - a| < \delta, |y - b| < \delta$, 则所得的极限定义是等价的. 因此上述二元函数的极限也经常等价地记为

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A.$$

然而多元函数除了称为多重极限的上述概念之外, 还有其他类型的函数极限, 即累次极限. 对于二元函数 $f(x, y)$ 来说, 在点 (a, b) 处有两种累次极限 (也称为二次极限), 即

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y) \quad 及 \quad \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y).$$

为区别起见, 可将它们分别称为先 x 后 y 和先 y 后 x 的二次极限. 以前者为例, 将 $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ 称为内层极限 (或里层极限), 它是在 b 的去心邻域内固定 y, 取 $x \to a$ 的极限, 因此得到的是 y 的函数. 然后再取 $y \to b$ 的极限, 即外层极限.

为了在点 (a, b) 处存在累次极限, $f(x, y)$ 只需要在点 (a, b) 的一个邻域内所有满足 $x \neq a$, $y \neq b$ 的点 (x, y) 处有定义就足够了. 这样的点集称为去十字邻域.

在多重极限与累次极限的关系上, 最基本的是一般教科书中均收入的以下命题.

命题 6.1 设存在二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A$, 则有以下结论:

(1) 若当 $y \neq b$ 且 $|y - b|$ 充分小时存在极限 $\varphi(y) = \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$, 则存在先 x 后 y 的二次极限, 且有

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y) = \lim_{y\to b} \varphi(y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A;$$

(2) 若当 $x \neq a$ 且 $|x - a|$ 充分小时存在极限 $\psi(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x, y)$, 则存在先 y 后 x 的二次极限, 且有

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{x\to a} \psi(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A.$$

注 上述命题表明, 二元函数在某个点处存在二重极限, 且存在某个内层极限, 则就存在相应的二次极限且其值等于二重极限. 特别地, 若两个不同的内层极限均存在, 则两个二次极限相等且等于二重极限. 由此也可推断, 若两个二次极限存在而不相等, 则必定不存在二重极限.

然而, 命题 6.1 之逆不成立. $f(x,y)$ 在某个点 (a,b) 处存在两个二次极限并不能保证函数在该点存在二重极限. 这就是下面的习题 3181 的意义.

习题 3181 证明: 对于函数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\}=1, \quad \lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\}=-1,$$

从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

解 在二次极限计算中要注意的是: 在求内层极限时还必须考虑到下一步的外层极限是什么. 以本题中的第一个二次极限来说, 此时内层极限是

$$\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\psi(x).$$

由于下一步是要计算 $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)$, 根据一元函数的极限定义, 我们不需要考虑 $x=0$ 时函数 ψ 是否有定义. 因此在求内层极限时就可以设 $x\neq 0$. 而在这个前提下, 就容易得到

$$\psi(x)=\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{x}{x}=1.$$

然后, 在 $x\neq 0$ 时恒等于 1 的函数在 $x=0$ 处的极限显然等于 1, 这样就证明了

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\psi(x)=1.$$

同理可证明另一个二次极限等于 -1, 从略.

由于两个二次极限不相等, 因此从命题 6.1 就知道二重极限不存在. □

注 也许有读者会问, 由题中的函数 $f(x,y)$ 所确定的曲面在点 $(0,0)$ 附近是否发生了什么“意外”, 才会出现如此的结论? 这可以参考上面 §6.1.2 的习题 3174, 因为本题就属于这个类型. 读者可以利用该习题中的讲解, 想像这个直纹面上的等值线的几何形状, 从而理解为什么在点 $(0,0)$ 处的二重极限不存在了.

进一步, 即使 $f(x,y)$ 在某个点 (a,b) 处存在两个相等的二次极限, 仍然不能保证函数在该点存在二重极限. 这就是下面的习题 3182 的意义.

习题 3182 证明: 对于函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 有

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\}=\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

解 两个二次极限都等于 0 的计算与习题 3181 中的计算类似, 从略.

对于后半题用反证法.

假设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处存在二重极限, 则根据命题 6.1 可见, 只能有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$$

根据定义, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 成立不等式

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right|<\varepsilon.$$

然而只要在满足 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 的前提下用 $x=y\neq 0$ 代入, 就看出左边为 1, 从而与 ε 可取为任意小的正数相矛盾. □

习题 3183.2 是否存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$?

解 考虑点 (x,y) 沿着斜率为 k 的直线趋于点 $(0,0)$, 为此只要令 $y=kx$ 代入 $f(x,y)$, 就可得到

$$f(x,kx)=\frac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

这里要注意: 由于函数极限定义中当 $(x,y)\to(a,b)$ 时, 不允许 $(x,y)=(a,b)$, 因此在上述计算中始终有 $x\neq 0$, 从而可以将分子分母中的公因子 x^2 约去.

由此可见, 当点 (x,y) 沿着不同斜率的直线趋于点 $(0,0)$ 时, 函数 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 存在与 k 有关的极限, 因此该函数在点 $(0,0)$ 处不存在二重极限.

还可以看出, 由 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 确定的曲面也属于 §6.1.2 的习题 3174 中的直纹面, 直线 $y=kx$ 就是 f 的等值线. 上述讨论就是利用了这些等值线. □

注 以上两个题中所用的方法的根据在于: 若 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处有极限 A, 则在点 (a,b) 的去心邻域内, 当点 (x,y) 沿着任意方向的直线趋于点 (a,b) 时, 其极限也应当等于 A. 具体来说, 可考虑直线 $x=a$ 与 $y=b+k(x-a)$, 其中 $-\infty<k<+\infty$. 这时只要考虑一元函数的极限即可.

对于习题 3182 来说, 由于二重极限若存在只能等于 0, 因此只利用 $k=1$ 就解决了问题. 对于习题 3183.2, 则也可以取两个不同的 k 来解决问题.

还要指出, 即使点 (x,y) 沿着所有直线趋于点 (a,b) 时, 函数 $f(x,y)$ 都存在极限且相等, 仍然不能保证 f 在点 (a,b) 的二重极限存在 (参见后面 §6.1.4 的习题 3202(b) 和 §6.7.1 末的习题 3682 及其附图).

习题 3184–3193 是关于二重极限和二次极限的计算题, 其中还包括了基本类型 (这是指 $(x,y)\to(a,b)$ 时的函数极限) 之外的各种函数极限. 下面举几个例子.

习题 3185 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解 由平均值不等式有 $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$, 从而即可如下估计得到

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{|x|+|y|}{|xy|}=\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

可见所求的极限为 0. □

习题 3190 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 1 这是 0^0 型的不定式. 取对数后求极限

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2),$$

则从

$$x^2y^2\ln(x^2+y^2)\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)$$

和 $\lim\limits_{u\to+0}u^2\ln u=0$ 可知本题的极限为 $\mathrm{e}^0=1$. □

解 2 利用 $\lim\limits_{u\to+0}u^u=1$ 和 $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{4}$, 即可计算极限如下:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[(x^2+y^2)^{x^2+y^2}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$$

$$=\left(\lim_{u\to+0}u^u\right)^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=1^0=1.\quad□$$

6.1.4 多元函数的连续性 (习题 3194–3210)

习题 3196 求函数 $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$ 的间断点.

解 函数 u 的定义域为 $x+y\neq0$ 之外的点全体.

对于定义域中的点, 有 $x+y\neq0$, 因此可约去分子分母共有的因子 $x+y$ 而得到

$$u=\frac{1}{x^2-xy+y^2}.$$

由于上式的分母 $x^2-xy+y^2\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, 即在 x,y 不同时为 0 时只取正值, 因此函数 u 在定义域 $x+y\neq0$ 内处处连续.

在直线 $x+y=0$ 上的点可写为 $(x_0,-x_0)$. 若其中的 $x_0\neq0$, 则由于对函数 $u(x,y)$ 取 $(x,y)\to(x_0,-x_0)$ 的极限时, u 只能在 $x+y\neq0$ 上取值, 因此就得到

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to-x_0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to-x_0}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3x_0^2}.$$

这表明所有满足 $x_0\neq0$ 的点 $(x_0,-x_0)$ 为函数 $u(x,y)$ 的可去不连续点.

最后求函数 u 在点 $(0,0)$ 处的极限. 这时同样可以约去分子分母的共有因子 $x+y$, 然后估计如下:

$$\left|\frac{x+y}{x^3+y^3}\right| = \frac{1}{x^2-xy+y^2} \geqslant \frac{1}{\frac{3}{2}(x^2+y^2)} = \frac{2}{3(x^2+y^2)} \to +\infty \ (x\to 0, y\to 0),$$

因此点 $(0,0)$ 是函数 u 的无穷型不连续点. □

注 对此题补充几点: (1) 函数 u 在直线 $x+y=0$ 上没有定义, 但仿照一元函数的情况, 仍然可以讨论这些点是何种类型的不连续点; (2) 对于该直线上的每一个点 $(x_0,-x_0)$, 在它的去心邻域中 u 也不是处处有定义, 这与一元函数中允许在函数的定义域的极限点处讨论函数的连续性是相同的; (3) 在本题的函数 u 的所有可去不连续点处用其极限补充定义后, 就得到了函数 $\dfrac{1}{x^2-xy+y^2}$.

习题 3202(a) 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & 若\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & 若\ x^2+y^2=0\end{cases}$$

分别对于每一个变量 x 或 y (当另一变量的值固定时) 是连续的, 但对这些变量的总体不是连续的.

解 (概要) 只有点 $(0,0)$ 需要讨论. 利用习题 3183.2 就知道 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可能连续. □

习题 3202(b) 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & 若\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & 若\ x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $O(0,0)$ 处沿过此点的每一射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\ \ (0\leqslant t<+\infty)$$

连续, 即存在

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=f(0,0),$$

但此函数在点 $(0,0)$ 并非连续的.

解 将直线的参数方程代入函数 f 的表达式中, 就有

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}\ \ (t\neq 0),$$

可见当 $\sin\alpha=0$, 即 $\alpha=0,\pi$ 时上式恒等于 0, 而当 $\sin\alpha\neq 0$ 时 $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\to 0\ (t\to 0)$. 又根据 $f(0,0)=0$, 因此 $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\Big|_{t=0}=0$, 可见 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处沿着过此点的每一条直线连续①.

① 将原题中的射线换为直线后结论仍成立.

然后观察函数 $f(x,y)$ 在经过原点 $O(0,0)$ 的抛物线族 $y=kx^2$ (k 取所有实数) 上的取值, 就有

$$f(x,kx^2)=\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}\quad(x\neq 0).$$

这表明每一条抛物线 $y=kx^2$ (除去原点 $(0,0)$) 都是函数 $f(x,y)$ 的等值线. 当 k 取所有实数时, $\frac{k}{1+k^2}$ 取到 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 内的所有值. 由于这些等值线都以原点 $(0,0)$ 为聚点, 因此函数 $f(x,y)$ 在原点不连续 (参见 §6.7.1 的习题 3682 及其附图). □

习题 3203.2 研究函数 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $E^2=\{|x|<+\infty,|y|<+\infty\}$ 上的一致连续性.

解 研究函数在两个相异点 (x,y), (x',y') 处的函数值之差:

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x'^2+y'^2}\right|&=\frac{|x^2+y^2-x'^2-y'^2|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}\\&\leqslant\frac{|x-x'|\cdot|x+x'|+|y-y'|\cdot|y+y'|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}\\&\leqslant|x-x'|+|y-y'|,\end{aligned}$$

可见对任意给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon/2$, 则当 $|x-x'|<\delta$, $|y-y'|<\delta$ 时, 就有 $|u(x,y)-u(x',y')|<\varepsilon$, 因此函数 $u(x,y)$ 在全平面上一致连续. □

习题 3203.3 函数

$$f(x,y)=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$$

在区域 $x^2+y^2<1$ 内是否一致连续?

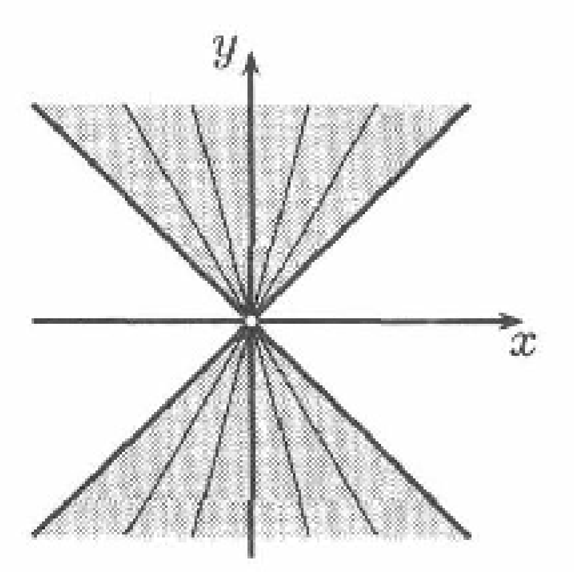
分析 当点 (x,y) 在区域 $x^2+y^2<1$ 内趋于其边界 $x^2+y^2=1$ 时, 正弦函数的自变量 $\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$ 趋于正无穷大, 因此函数值 $f(x,y)$ 将在 -1 到 1 之间作无限次振动, 从而不可能一致连续. □

习题 3203.4 给定函数

$$u=\arcsin\frac{x}{y}.$$

此函数在其定义域 E 内是否连续? 是否一致连续?

分析 这时的定义域 E 为满足 $|x|\leqslant|y|$ 和 $y\neq 0$ 的所有点 (x,y), 即如附图所示的阴影区域, 但不包含原点. 函数 u 作为初等函数, 在定义域内处处连续是没有问题的.



习题 3203.4 的附图

由于在该定义域内经过原点 (但不包含原点) 的直线为函数 u 的等值线, 且当直线为 $x=ky$ $(-1\leqslant k\leqslant 1)$ 时, 等值线上的函数值为 $\arcsin k$, 因此在原点的任何去心邻域内, 函数 u 将取到闭区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 中的所有值, 从而不可能一致连续 (注意本题的方程属于习题 3174 中的类型). □

从习题 3202(a) 知道, 若二元函数 $f(x,y)$ 分别对 x 和 y 连续, 则并不一定是二元连续函数. 下面的几个习题 3205–3207 给出了从对两个变量分别连续到二元连续的几个常用的充分条件.

习题 3205 证明: 若函数 $f(x,y)$ 在某区域 G 内对变量 x 是连续的, 而对变量 y 是关于 x 一致连续的, 则此函数在该区域内是连续的.

解 只要任取点 $(x_0,y_0)\in G$ 来讨论即可[①].

对于给定的 $\varepsilon>0$, 根据函数 f 对 x 连续, 存在 $\delta_1>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又根据 f 对 y 的连续是关于 x 一致的, 因此对同一个 ε, 存在 $\delta_2>0$, 使得对于 G 内满足 $|y-y_0|<\delta_2$ 的所有点 (x,y), 同时成立

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

因此 f 在点 (x_0,y_0) 处二元连续. □

习题 3206 证明: 若在某区域 G 内函数 $f(x,y)$ 对变量 x 是连续的, 并满足对变量 y 的利普希茨条件, 即

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

式中 $(x,y')\in G$, $(x,y'')\in G$, 而 L 为常数, 则此函数在该区域内是连续的.

解 用习题 3205 的结论即可得到, 从略. □

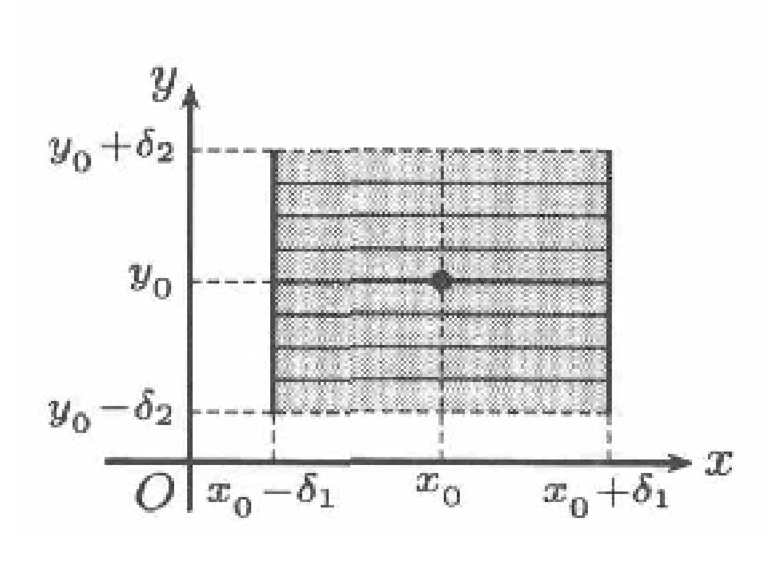
习题 3207 (杨氏定理) 证明: 若函数 $f(x,y)$ 分别对每一个变量 x 和 y 是连续的, 并对其中的一个是单调的, 则此函数对两个变量的总体是连续的.

解 不妨只讨论 f 关于 x 为单调的情况.

对于点 (x_0,y_0), 利用 f 对 x 连续, 对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得当 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$ 时, 成立

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

如右边的附图所示, 在经过点 (x_0,y_0) 的水平线段 $\{(x,y_0)\mid |x-x_0|\leqslant\delta_1\}$ 上的每一点处, 其函数值与 $f(x_0,y_0)$ 之差的绝对值小于 $\varepsilon/2$.



习题 3207 的附图

然后利用固定 $x=x_0\pm\delta_1$ 时函数 f 对 y 的连续性, 存在 δ_2, 使得当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时, 同时成立

① 注意区域的定义为开集, 因此以点 (x_0,y_0) 为中心的充分小的邻域完全落在 G 内.

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$
$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是又成立

$$\begin{aligned}|f(x_0\pm\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x_0\pm\delta_1,y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|\\&\quad+|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

几何上这表明在附图的灰色矩形的左右两条边上的所有点处, 其函数值与 $f(x_0,y_0)$ 之差的绝对值小于 ε.

现在考虑灰色矩形内的每一个点 (x,y) 处的函数值 $f(x,y)$. 由于 f 关于 x 单调, 因此 $f(x,y)$ 必定处于 $f(x_0-\delta_1,y)$ 和 $f(x_0+\delta_1,y)$ 之间. 如附图所示, 矩形中的水平细直线上的每个点处的函数值被夹在该线段两端的函数值之间. 既然这两个函数值与 $f(x_0,y_0)$ 之差的绝对值小于 ε, 则线段中间的每个点的函数值必定也是如此.

为具体写出以上推理过程, 不妨设 f 关于 x 为单调递增, 于是当 $|x-x_0|<\delta_1$, $|y-y_0|<\delta_2$ 时, 就有

$$f(x_0-\delta_1,y)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_0+\delta_1,y).$$

又因已经得到了

$$|f(x_0\pm\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

因此就有

$$f(x_0,y_0)-\varepsilon<f(x_0-\delta_1,y)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_0+\delta_1,y)<f(x_0,y_0)+\varepsilon,$$

即成立 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. 由于这对附图中灰色矩形内的每个点 (x,y) 都成立, 因此就已经证明了 f 在点 (x_0,y_0) 处连续. □

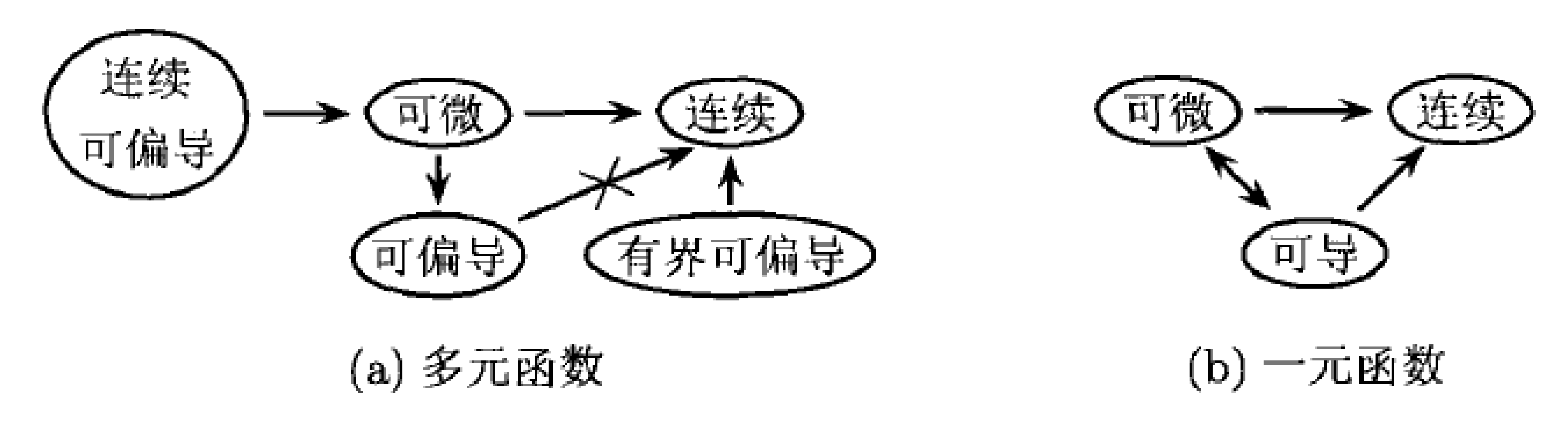
§6.2 偏导数. 函数的微分 (习题 3211.1–3360)

内容简介 本节对应于一元微分学的 §2.1、§2.3–2.5, 只是计算更为复杂.

6.2.1 一些基础性问题 (习题 3211.1–3212.3, 3229–3234, 3251–3255)

在这一小节中集中了与偏导数和全微分有关的一些基础性问题有关的习题, 其中包括偏导数的定义、偏导数与连续的关系、偏导数与可微的关系、高阶混合偏导数与求偏导顺序无关的问题以及齐次函数的欧拉公式等.

在下面附图的左边以图示的方式列出这方面的基本事实, 并在右边画出一元函数的相应情况供比较. 它们的证明可在教科书和《习题集》的某些习题中找到, 从略.



(a) 多元函数　　(b) 一元函数

函数的可 (偏) 导、可微与连续之间关系的示意图

应当指出, 在附图中凡是单方向箭头表示的关系, 其反方向关系一般均不成立. 为简明起见, 在图示中均省略了①.

这里简要地指出多元函数可偏导不能推出可微和连续的理由. 对于一元函数来说, 导数就是因变量相对于自变量的变化率, 同时也是曲线的切线的斜率. 然而偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 的存在只表明函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿着 Ox 轴方向有确定的变化率. 同样, $f'_y(x_0,y_0)$ 的存在也只表明 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿着 Oy 轴方向有确定的变化率. 下面就将举出例子, 说明在这两个特殊方向存在变化率不能保证函数在点 (x_0,y_0) 连续, 更谈不上可微了 (建议读者想象该例子在几何上的意义).

例题 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0,\\ 0, & xy\neq 0,\end{cases}$ 则函数 f 在点 $(0,0)$ 处不连续, 然而却存在有 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

从附图左边可见, 其中最强的条件是多元函数的连续可偏导 (即存在连续的偏导函数), 简称为连续可微. 今后讨论许多问题时对函数所加的主要条件就是连续可微.

注 "有界可偏导 $\Rightarrow$ 连续"是后面的习题 3254 的推论: 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个邻域内存在有界的偏导函数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$, 则 f 在点 (x_0,y_0) 处连续. (《习题集》中的习题 3252 还表明有界可偏导不能推出可微.)

① 关于多元函数在这方面的研究还有很多, 比较详细的材料可以在 [30] 的 §5.4 中找到.

习题 3211.1 证明: $f'_x(x,b)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)]$.

解 记 $f(x,b)=\varphi(x)$, 根据偏导数的定义有

$$\begin{aligned}f'_x(x,b)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)].\quad\square\end{aligned}$$

注 本题虽然简单, 但对初次接触多元函数微分学的读者来说, 至少有两个意义: (1) 多元函数的偏导数计算就是一元函数的导数计算; (2) 为了求二元函数 $f(x,y)$ 当 $y=b$ 时对 x 的偏导数, 可以先将其中的 y 用 $y=b$ 代入后计算, 而不必在计算 $f'_x(x,y)$ 后再用 $y=b$ 代入. 两者的繁简程度可能很不相同. 下面就是这样的例子.

习题 3211.2 设

$$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x,1)$.

解 由上题可见, 只要用 $y=1$ 代入函数 $f(x,y)$ 就得到 $f(x,1)=x$, 然后再对 x 求导就得到 $f'_x(x,1)=1$. $\square$

下面的习题 3212 含三个小题, 都是《习题集》的新版中增加的, 内容是多元函数可求偏导与可微之间的关系.

习题 3212.1 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, 求 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$. 此函数在点 $(0,0)$ 是否可微?

提示 本题是在点 $(0,0)$ 处存在两个偏导数但不可微的例子. $\square$

习题 3212.2 函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 在点 $(0,0)$ 是否可微?

解 用 $y=0$ 代入有 $f(x,0)=x$, 因此得到 $f'_x(0,0)=1$. 同样可得到 $f'_y(0,0)=1$. 若 f 在点 $(0,0)$ 处可微, 则按照可微的定义就应当有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

可是在分式中令 $y=x$, 该极限就是一个非零常数, 因此 f 在点 $(0,0)$ 处不可微. $\square$

习题 3212.3 研究函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $O(0,0)$ 的可微性.

提示 $f(x,y)$ 确定的曲面可由 §2.5.5 的习题 1225 (关于函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ $(x\neq0)$, $f(0)=0$ 的研究) 的曲线旋转得到, 由此可见该曲面在原点处具有水平的切平面, 因此可猜测出本题的答案是可微. $\square$

习题 3229 的三个小题和习题 3230 的两个小题都涉及二元函数的两个二阶混合偏导数的计算. 在一般的教科书中都证明了下列结论: 当高阶混合偏导数连续时, 它们的值与求偏导的顺序无关. 习题 3229 就是这个定理的具体验证, 而习题 3230 则举出了二阶混合偏导数不相等或不存在的例子.

习题 3231–3234 是关于齐次函数的欧拉公式. 以三元函数 $u = f(x, y, z)$ 为例, 若对于 $t > 0$ 成立

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z),$$

则称 f 为 n 次齐次函数.

在 f 连续可偏导时, 任意固定 f 的定义域中的某一点 (x_0, y_0, z_0), 将等式

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^n f(x_0, y_0, z_0)$$

对 t 求导得到

$$x_0 \frac{\partial f(tx_0, ty_0, tz_0)}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f(tx_0, ty_0, tz_0)}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f(tx_0, ty_0, tz_0)}{\partial z} = nt^{n-1} f(x_0, y_0, z_0).$$

令其中的 $t = 1$, 并利用点 (x_0, y_0, z_0) 的任意性, 就得到

$$x \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} + z \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = nf(x, y, z).$$

这就是欧拉公式.

反之, 可以证明这也是可微函数 f 为 n 次齐次函数的充分性条件. 这就是下面的习题 3232.

习题 3232 证明: 若可微函数 $u = f(x, y, z)$ 满足方程

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

解 作辅助函数

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n},$$

则在 $t > 0$ 时就可将 $F(t)$ 对 t 求导得到

$$F'(t) = \frac{1}{t^n}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) + (-nt^{-n-1}) f(tx, ty, tz).$$

用 $t = 1$ 代入, 然后利用题设条件, 这样就有 $F'(t) \equiv 0$. 可见 $F(t)$ 在 $t > 0$ 时为常值函数. 又从 $F(t)$ 的定义可见有 $F(1) = f(x, y, z)$, 因此就得到要求证明的等式:

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z). \quad \square$$

习题 3234 设 $u = f(x, y, z)$ 是二阶可微的 n 次齐次函数, 证明:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

解 (概要) 在 $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$ 两边对 t 接连求导两次, 然后令 $t = 1$ 代入即可. □

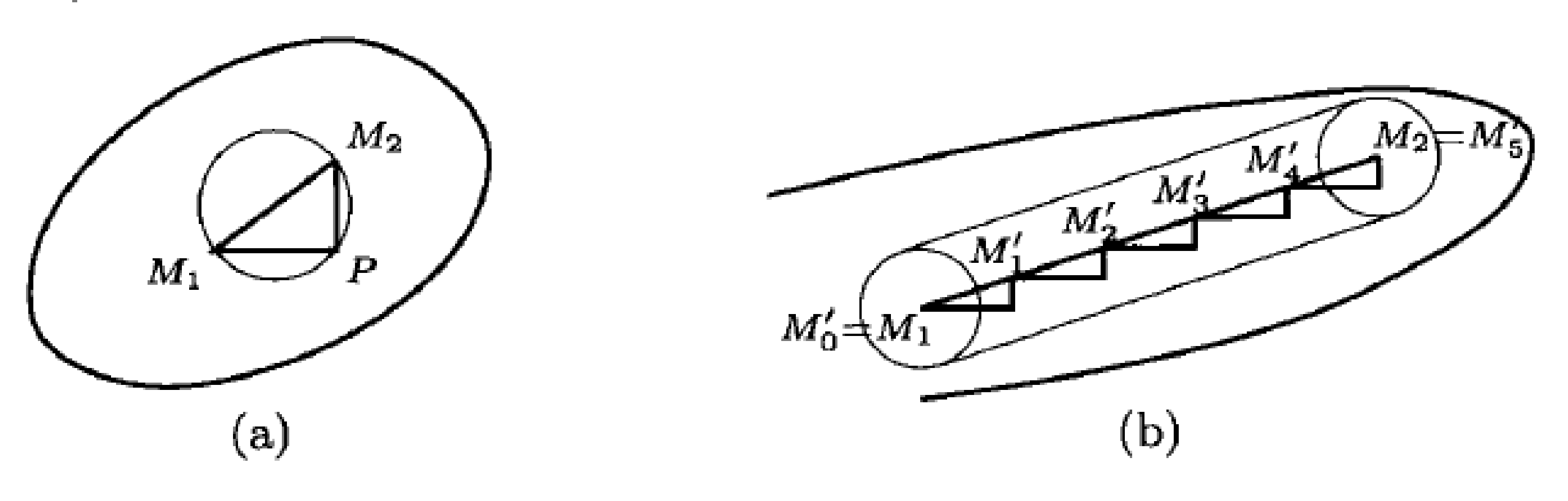
习题 3251–3253 是关于可偏导和可微关系的习题. 习题 3251 与前面的习题 3221.1 类似, 习题 3252 表明 (参见前面的附图) 在连续可偏导保证可微性的定理中, 偏导数连续的条件不能减弱为有界, 习题 3253 则表明上述充分条件并非是必要条件.

习题 3254 证明: 在某凸区域 E 内具有有界偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 的函数 $f(x,y)$ 在此区域内一致连续.

解 根据条件, 存在正常数 L, 使得在凸区域 E 上处处成立 $|f'_x(x,y)| < L$, $|f'_y(x,y)| < L$. 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2L}$. 以下将证明, 对于 E 中的任意两点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$, 只要它们的距离 $\rho(M_1,M_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta$, 就有

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = |f(M_1) - f(M_2)| \leqslant 2L\rho(M_1,M_2) < 2L\delta = \varepsilon.$$

由于 E 为凸区域, 因此联接点 M_1 和 M_2 的直线段完全落在区域 E 内. 以下如附图 (a), (b) 所示, 分两种情况来作出证明.



习题 3254 的附图

(1) 若以直线段 $\overline{M_1M_2}$ 为直径的圆完全落在 E 内, 则在该圆周上的点 (x_1,y_2) 和 (x_2,y_1) 也都在 E 内. 如附图 (a) 所示, 不妨取点 $P(x_2,y_1)$, 则就可以用拉格朗日微分中值定理得到在 x_1,x_2 之间的 ξ 和 y_1,y_2 之间的 η, 使得成立所要求的估计:

$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| &\leqslant |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1)| + |f(x_2,y_1) - f(x_2,y_2)| \\ &= |f'_x(\xi,y_1)|\cdot|x_1-x_2| + |f'_y(x_2,\eta)|\cdot|y_1-y_2| \\ &\leqslant 2L\rho(M_1,M_2) < 2L\delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 若情况 (1) 中的条件不满足, 则利用区域 E 为开集, 存在 $R>0$, 使得点 M_1 和 M_2 的两个半径为 R 的开邻域完全落在 E 内. 如附图 (b) 所示, 作这两个圆的两条公切线, 则利用 E 为凸区域的条件就可看出, 在直线段 $\overline{M_1M_2}$ 上的任何两个点 M', M'', 只要它们的距离小于 $2R$, 就可使得以 $\overline{M'M''}$ 为直径的圆完全落在 E 内.

在 $\overline{M_1M_2}$ 上取有限个点 $M'_0, M'_1, \cdots, M'_n$, 使得 $M'_0 = M_1$, $M'_n = M_2$, 同时 $\overline{M'_kM'_{k+1}}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 的长度均小于 $2R$ (附图 (b) 中取 $n=5$).

记点 M'_k 的坐标为 (x'_k, y'_k), $k=0,1,\cdots,n$, 然后重复情况 (1) 中的推导, 就可以估计得到

$$|f(M'_k) - f(M'_{k+1})| \leqslant 2L\rho(M'_k, M'_{k+1}) \ \ (k=0,1,\cdots,n-1).$$

将这些不等式相加即可得到

$$|f(M_1)-f(M_2)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(M_k')-f(M_{k+1}')| \leqslant 2L\rho(M_1,M_2) < 2L\delta = \varepsilon. \quad \square$$

注 1 由此可见, 在题设的条件下, $f(x,y)$ 不仅一致连续, 而且还是满足利普希茨条件的连续函数 (利普希茨常数为 $2L$). (还可参考后面 §8.17.1 的习题 4414.2 及其注.)

注 2 回顾 §1.9 的最后一个习题 806.2, 即有限开区间上的连续函数可连续延拓到闭区间上的充分必要条件是该函数一致连续, 本题的二元函数 $f(x,y)$ 也可以连续延拓到区域 E 的闭包 $\overline{E}$ 上, 从而成为有界闭区域上的一致连续函数, 而且还满足利普希茨条件. 证明的方法与习题 806.2 类似.

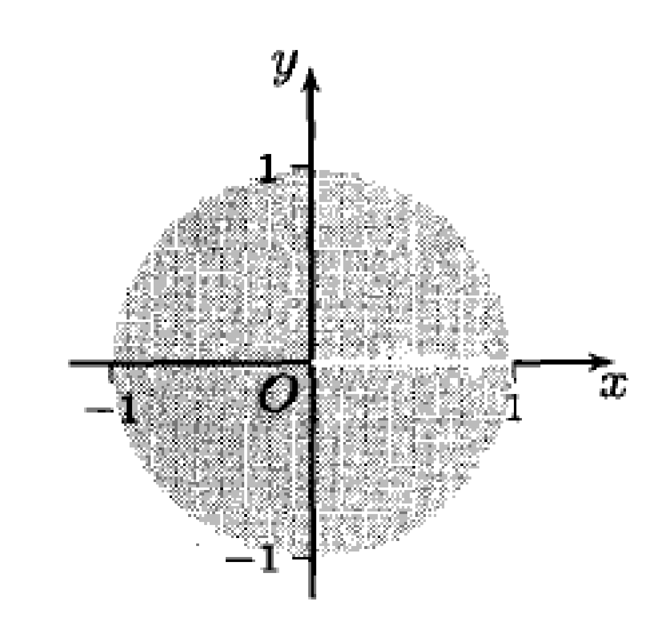
注 3 本题条件中的区域 E 的凸性条件至关重要. 若去掉此条件, 则结论就不能成立. 以下是将 [13] 的第九章第 11 题中用于其他目的的例子改造后得到的函数.

设 E 是单位开圆盘去掉其中原点和正 Ox 轴上的点所得的区域:

$$E = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1, \text{且当 } y=0 \text{ 时 } x<0\},$$

然后在 E 上定义

$$f(x,y)=\begin{cases} x^3, & \text{如 } (x,y)\in E \text{ 且 } x>0, y>0, \\ 0, & \text{如 } (x,y) \text{ 是 } E \text{ 中的其他点}. \end{cases}$$



习题 3254 的补充附图

如右边的附图所示, 区域 E 用阴影区表示, 其中在第一象限中有 $f(x,y)=x^3$, 其余处都是 $f(x,y)=0$. 容易想象由 $z=f(x,y)$ 给出的空间曲面的形状.

不难验证 f 在 E 内具有有界的偏导数 f_x' 和 f_y' (且后者恒等于 0), 但当点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$ 在 E 内分别从 $y>0$ 和 $y<0$ 的部分趋于点 $(1,0)$ 时, $f(x_1,y_1)$ 趋于 1, 而 $f(x_2,y_2)$ 趋于 0, 由于这时的距离 $\rho(M_1,M_2)$ 趋于 0, 因此 f 在 E 上不一致连续.

注 4 由于本题的条件不能保证函数 f 可微, 因此在证明中没有采用链式法则工具. 这方面可以参看后面 §8.17.1 的习题 4414.2 及其注.

习题 3255 证明: 若函数 $f(x,y)$ 对变量 x 连续 (对每一个固定的值 y) 且有对变量 y 的有界的导数 $f_y'(x,y)$, 则此函数对变量 x 和 y 的总体是连续的.

提示 引用 §6.1.4 的习题 3206 的结论. □

6.2.2 偏导数计算 I (习题 3213–3228, 3235–3250)

这一小节是一阶和二阶的偏导数与微分的计算, 此外还有用一阶微分代替增量的一些近似计算题.

习题 3223 求函数 $u=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 的一阶和二阶偏导数.

解 1 先计算 u 关于 x 的一阶偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x=\frac{(1-xy)^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\cdot\frac{(1-xy)-(-y)(x+y)}{(1-xy)^2}$$

$$=\frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

由对称性就可知有 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}$.

然后即可继续计算得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}.\quad \square$$

解 2 利用反正切加法定理 (见 §1.8.2 的习题 776 及其附图 2), 就有

$$\arctan\frac{x+y}{1-xy}=\arctan x+\arctan y+\theta\pi,$$

其中 $\theta=\theta(x,y)$ 是只取 $-1,0,1$ 三个值的函数, 且于 $xy\neq 1$ 的点 (x,y) 的充分小的邻域内为常值函数, 因此只要求偏导即可得到与解 1 相同的答案. □

习题 3225 求 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的一阶和二阶偏导数.

解 1 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则可先计算得到

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},$$

然后从 $u=\dfrac{1}{r}$ 出发即可求得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},$$

再由对称性得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}.$$

在上述一阶偏导数的基础上可计算得到二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{3xy}{r^5},$$

然后再利用对称性可得到其余的二阶偏导数, 从略. □

解 2 (全微分法) 由一阶全微分与偏导数的关系

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

可知若能求出 $\mathrm{d}u$, 则也就同时求出了所有的一阶偏导数.

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则有 $u=\dfrac{1}{r}$. 利用 $r\,\mathrm{d}r=x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$ 和一阶微分的形式不变性, 即可得到

$$\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=-\frac{1}{r^3}\cdot r\,\mathrm{d}r=-\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{r^3},$$

于是就得到 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x}{r^3}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y}{r^3}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{z}{r^3}$.

又利用当 x,y,z 为自变量时的二阶全微分有下列表达式:

$$\mathrm{d}^2u = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u,$$

因此只要求出 d^2u 也就同时可得到所有的二阶偏导数.

从 $\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$ 出发即可得到①

$$\mathrm{d}^2u = \frac{2\,(\mathrm{d}r)^2}{r^3} - \frac{\mathrm{d}^2r}{r^2}.$$

对于 $r\,\mathrm{d}r = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ 再求微分, 就得到

$$(\mathrm{d}r)^2 + r\,\mathrm{d}^2r = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2.$$

合并以上就可得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u &= \frac{2}{r^5}\cdot(r\,\mathrm{d}r)^2 - \frac{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 - (\mathrm{d}r)^2}{r^3}\\ &= \frac{1}{r^5}\cdot\{3(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)^2 - r^2[(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2]\}.\end{aligned}$$

由此即可得出所有的二阶偏导数, 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{3xy}{r^5}$$

等等. □

习题 3236 求函数 $u = \frac{x}{y}$ 的一阶和二阶微分.

解 这里 x, y 为自变量, 因此 $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$, 于是可计算得到

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}^2u = -\frac{2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}y^2. \quad \square$$

习题 3238 求函数 $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 的一阶和二阶微分.

解 仿照习题 3225 的解 2 的方法可如下计算. 令 $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则从 $r^2 = x^2 + y^2$ 先计算得到

$$r\,\mathrm{d}r = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}r^2 + r\,\mathrm{d}^2r = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2.$$

然后即可对于复合函数 $u = \ln r(x, y)$ 求出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{r^2},\\ \mathrm{d}^2u &= -\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r^2 + \frac{1}{r}\,\mathrm{d}^2r = \frac{1}{r^4}[-2(r\,\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)]\\ &= \frac{1}{r^4}[(y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x^2 - 4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (-y^2 + x^2)\,\mathrm{d}y^2]. \quad \square\end{aligned}$$

习题 3242 设函数 $f(x, y, z) = \sqrt[z]{\frac{x}{y}}$, 求 $\mathrm{d}f(1, 1, 1)$ 和 $\mathrm{d}^2f(1, 1, 1)$.

解 取对数得到 $\ln f = \frac{1}{z}(\ln x - \ln y)$, 然后求导就得到

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \frac{1}{xz}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{yz}\,\mathrm{d}y - \frac{\ln x - \ln y}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

① 注意区别 d^2r, $\mathrm{d}(r^2)$ 和 $(\mathrm{d}r)^2$. 习惯上也经常将 $(\mathrm{d}r)^2$, $(\mathrm{d}x)^2$ 等记为 $\mathrm{d}r^2$, $\mathrm{d}x^2$ 等.

用 $x=y=z=1$ 代入, 因有 $f(1,1,1)=1$, 就得到

$$\mathrm{d}f(1,1,1)=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$$

为了计算 $\mathrm{d}^2f(1,1,1)$, 至少有两个方法. 第一种方法是如上面那样求出 $\mathrm{d}^2f(x,y,z)$ 后再令 $x=y=z=1$ 代入, 计算量也不大; 第二种方法是通过求出在点 $(1,1,1)$ 处的所有二阶导数后得到二阶微分. 下面试用第二个方法.

从 $f'_x(x,y,z)=\dfrac{f(x,y,z)}{xz}$ 出发, 由 $f(x,1,1)=x$ 得到 $f'_x(x,1,1)=1$, 再求导得到 $f''_{xx}(1,1,1)=0$. 由 $f(1,y,1)=\dfrac{1}{y}$ 得到 $f'_x(1,y,1)=\dfrac{1}{y}$, 再求导得到 $f''_{xy}(1,1,1)=-1$. 又由 $f(1,1,z)=1$ 得到 $f'_x(1,1,z)=\dfrac{1}{z}$, 再求导得到 $f''_{xz}(1,1,1)=-1$.

然后从 $f'_y(x,y,z)=-\dfrac{f(x,y,z)}{yz}$ 出发, 由 $f'_y(1,y,1)=-\dfrac{1}{y^2}$ 求导得到 $f''_{yy}(1,1,1)=2$, 由 $f'_y(1,1,z)=-\dfrac{1}{z}$ 求导得到 $f''_{yz}(1,1,1)=1$.

最后从 $f'_z(x,y,z)=-\dfrac{\ln x-\ln y}{z^2}\cdot f(x,y,z)$ 出发, 由 $f'_z(1,1,z)=0$ 求导得到 $f''_{zz}(1,1,1)=0$.

综合以上就得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2f(1,1,1)&=f''_{xx}(1,1,1)\,\mathrm{d}x^2+f''_{yy}(1,1,1)\,\mathrm{d}y^2+f''_{zz}(1,1,1)\,\mathrm{d}z^2\\&\quad+2f''_{xy}(1,1,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2f''_{yz}(1,1,1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2f''_{zx}(1,1,1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\&=2\,\mathrm{d}y^2-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.\quad\square\end{aligned}$$

习题 3244(c) 假设 x,y 的绝对值很小, 求 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$ 的近似公式.

解 由于 $f(0,0)=0$, 因此可用 $\mathrm{d}f(0,0)$ 来近似代替 $f(x,y)$.

从 $f(x,0)=\arctan x$ 得到 $f'_x(0,0)=\dfrac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1$. 由对称性即有 $f'_y(0,0)=1$. 再利用 $\mathrm{d}x=\Delta x=x-0$, $\mathrm{d}y=\Delta y=y-0$, 可见就有

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x,y)-f(0,0)\\&\approx f'_x(0,0)\,\mathrm{d}x+f'_y(0,0)\,\mathrm{d}y=x+y.\quad\square\end{aligned}$$

习题 3245(c) 用微分来代替函数的增量, 近似地计算 $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$.

解 记 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$, 则 $f(1,2)=3$. 现在有 $\mathrm{d}x=\Delta x=0.02$, $\mathrm{d}y=\Delta y=-0.03$, 因此需要求出 $f'_x(1,2)$ 和 $f'_y(1,2)$.

从 $f(x,2)=\sqrt{x^3+8}$ 得到 $f'_x(1,2)=\dfrac{1}{2}$. 又从 $f(1,y)=\sqrt{1+y^3}$ 得到 $f'_y(1,2)=2$, 于是就有

$$\begin{aligned}f(1.02,1.97)&\approx f(1,2)+f'_x(1,2)\,\mathrm{d}x+f'_y(1,2)\,\mathrm{d}y\\&=3+0.01-0.06=2.95.\quad\square\end{aligned}$$

注 用计算器得到 $f(1,2)\approx 2.950\,69$, 可见用微分代替增量对本题来说是不错的.

6.2.3　偏导数计算 II (习题 3256–3279, 3283–3304)

这一小节包含两个内容: (1) 高阶偏导数和高阶微分的计算, (2) 复合函数的偏导数和全微分的计算.

习题 3263 求 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$, 若 $u=\dfrac{x+y}{x-y}$.

解　将 u 改写为 $u=1+\dfrac{2y}{x-y}$, 则可先对 x 求 m 次偏导得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m u}{\partial x^m}&=2(-1)^m m!\cdot\frac{y}{(x-y)^{m+1}}=2(-1)^m m!\cdot\frac{x-(x-y)}{(x-y)^{m+1}}\\&=2(-1)^m m!\cdot\Big(\frac{x}{(x-y)^{m+1}}-\frac{1}{(x-y)^m}\Big),\end{aligned}$$

然后再对 y 求 n 次偏导得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}&=2(-1)^m m!\cdot\Big(\frac{x\cdot(m+1)\cdots(m+n)}{(x-y)^{m+n+1}}-\frac{m\cdots(m+n-1)}{(x-y)^{m+n}}\Big)\\&=2(-1)^m(m+n-1)!\cdot\frac{nx+my}{(x-y)^{m+n+1}}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 3267 证明: 若 $u=f(xyz)$, 则 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=F(t)$, 式中 $t=xyz$, 并求函数 F.

解　逐次求偏导即可证明如下:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=xf'(t)+x^2yzf''(t),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=f'(t)+xyzf''(t)+2xyzf''(t)+x^2y^2z^2f'''(t)=f'(t)+3tf''(t)+t^2f'''(t).$$

上式最后一个表达式就是所要求的 $F(t)$. $\square$

习题 3268 设

$$\begin{aligned}u=x^4-2x^3y-2xy^3+y^4+x^3-3x^2y-3xy^2+y^3\\+2x^2-xy+2y^2+x+y+1,\end{aligned}$$

求 d^4u. 偏导数 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}$ 和 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ 等于什么?

解　从四阶微分的定义可见, 在 u 的表达式中, 除了前四项组成的四次多项式之外, 所有其他项对 d^4u 的贡献只能是 0.

利用求微分运算的线性性质就可以先求出所要求的偏导数为

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{\partial^4}{\partial x^4}(x^4)=24,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}(-2x^3y)=-12,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}=\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}(-2xy^3)=-12,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=\frac{\partial^4}{\partial y^4}(y^4)=24.$$

然后即可得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^4u &= \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u\\
&= \mathrm{d}x^4\frac{\partial}{\partial x^4}(x^4)+\mathrm{C}_4^1\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial x^3\partial y}(-2x^3y)+\mathrm{C}_4^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^3\frac{\partial}{\partial x\partial y^3}(-2xy^3)+\mathrm{d}y^4\frac{\partial}{\partial y^4}y^4\\
&= 24\,\mathrm{d}x^4-48\,\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}y-48\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^3+24\,\mathrm{d}y^4\\
&= 4!\,(\mathrm{d}x^4-2\,\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}y-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^3+\mathrm{d}y^4).\quad\square
\end{aligned}$$

注 本题对四次多项式的四阶微分计算与《习题集》中的习题 3269, 3273 都是习题 3279 的特例. (习题 3279 的结论对于一般多元齐次多项式都成立.)

习题 3276 求 $\mathrm{d}^n u$, 若 $u=X(x)Y(y)$.

解 由 n 阶微分的一般计算公式即可得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^n u &= \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n u=\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}y^{n-k}\frac{\partial^n}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\right)[X(x)Y(y)]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{\mathrm{d}^kX(x)}{\mathrm{d}x^k}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-k}Y(y)}{\mathrm{d}y^{n-k}}\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}y^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,\mathrm{d}^kX(x)\,\mathrm{d}^{n-k}Y(y).\quad\square
\end{aligned}$$

习题 3279 设 $P_n(x,y,z)$ 为 n 次齐次多项式. 证明:

$$\mathrm{d}^nP_n(x,y,z)=n!P_n(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z).$$

解 $P_n(x,y,z)$ 是形式为 $A_{ijk}x^iy^jz^k$ 的所有项之和, 其中 i,j,k 取 $0,1,\cdots,n$ 中的非负整数, 且满足 $i+j+k=n$. 由于微分运算具有线性性质, 因此只要对于系数为 1 的单项式 $x^iy^jz^k$ 证明成立公式:

$$\mathrm{d}^n(x^iy^jz^k)=n!\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}z^k. \tag{6.1}$$

下面对 n 用数学归纳法来证明公式 (6.1) 成立.

对 $n=1$, 满足 $i+j+k=1$ 的 i,j,k 中只可能有一个等于 1, 其他两个等于 0. 这时公式 (6.1) 的成立是平凡的.

现设 (6.1) 对 n 成立, 然后考察该公式当 $n+1$ 时如何.

这时设三个非负整数 i,j,k 满足约束 $i+j+k=n+1$. 于是有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{n+1}(x^iy^jz^k) &= \mathrm{d}^n[\mathrm{d}(x^iy^jz^k)]=\mathrm{d}^n(ix^{i-1}y^jz^k\,\mathrm{d}x+jx^iy^{j-1}z^k\,\mathrm{d}y+kx^iy^jz^{k-1}\,\mathrm{d}z)\\
&= i\,\mathrm{d}^n(x^{i-1}y^jz^k)\,\mathrm{d}x+j\,\mathrm{d}^n(x^iy^{j-1}z^k)\,\mathrm{d}y+k\,\mathrm{d}^n(x^iy^jz^{k-1})\,\mathrm{d}z\\
&= (i+j+k)\cdot n!\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}z^k=(n+1)!\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}z^k.
\end{aligned}$$

注意在上式中对于 $\mathrm{d}^n(x^{i-1}y^jz^k)$, $\mathrm{d}^n(x^iy^{j-1}z^k)$, $\mathrm{d}^n(x^iy^jz^{k-1})$ 的计算使用了归纳假设. 同时还可看出, 在 i,j,k 中出现 0 时由于相应的项必定为 0, 这些计算不必进行. □

习题 3284–3304 是复合函数的偏导数和微分计算. 这时需要注意, 自变量的二阶微分必然等于 0, 但中间变量的二阶微分没有这个性质.

以二元函数为例, 若 $u=f(\xi,\eta)$ 中的 ξ 和 η 为中间变量, 即它们本身是其他 (一个或多个) 变量 (例如 x,y,z 等) 的函数, 则由于一阶微分的形式不变性, 我们仍然有

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\eta. \tag{6.2}$$

从 (6.2) 出发再求一次微分则得到二阶全微分的计算公式为

$$\mathrm{d}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\mathrm{d}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\mathrm{d}\eta^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\mathrm{d}^2\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\mathrm{d}^2\eta, \tag{6.3}$$

当 ξ 和 η 为自变量时最后两项消失[①].

习题 3284 求复合函数 $u = f\Big(x, \dfrac{x}{y}\Big)$ 的一阶和二阶导数.

解 1 直接用复合函数求偏导的链式法则可依次计算得到[②]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= f_1'\Big(x, \frac{x}{y}\Big) + \frac{1}{y} f_2'\Big(x, \frac{x}{y}\Big), \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{x}{y^2} f_2'\Big(x, \frac{x}{y}\Big), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f_{11}''\Big(x, \frac{x}{y}\Big) + \frac{2}{y} f_{12}''\Big(x, \frac{x}{y}\Big) + \frac{1}{y^2} f_{22}''\Big(x, \frac{x}{y}\Big), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{y^2} f_2'\Big(x, \frac{x}{y}\Big) - \frac{x}{y^2} f_{12}''\Big(x, \frac{x}{y}\Big) - \frac{x}{y^3} f_{22}''\Big(x, \frac{x}{y}\Big), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2x}{y^3} f_2'\Big(x, \frac{x}{y}\Big) + \frac{x^2}{y^4} f_{22}''\Big(x, \frac{x}{y}\Big). \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 (全微分法) 利用公式 (6.2) 和 (6.3), 由于本题的 $\xi = x$, $\eta = \dfrac{x}{y}$, 因此有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}^2\xi = 0, \\
&\mathrm{d}\eta = \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}^2\eta = -\frac{2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

将它们代入公式 (6.2) 得到

$$\mathrm{d}u = f_1'\,\mathrm{d}x + f_2'\Big(\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y\Big) = \Big(f_1' + \frac{1}{y} f_2'\Big)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2} f_2'\,\mathrm{d}y,$$

然后再用关于 ξ, η 的一阶和二阶微分代入公式 (6.3), 就可整理得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 u &= f_{11}''\,\mathrm{d}x^2 + 2f_{12}''\,\mathrm{d}x\Big(\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y\Big) + f_{22}''\Big(\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y\Big)^2 \\
&\qquad + f_2'\Big(-\frac{2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}y^2\Big) \\
&= \Big(f_{11}'' + \frac{2}{y} f_{12}'' + \frac{1}{y^2} f_{22}''\Big)\,\mathrm{d}x^2 + 2\Big(-\frac{x}{y^2} f_{12}'' - \frac{x}{y^3} f_{22}'' - \frac{1}{y^2} f_2'\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\qquad + \Big(\frac{x^2}{y^4} f_{22}'' + \frac{2x}{y^3} f_2'\Big)\,\mathrm{d}y^2,
\end{aligned}$$

由所得的 $\mathrm{d}u$ 和 d^2u 即可得出与解 1 相同的全部答案. $\square$

[①] 若 ξ 和 η 是自变量的线性函数, 则也有 $\mathrm{d}^2\xi = \mathrm{d}^2\eta = 0$.

[②] 为了不发生混淆, 以下分别用记号 f_1' 和 f_2' 表示 f 对其第一个变量和第二个变量的一阶偏导数, 并将这种记法延伸到二阶和更高阶的偏导数.

6.2.4 微分表达式的计算和应用 (习题 3280–3282, 3305–3320)

习题 3281(b) 设

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

对于 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ 求 Δu.

解 利用 §6.2.2 的习题 3238 的答案, 就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

可见有 $\Delta(\ln\sqrt{x^2+y^2}) = 0$. □

注 称本题的 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维拉普拉斯算子, 又称 $\Delta u = 0$ 为拉普拉斯方程. 它是一个重要的二阶偏微分方程. 称拉普拉斯方程的解为调和函数. 如本题所示, $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ 就是去心平面 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上的二维调和函数.

习题 3282(b) 设

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

对于 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$.

解 记 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 利用 §6.2.2 的习题 3225 的答案, 就有

$$\Delta_1 u = \left(\frac{-x}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{-y}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{-z}{r^3}\right)^2 = \frac{1}{r^4},$$

$$\Delta_2 u = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right) = 0. \quad \square$$

注 与习题 3281(b) 的注类似, 称本题的 Δ_2 为三维拉普拉斯算子, $\Delta_2 u = 0$ 为拉普拉斯方程, $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为去心三维空间 $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ 上的三维调和函数.

习题 3305–3306 提供了今后经常有用的两个工具. 由于它们的证明都不难, 以下只解出前一题, 请读者完成后一题.

习题 3305 设 $u = f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 而 f 为二阶可微的函数. 证明:

$$\Delta u = F(r),$$

其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, Δ 为拉普拉斯算子, 并求函数 F.

解 先计算 r 关于 x 的一阶和二阶偏导数, 得到

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3},$$

然后计算 $u = f(r)$ 关于 x 的一阶和二阶偏导数, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right).$$

利用对称性即可得到 $u=f(r)$ 关于 y 和 z 的二阶偏导数, 从而求出

$$\Delta u = f''(r)\Big(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\Big)+f'(r)\Big(\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\Big)=f''(r)+\frac{2f'(r)}{r},$$

可见 Δu 确实是 r 的函数. 将它记为 $F(r)$, 则得到 $F(r)=f''(r)+\dfrac{2f'(r)}{r}$. □

注 若取 $f(r)=\dfrac{1}{r}$, 则 $f'(r)=-\dfrac{1}{r^2}$, $f''(r)=\dfrac{2}{r^3}$, 于是即可得到 $F(r)=0$. 这就是习题 3282(b) 的后半题.

习题 3306 设 u 和 v 为二阶可微函数, Δ 为拉普拉斯算子, 证明

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

其中

$$\Delta(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}.$$

注 若引入梯度向量 $\operatorname{grad} u=\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big)$ 的场论记号 ∇u[①], 则有 $\Delta(u,v)=\nabla u\cdot\nabla v$, 即向量 ∇u 和 ∇v 的标量积 (也称为数量积、内积、点积).

习题 3307 证明: 函数

$$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

(a 和 b 为常数) 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0..$$

注 这是习题 3281(b) 的推广, 计算是类似的.

习题 3308 证明: 若函数 $u=u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程, 则函数

$$v=u\Big(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\Big)$$

也满足此方程.

解 记中间变量为 $\xi=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\eta=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, 则可先计算 ξ,η 的一阶和二阶偏导数如下 (过程从略):

$$\xi'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \xi'_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\xi''_{xx}=\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3},\qquad \xi''_{xy}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3},\qquad \xi''_{yy}=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3};$$

$$\eta'_x=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \eta'_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\eta''_{xx}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3},\qquad \eta''_{xy}=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},\qquad \eta''_{yy}=\frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}.$$

然后即可计算得到

① 见后面的 §6.2.6 或第八章的 §8.17.1.

$$v'_x = u'_1\xi'_x + u'_2\eta'_x,\quad v'_y = u'_1\xi'_y + u'_2\eta'_y,$$
$$v''_{xx} = u''_{11}(\xi'_x)^2 + 2u''_{12}\xi'_x\eta'_x + u''_{22}(\eta'_x)^2 + u'_1\xi''_{xx} + u'_2\eta''_{xx},$$
$$v''_{yy} = u''_{11}(\xi'_y)^2 + 2u''_{12}\xi'_y\eta'_y + u''_{22}(\eta'_y)^2 + u'_1\xi''_{yy} + u'_2\eta''_{yy}.$$

利用 $\xi'_x = -\eta'_y$, $\xi'_y = \eta'_x$, 即有 $(\xi'_x)^2 + (\xi'_y)^2 = (\eta'_x)^2 + (\eta'_y)^2$, $\xi'_x\eta'_x = -\xi'_y\eta'_y$, 且有 $\Delta\xi = 0$, $\Delta\eta = 0$, 因此将上面的最后两式相加, 并利用 $\Delta u = 0$, 就可得到

$$\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = (u''_{11} + u''_{22})\cdot[(\xi'_x)^2 + (\xi'_y)^2] = 0.\quad\square$$

注　回顾以上的求解过程, 可以发现在得到 $\xi'_x = -\eta'_y$, $\xi'_y = \eta'_x$ 之后就可由此推出

$$\xi''_{xx} = (\xi'_x)'_x = -(\eta'_y)'_x = -(\eta'_x)'_y = -(\xi'_y)'_y = -\xi''_{yy},$$
$$\eta''_{xx} = (\eta'_x)'_x = (\xi'_y)'_x = (\xi'_x)'^y = -(\eta'_y)'_y = -\eta''_{yy},$$

即有 $\Delta\xi = \Delta\eta = 0$, 因此前面对于 ξ 和 η 的二阶偏导数计算是不必要的. 这样就可导致更为一般的结论, 即 §6.4 的习题 3502, 而本题即是其特例.

习题 3309 证明: 函数 $u = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ (a 和 b 为常数) 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

注　只要直接计算即可, 从略. 这里要指出, 本题给出的虽然只是热传导方程的一个特解, 但从后面 §7.3.3 的习题 3840 题可知, 这个特解在初值问题 (一般称为柯西问题) 的解的表达式中起了关键作用, 因此本题的这个特解被称为基本解.

习题 3311 证明: 函数

$$u = \frac{1}{r}\quad (式中\ r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\,)$$

当 $r \neq 0$ 时满足拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

注　见习题 3305 的注, 本题只是该题的特例, 且与习题 3282(b) 几乎重复.

习题 3312 证明: 若函数 $u = u(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程, 则函数

$$v = \frac{1}{r}u\Big(\frac{k^2x}{r^2}, \frac{k^2y}{r^2}, \frac{k^2z}{r^2}\Big)$$

(式中 k 为常数, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 也满足该方程.

解　为简明起见, 下面将使用梯度向量 ∇u 的长度 $\|\nabla u\|$ 和标量积 $\nabla u\cdot\nabla v$ 等记号. 由于常数 k^2 在本题的证明中不起作用, 以下取 $k = 1$.

记中间变量 $\xi = \frac{x}{r^2}$, $\eta = \frac{y}{r^2}$, $\zeta = \frac{z}{r^2}$. 从 $vr = u$ 出发, 应用习题 3306 的公式, 则得到

$$\Delta(rv) = r\Delta v + v\Delta r + 2\Delta(r,v). \tag{6.4}$$

可见为了证明 $\Delta v = 0$, 只要分别计算 (6.4) 式中的其他各项即可.

以下分几步来做.

(1) 由 r 的定义即可计算得到 $\Delta r = \dfrac{2}{r}$ (参见习题 3305), $v\Delta r = \dfrac{2u}{r^2}$.

(2) 由于 $\Delta(r,v) = \nabla r\cdot\nabla v$ (两个梯度向量的标量积), 先分别计算出

$$\nabla r = \left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right),$$

$$v'_x = -\frac{x}{r^3}u + \frac{1}{r}u_1\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2x^2}{r^4}\right) + \frac{1}{r}u_2\left(-\frac{2xy}{r^4}\right) + \frac{1}{r}u_3\left(-\frac{2zx}{r^4}\right),$$

$$v'_y = -\frac{y}{r^3}u + \frac{1}{r}u_1\left(-\frac{2xy}{r^4}\right) + \frac{1}{r}u_2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2y^2}{r^4}\right) + \frac{1}{r}u_3\left(-\frac{2yz}{r^4}\right),$$

$$v'_z = -\frac{z}{r^3}u + \frac{1}{r}u_1\left(-\frac{2zx}{r^4}\right) + \frac{1}{r}u_2\left(-\frac{2yz}{r^4}\right) + \frac{1}{r}u_3\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2z^2}{r^4}\right),$$

即可计算得到

$$v\Delta r + 2\Delta(r,v) = \frac{2u}{r^2} + 2\nabla r\cdot\nabla v = -\frac{2}{r^4}(xu_1+yu_2+zu_3).$$

(3) 最后一步是计算 $\Delta(rv)$. 从 $rv = u(\xi(x,y),\eta(x,y),\zeta(x,y))$ 即可得到

$$(rv)'_x = u'_1\xi'_x + u'_2\eta'_x + u'_3\zeta'_x,$$

$$(rv)''_{xx} = u''_{11}(\xi'_x)^2 + u''_{22}(\eta'_x)^2 + u''_{33}(\zeta'_x)^2 + 2u''_{12}\xi'_x\eta'_x + 2u''_{23}\eta'_x\zeta'_x + 2u''_{31}\zeta'_x\xi'_x + u_1\xi''_{xx} + u_2\eta''_{xx} + u_3\zeta''_{xx},$$

于是利用对称性即可得到

$$\begin{aligned}\Delta(rv) &= (rv)''_{xx} + (rv)''_{yy} + (rv)''_{zz}\\ &= u''_{11}\|\nabla\xi\|^2 + u''_{22}\|\nabla\eta\|^2 + u''_{33}\|\nabla\zeta\|^2 + 2u''_{12}\nabla\xi\cdot\nabla\eta + 2u''_{23}\nabla\eta\cdot\nabla\zeta\\ &\quad + 2u''_{31}\nabla\zeta\cdot\nabla\xi + u'_1\Delta\xi + u'_2\Delta\eta + u'_3\Delta\zeta.\end{aligned}$$

最后计算中间变量 ξ,η,ζ 的一阶和二阶偏导数 (这里可以参考习题 3308 的解 1 中已经列出的结果).

从 $\xi = \dfrac{x}{r^2}$ 并利用对称性即可得到所有的一阶偏导数:

$$\xi'_x = \frac{1}{r^2}-\frac{2x^2}{r^4},\quad \xi'_y = -\frac{2xy}{r^4},\quad \xi'_z = -\frac{2zx}{r^4},$$

$$\eta'_x = -\frac{2xy}{r^4},\quad \eta'_y = \frac{1}{r^2}-\frac{2y^2}{r^4},\quad \eta'_z = -\frac{2yz}{r^4},$$

$$\zeta'_x = -\frac{2zx}{r^4},\quad \zeta'_y = -\frac{2yz}{r^4},\quad \zeta'_z = \frac{1}{r^2}-\frac{2z^2}{r^4}.$$

然后即可得到

$$\|\nabla\xi\|^2 = \|\nabla\eta\|^2 = \|\nabla\zeta\|^2 = \frac{1}{r^4},$$

$$\nabla\xi\cdot\nabla\eta = \nabla\eta\cdot\nabla\zeta = \nabla\zeta\cdot\nabla\xi = 0.$$

再计算二阶偏导数, 先有

$$\xi''_{xx} = -\frac{6x}{r^4}+\frac{8x^3}{r^6},\quad \xi''_{yy} = -\frac{2x}{r^4}+\frac{8xy^2}{r^6},\quad \xi''_{zz} = -\frac{2x}{r^4}+\frac{8z^2x}{r^6},$$

于是即可得到 $\Delta\xi = -\dfrac{2x}{r^4}$. 又由对称性即可得到

$$\Delta\eta = -\frac{2y}{r^4}, \quad \Delta\zeta = -\frac{2z}{r^4}.$$

将所有这些结果代入 $\Delta(rv)$ 的上述公式中, 就可得到

$$\Delta(rv) = \frac{1}{r^4}(u''_{11} + u''_{22} + u''_{33}) - \frac{2}{r^4}(xu'_1 + yu'_2 + zu'_3).$$

利用 $\Delta u(x,y,z) = 0$, 就得到

$$\Delta(rv) = -\frac{2}{r^4}(xu'_1 + yu'_2 + zu'_3) = v\Delta r + 2\Delta(r,v).$$

综合以上结果就可以知道在等式 (6.4) 中只能是 $\Delta v = 0$. □

习题 3313 证明: 函数

$$u = \frac{C_1\mathrm{e}^{-ar} + C_2\mathrm{e}^{ar}}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, C_1, C_2 为常数) 满足亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

解 1 由于方程为线性, 因此只要分别对于 u 等于 $\frac{\mathrm{e}^{-ar}}{r}$ 和 $\frac{\mathrm{e}^{ar}}{r}$ 作出证明即可. 又由于方程右边的系数 $a^2 = (-a)^2$, 因此只要对其中之一作出证明也已足够.

设 $f(r) = \frac{\mathrm{e}^{ar}}{r}$, 用习题 3305 的答案, 于是就有

$$f'(r) = \frac{a\mathrm{e}^{ar}}{r} - \frac{\mathrm{e}^{ar}}{r^2}, \quad f''(r) = \frac{a^2\mathrm{e}^{ar}}{r} - \frac{2a\mathrm{e}^{ar}}{r^2} + \frac{2\mathrm{e}^{ar}}{r^3},$$

然后就可得到所要求的结果:

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{e}^{ar}}{r}\right) = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r} = a^2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{ar}}{r}. \quad \square$$

解 2 如解 1 所示只考虑 e^{ar}/r. 利用习题 3306 提供的公式, 则有

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{e}^{ar}}{r}\right) = \mathrm{e}^{ar}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\Delta(\mathrm{e}^{ar}) + 2\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\nabla(\mathrm{e}^{ar}).$$

由习题 3282(b) (或习题 3311) 知上式右边第一项为 0. 从

$$(\mathrm{e}^{ar})'_x = a\mathrm{e}^{ar}\cdot\frac{x}{r}, \quad \left(\frac{1}{r}\right)'_x = -\frac{x}{r^3},$$

$$(\mathrm{e}^{ar})''_{xx} = a^2\mathrm{e}^{ar}\cdot\frac{x^2}{r^2} + a\mathrm{e}^{ar}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right),$$

并利用对称性, 即可得到

$$\Delta(\mathrm{e}^{ar}) = a^2\mathrm{e}^{ar} + a\mathrm{e}^{ar}\cdot\frac{2}{r}, \quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\nabla(\mathrm{e}^{ar}) = -\frac{1}{r^2}\cdot a\mathrm{e}^{ar}.$$

将它们代入前面的公式即可得到

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{e}^{ar}}{r}\right) = a^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{ar}}{r}. \quad \square$$

习题 3314 设函数 $u_1 = u_1(x,y,z)$ 及 $u_2 = u_2(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$. 证明: 函数

$$v = u_1(x,y,z) + (x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$$

满足双调和方程

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

提示 可多次使用习题 3306 提供的公式以减轻计算量. □

习题 3315 设 $f(x,y,z)$ 是 m 阶可微的 n 次齐次函数. 证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

提示 $m=1$ 即欧拉公式 (见 §6.2.1 的习题 3232 前的说明), $m=2$ 即习题 3234. 可试用证明欧拉公式的方法. □

习题 3320 设

$$x^2=vw,\quad y^2=wu,\quad z^2=uv,$$
$$f(x,y,z)=F(u,v,w),$$

证明:

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w.$$

解 若设 x,y,z 为自变量, u,v,w 为中间变量, 则就有

$$f'_x=F'_uu'_x+F'_vv'_x+F'_ww'_x,$$
$$f'_y=F'_uu'_y+F'_vv'_y+F'_ww'_y,$$
$$f'_z=F'_uu'_z+F'_vv'_z+F'_ww'_z.$$

于是得到

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=F'_u(xu'_x+yu'_y+zu'_z)+F'_v(xv'_x+yv'_y+zv'_z)$$
$$+F'_w(xw'_x+yw'_y+zw'_z).$$

由题设的变量代换方程可以解出

$$u=\pm\frac{yz}{x},\quad v=\pm\frac{zx}{y},\quad w=\pm\frac{xy}{z},$$

其中不论取正号还是负号, u,v,w 都是 x,y,z 的次数为 1 的齐次函数, 从而根据欧拉公式就有

$$xu'_x+yu'_y+zu'_z=u,\quad xv'_x+yv'_y+zv'_z=v,\quad xw'_x+yw'_y+zw'_z=w.$$

将它们代入前面的等式就得到

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w.\quad \square$$

6.2.5 一些简单的偏微分方程计算 (习题 3321–3340, 3353–3360)

本小节有三种类型的习题:

(1) 习题 3321–3330 是给定带有任意函数的表达式, 验证它们满足某个偏微分方程;

(2) 习题 3331–3340 是给定带有任意函数的表达式, 要求出它们满足的偏微分方程;

(3) 习题 3353–3360 是解一些简单的偏微分方程.

常微分方程的一般解含有任意常数①, 而偏微分方程的一般解含有任意 (可微) 函数. 由以下可见, 一阶方程一般含有一个任意函数, 二阶方程一般含有两个任意函数.

① 例如可参见 §1.10.2 和本书前面的 §4.10 中的许多例子.

习题 3321 验证 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 若 $z=\varphi(x^2+y^2)$, 其中设 φ 为足够多次可微的函数.

解 求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)\cdot 2x,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)\cdot 2y,$$

代入方程左边即可见其成立. □

习题 3326 (弦振动方程) 验证 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 若 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$, 其中设 φ,ψ 为足够多次可微的函数,

解 计算

$$u_t'=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at),$$
$$u_{tt}''=a^2\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at),$$
$$u_x'=\varphi'(x-at)+\psi'(x-at),$$
$$u_{xx}''=\varphi''(x-at)+\psi''(x-at),$$

代入方程即可见其成立. □

习题 3328 验证 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 若 $u=\varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)+x\psi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, 其中设 φ,ψ 为足够多次可微的函数.

解 由于所给的方程左边为

$$\Big(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2u=\Big(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)+\Big(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2\Big[x\psi\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big],$$

而其中 $\varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ 为 0 次齐次函数, $x\psi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ 为 1 次齐次函数, 因此只要利用 §6.2.1 的习题 3234, 即对 n 次齐次函数 v 有

$$\Big(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2v=n(n-1)v,$$

于是当 $n=0,1$ 时右边均为 0. □

习题 3333 用逐次微分的方法消去 $z=\varphi\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ 中的任意函数 φ.

解 求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

可见有 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$. □

习题 3337 用逐次微分的方法消去 $z=\varphi(x)\psi(y)$ 中的任意函数 φ 和 ψ.

解 计算偏导数得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x)\psi(y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(x)\psi'(y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'(x)\psi'(y),$$

可见有

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.\quad \square$$

习题 3340 用逐次微分的方法消去 $z=\varphi(xy)+\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 中的任意函数 φ 和 ψ.

解 计算偏导数得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\varphi'(xy)+\frac{1}{y}\psi'\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\varphi'(xy)-\frac{x}{y^2}\psi'\left(\frac{x}{y}\right).$$

采用下列组合可先消去一个任意函数:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y}\psi'\left(\frac{x}{y}\right).$$

然后注意到上式右边是 0 次齐次函数, 根据欧拉公式 (参见 §6.2.1 的习题 3232), 用算子 $x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$ 作用后就等于 0, 这样就可以消去第二个任意函数而得到

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

将上式左边计算出来并加以整理就得到

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.\quad \square$$

习题 3353 设函数 $u=u(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

以及下列条件:

$$u(x,2x)=x,\quad u'_x(x,2x)=x^2.$$

求 $u''_{xx}(x,2x),u''_{xy}(x,2x),u''_{yy}(x,2x)$.

解 1 从习题 3326 得到启发, 即 $u(x,y)$ 可能是以 $\xi=x+y$ 为变量的函数与以 $\eta=x-y$ 为变量的函数之和. 由此作代换 $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, 则有 $\xi'_x=1,\xi'_y=1$, $\eta'_x=1,\eta'_y=-1$, 于是从复合函数求偏导的链式法则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

代入原方程中即可得到以 ξ,η 为自变量的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

由此即可解出

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x+y) + \psi(x-y),$$

其中 φ 和 ψ 是二阶可微的任意函数.

从题设条件得到等式

$$\varphi(3x) + \psi(-x) = x, \quad \varphi'(3x) + \psi'(-x) = x^2.$$

而要求的则是

$$u''_{xx}(x,2x) = u''_{yy}(x,2x) = \varphi''(3x) + \psi''(-x), \quad u''_{xy}(x,2x) = \varphi''(3x) - \psi''(-x).$$

将题设条件所得到的前述两个等式分别对 x 求导后可以得到

$$9\varphi''(3x) + \psi''(-x) = 0, \quad 3\varphi''(3x) - \psi''(-x) = 2x,$$

从而可解得 $\varphi''(3x) = \dfrac{x}{6}$ 和 $\psi''(-x) = -\dfrac{3}{2}x$. 将它们代入前面的 $u''_{xx}(x,2x)$ 等的表达式中, 就求出答案为

$$u''_{xx}(x,2x) = u''_{yy}(x,2x) = -\frac{4}{3}x, \quad u''_{xy}(x,2x) = \frac{5}{3}x. \quad \square$$

解 2 不求出 $u(x,y)$ 也可以计算所要的偏导数. 将题设的第一个条件对 x 求导, 就得到

$$u'_x(x,2x) + 2u'_y(x,2x) = 1,$$

联合第二个条件 $u'_x(x,2x) = x^2$, 即可得到 $u'_y(x,2x) = \dfrac{1}{2}(1-x^2)$.

然后将这个等式与第二个条件分别对 x 求导, 就有

$$u''_{xy}(x,2x) + 2u''_{yy}(x,2x) = -x, \quad u''_{xx}(x,2x) + 2u''_{xy}(x,2x) = 2x.$$

再联合 u 满足的方程就可得到

$$u''_{xx}(x,2x) - u''_{yy}(x,2x) = 0.$$

最后可从以上关于三个未知量的三个线性方程解出

$$u''_{xx}(x,2x) = u''_{yy}(x,2x) = -\frac{4}{3}x, \quad u''_{xy}(x,2x) = \frac{5}{3}x. \quad \square$$

6.2.6 方向导数与梯度向量 (习题 3341–3352)

以二元可微函数 $z = f(x,y)$ 为例, 如前所述在点 $P(x_0,y_0)$ 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 只是描述了函数值 z 在 Ox 轴和 Oy 轴两个方向上的变化率. 在点 $P(x_0,y_0)$ 的方向导数概念则是 z 沿着任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率, 因此要一般得多.

只是要注意: 在计算方向导数时, 考虑的是从点 $P(x_0,y_0)$ 沿着方向 $\boldsymbol{l}$ 出发的射线, 因此方向 $\boldsymbol{l}$ 和 $-\boldsymbol{l}$ 是两个不同的方向, 它们的方向导数可能不同.

与方向导数密切有关的是梯度的概念. 仍以二元函数 $z = f(x,y)$ 为例, 称向量

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

为函数 f 的梯度 (向量). 梯度也可记为 ∇f, 其中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

是场论中常用的微分算子 (见后面的 §8.17.1).

在对于梯度向量的基本性质的以下介绍中, 均假设梯度向量不是零向量.

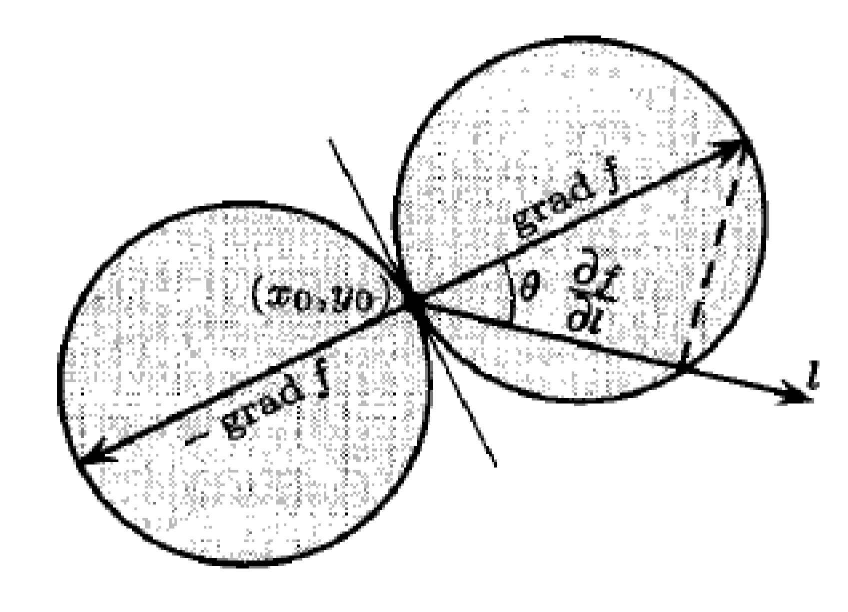
联系方向导数和梯度向量的公式是

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{l} = \|\operatorname{grad} f\| \cdot \cos\theta,$$

其中 $\boldsymbol{l}$ 为单位方向向量, θ 是 $\boldsymbol{l}$ 与 $\operatorname{grad} f$ 的夹角.

如右图所示, 若在每一个方向 $\boldsymbol{l}$ 上取长度等于方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 的向量, 则向量的终点形成两个圆.

由此可见, 当 $\theta = 0$ 时的方向导数达到最大. 这个最大值就是梯度向量的模长 $\|\operatorname{grad} f\|$.



方向导数与梯度向量的示意图

于是梯度方向 $\operatorname{grad} f$ 就是函数值递增最快的方向, 而其反方向 $-\operatorname{grad} f$ 就是函数值递减最快的方向, 模 $\|\operatorname{grad} f\|$ 和 $-\|\operatorname{grad} f\|$ 就是最大和最小的方向导数值.

梯度向量的另一个重要性质是它与 §6.2.1 的等值线 (或等值面) 的关系. 为此只要计算 $f(x, y) = c$ 的微分, 即可得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0.$$

由于 $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ 是等值线的切方向, 因此梯度向量就与等值线垂直.

以上所说的内容对一般的多元函数也都成立, 其中同样假设 $\operatorname{grad} f$ 不是零向量.

注 在学习了隐函数存在定理后可以知道, 在某个点处的梯度不是零向量的条件保证了函数在该点的邻域内存在可微的等值线 (或等值面). 在这个前提下对于等值线方程 (或等值面方程) $f = c$ 求微分才是有意义的, 并从而可导出梯度向量与等值线 (或等值面) 垂直的结论.

习题 3342 求函数

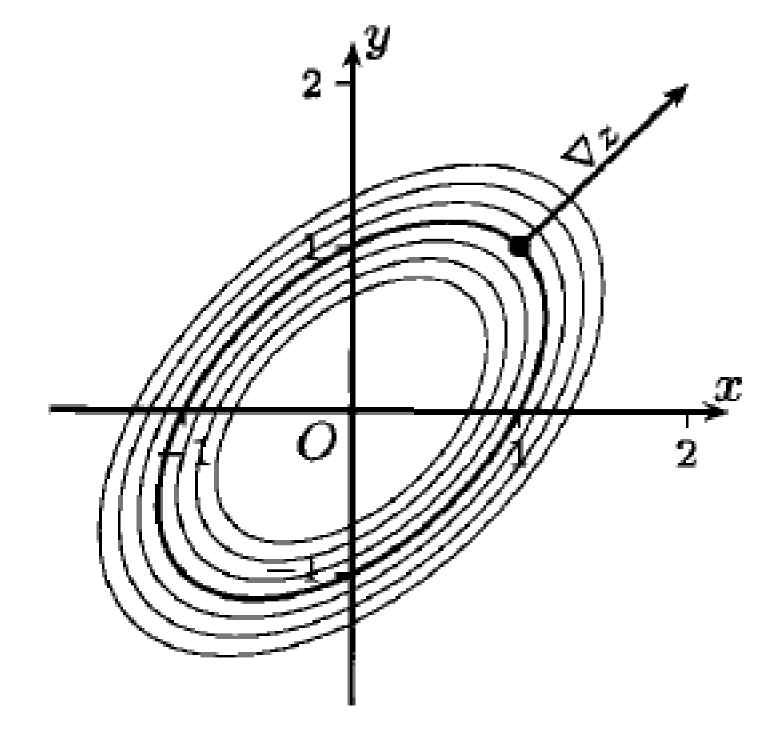
$$z = x^2 - xy + y^2$$

在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 的导数. 在怎样的方向上此导数: (a) 有最大值; (b) 有最小值; (c) 等于 0.

解 求出点 $M(1,1)$ 处的 $\nabla z = (1,1)$, 然后就有

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

在附图中作出了以点 $M(1,1)$ 为起点的梯度向量 $\nabla z = (1,1)$ 和函数 z 的若干条等值线 (均为椭圆).



习题 3342 的附图

由此可见, 方向导数的最大值为 $\sqrt{2}$, 这时取 $\alpha = \pi/4$; 最小值为 $-\sqrt{2}$, 这时取 $\alpha = 5\pi/4$; 而当 $\alpha = 3\pi/4$ 和 $7\pi/4$ 时, 方向导数为 0. □

习题 3346 求函数 $u = \dfrac{1}{r}$ (式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度的大小和方向.

解 直接计算即可得到

$$\operatorname{grad} u = \Big(-\frac{x_0}{r_0^3}, -\frac{y_0}{r_0^3}, -\frac{z_0}{r_0^3}\Big),$$

其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, 且有 $\|\operatorname{grad} u\| = \dfrac{1}{r_0^2}$. 可看出, 梯度向量指向原点, 也就是处处与等值面 (以原点为球心的球面) 正交. □

习题 3348 函数 $u = x + y + z$ 和

$$v = x + y + z + 0.001 \sin\big(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\big)$$

在点 $M(1, 2, 2)$ 的梯度的大小相差多少?

提示 本题的计算没有困难, 重要的是理解其意义. 为此可参看 §2.3 的习题 1059 及其附图. □

习题 3349 证明: 函数

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

和

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

$(a, b, c, m, n, p$ 为常数且 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零.

解 为简明起见将点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 改记为不带下标的 $M(x, y, z)$.

先计算得到

$$\nabla u = (2ax, 2by, 2cz), \quad \nabla v = (2(ax + m), 2(by + n), 2(cz + p)).$$

根据余弦定理, 两个梯度向量之间的角度 θ 满足以下关系:

$$\cos\theta = \frac{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 - \|\boldsymbol{d}\|^2}{2\|\nabla u\| \cdot \|\nabla v\|},$$

其中 $\boldsymbol{d} = (2m, 2n, 2p) = \nabla v - \nabla u$ 是常向量.

于是只要证明当 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to +\infty$ 时 $\cos\theta \to 1$ 即可.

然而容易构造例子, 使得当 $r \to +\infty$ 时 $\cos\theta$ 为常值. 例如取 $a = b = 1, c = 0$ 并取点 $M(0, 0, z)$ 时就是如此. 这表明原题中假设的条件是不够的.

以下将补充要求 a, b, c 均不为 0. 这时由于 $\|\nabla u\| = 2\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}$, 从

$$2\min\{|a|, |b|, |c|\}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant \|\nabla u\| \leqslant 2\max\{|a|, |b|, |c|\}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

可见有

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to +\infty \Longleftrightarrow \|\nabla u\| \to +\infty.$$

利用三维空间的三角形不等式, 从 $\nabla v = \nabla u + \boldsymbol{d}$ 就有

$$\|\nabla u\| - \|\boldsymbol{d}\| \leqslant \|\nabla v\| \leqslant \|\nabla u\| + \|\boldsymbol{d}\|,$$

因此有 $\|\nabla u\| \to +\infty \Longleftrightarrow \|\nabla v\| \to +\infty$, 且有

$$\|\nabla u\| \sim \|\nabla v\| \ (r \to +\infty),$$

从而就有

$$\lim_{r\to+\infty}\cos\theta=\lim_{r\to+\infty}\frac{\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2-\|\boldsymbol{d}\|^2}{2\|\nabla u\|\cdot\|\nabla v\|}=1.\quad\square$$

习题 3350 设 $u=f(x,y,z)$ 为二阶可微函数. 若 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)$.

解 引入二阶偏导数组成的黑塞矩阵

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{pmatrix},$$

则就可从方向导数公式

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

直接计算得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=l^T H l,$$

其中 $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)^T$ 为列向量, 上标 T 是向量和矩阵的转置记号. $\square$

习题 3351 设 $u=f(x,y,z)$ 为二阶可微函数,

$$l_1(\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1),l_2(\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2),l_3(\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3),$$

为三个互相垂直的方向. 证明:

(a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解 (a) 利用 $\dfrac{\partial u}{\partial l_i}=l_i^T\nabla u\ (i=1,2,3)$, 其中设 $l_i\ (i=1,2,3)$ 和梯度 ∇u 均为列向量, 然后引入矩阵

$$U=\begin{pmatrix}l_1^T\\ l_2^T\\ l_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{pmatrix},$$

则从方向余弦的定义有 $UU^T=I$, 其中 I 为单位矩阵. 又由线性代数知识可见同时也成立 $U^TU=I$①.

由方向导数公式就有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1},\frac{\partial u}{\partial l_2},\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)=\nabla u^T U^T,$$

从而就得到所求的等式:

① 任何两个 n 阶方阵 A,B, 若有 $AB=I$, 则也一定有 $BA=I$.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\nabla u^TU^TU\nabla u=\|\nabla u\|^2.$$

(b) 利用习题 3350 引入的黑塞矩阵, 则就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\mathrm{tr}H,$$

右边是矩阵 H 的迹 (trace), 即其对角线元之和.

这时利用习题 3350 的结果就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=l_1^THl_1+l_2^THl_2+l_3^THl_3=\mathrm{tr}(UHU^T).$$

利用 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ 即可得到所要的等式:

$$\mathrm{tr}(UHU^T)=\mathrm{tr}(HU^TU)=\mathrm{tr}H.\quad\square$$

注 本题的结论 (a) 和 (b) 表明: 梯度的模和拉普拉斯算子 Δ 的作用在直角坐标系的旋转变换下都是不变的.

习题 3352 设函数 $u=u(x,y)$ 为可微函数, 且当 $y=x^2$ 时有

$$u(x,y)=1,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=x,$$

求当 $y=x^2$ 时的 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 根据题意 $y=x^2$ 是 $u(x,y)=1$ 的等值线 (或其一部分), 因此即可确定该等值线上的点的梯度方向. 既然该方向的一个分量 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x$ 已经给定, 因此也就可以求出另一个分量 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

将等式 $u(x,x^2)\equiv 1$ 对 x 求导就有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

用 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x$ 代入, 在 $x\neq 0$ 时就得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}.\quad\square$$

注 若将此题改为 $u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x$, 且有 $u(x,x^2)=1$, 则可将此方程积分得到

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\varphi(y).$$

由条件 $u(x,x^2)=1$ 可确定 $\varphi(x^2)=1-\dfrac{x^2}{2}$. 于是就有 $\varphi(y)=1-\dfrac{y}{2}$, 从而得到

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x^2+1-\frac{y}{2},$$

因此可得到相同的答案 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}$.

§6.3 隐函数的微分法 (习题 3361–3430)

内容简介　本节讨论从方程和方程组确定隐函数和隐函数组的存在性问题, 学习如何计算它们的导数和微分.

6.3.1 隐函数的存在问题 (习题 3361–3370)

习题 3362 设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a,b) 内. 在怎样的情况下, 方程

$$f(x)y=0$$

在 $a<x<b$ 上有唯一连续的解 $y=0$?

解　假设于区间 (a,b) 上存在异于 $y\equiv 0$ 的连续解 $y_1(x)$, 则至少于某个点 $x_0\in(a,b)$ 处有 $y_1(x_0)\neq 0$. 然而由于 $y_1(x)$ 连续, 因此一定存在点 x_0 的一个邻域 $U_\delta(x_0)$ $(\delta>0)$, 使得在这个邻域内 $y_1(x)\neq 0$. 这时从方程 $f(x)y=0$ 可见, 函数 $f(x)$ 在这个邻域上只能是处处等于 0. 由此可知, 当 $f(x)$ 在 (a,b) 上的零点不能充满任何一个子区间时, 方程 $f(x)y=0$ 在 (a,b) 上只有唯一的连续解 $y=0$. □

注　所给出的条件也是必要的. 若 $f(x)$ 于某个子区间 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ 上恒等于 0, 则可以构造一个连续函数 $y_1(x)$, 它在 (a,α) 和 (β,b) 上恒等于 0, 而在 $[\alpha,\beta]$ 上不恒等于 0, 从而在区间 (a,b) 上满足方程 $f(x)y=0$.

习题 3365 已知方程

$$x^2=y^2, \tag{1}$$

设

$$y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty), \tag{2}$$

是满足方程 (1) 的单值函数.

习题 3365 的附图

1) 有多少单值函数 (2) 满足方程 (1)?

2) 有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

3) 有多少单值可微函数 (2) 满足方程 (1)?

4) 设: (a) $y(1)=1$; (b) $y(0)=0$, 则有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

5) 设 $y(1)=1$, 且 δ 为充分小的正数, 则有多少单值连续函数 $y=y(x)$ $(1-\delta<x<1+\delta)$ 满足方程 (1)?

解　可以如附图所示先作出方程 (1) 的图像, 然后如下回答提出的问题. 此时要注意: 本题在 1)–4) 中的隐函数 $y=y(x)$ 的定义域都要求是 $(-\infty,+\infty)$.

1) 由于当 $x\neq 0$ 时每一个 x 对应于两个 y 值 $\pm x$, 而这里除了单值性之外对 $y(x)$ 并无其他要求, 从而满足方程 (1) 的单值函数 $y=y(x)$ 有无穷多个. (在 §1.8.1 的习题 763 中的例子就是满足方程 $x^2=y^2$ 的一个处处不连续的单值函数.)

2) 只有四个单值连续函数, 即 $y=x$, $y=-x$, $y=|x|$, $y=-|x|$ 满足方程 (1).

这个答案与 1) 差别很大, 其中连续性要求起了关键作用.

例如, 设满足 (1) 的某个连续函数 $y(x)$ 在点 $x_0>0$ 时大于 0, 则从方程只能有 $y(x_0)=x_0$. 这时在 $x>0$ 时不可能有 $y(x)\leqslant 0$, 否则从连续函数的零点存在定理就会存在某个点 $\xi>0$, 使得 $y(\xi)=0$. 然而点 $(\xi,0)$ 不能满足方程 (1). 这样就推出, 在 $x>0$ 时 $y(x)$ 只能处处大于 0, 从而 $y(x)=x$.

同样可以证明, 若 $x>0$ 时满足 (1) 的 $y(x)$ 于某个点处为负, 则只能在 $x>0$ 时处处为负, 且 $y(x)=-x$.

对于 $x<0$ 可作同样讨论, 从而最后只能得到上述四个解.

3) 由于可微必定连续, 因此只要从 2) 的四个解中挑出处处可微的两个解即可, 这就是 $y=x$ 和 $y=-x$.

4) 这也只要到 2) 的四个解中去找. 对于 (a), 满足 $y(1)=1$ 的只有两个连续解, 即 $y=x$ 和 $y=|x|$; 对于 (b), 则四个解都满足要求 $y(0)=0$.

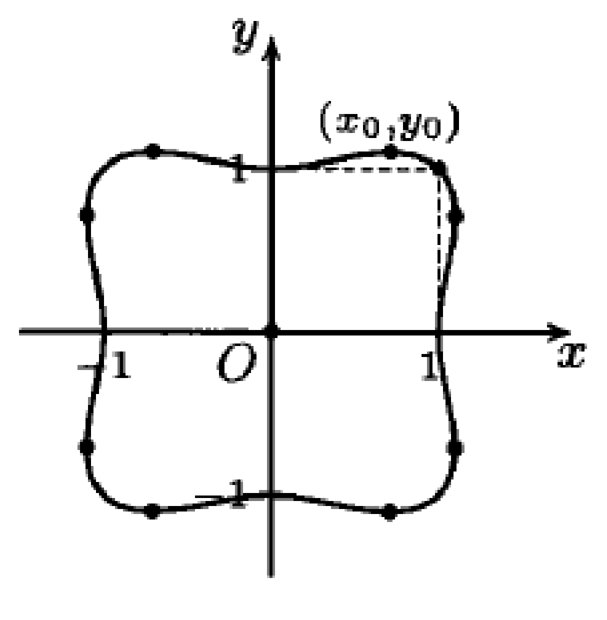
5) 由于 4) 的满足条件 (a) 的两个解在 $[0,+\infty)$ 上相同, 因此在 $\delta>0$ 充分小时 (其实只需要 $\delta\leqslant 1$), 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 上只有 $y=x$ 这一个解. □

注 由隐函数存在定理判定存在的隐函数的定义域一般都是局部的, 因此对本题而言, 只能用于解决问题 5). 这时对于 $x_0=y_0=1$, 将方程改写为 $F(x,y)=x^2-y^2=0$, 则 $F'_y(1,1)=-2\neq 0$, 因此知道存在充分小的 $\delta>0$, 使得在 $(1-\delta,1+\delta)$ 上满足方程 (1) 的隐函数存在唯一.

习题 3366 方程

$$x^2+y^2=x^4+y^4$$

定义出多值函数 $y(x)$. 函数在怎样的范围内: 1) 为单值, 2) 有二个值, 3) 有三个值, 4) 有四个值? 求此函数的分支点及单值连续的各分支.



习题 3366 的附图

解 在第一册的附录二的习题 1542 已经给出了本题方程的图像, 但没有在 §2.12 中作讨论. 现在为方便起见将其图像附在右边, 并作一个简要的讨论.

由图像的对称性可见, 只需要讨论 $x\in[0,1]$ 时 $y(x)>0$ 的单值连续分支, 然后利用对称性得到完整的答案.

将 $y(x)$ 代入方程得到 $x^2+y^2(x)=x^4+y^4(x)$, 然后对 x 求导, 就可从 $2x+2yy'(x)=4x^3+4y^3y'(x)$ 解得

$$y'(x)=\frac{2x^3-x}{y(x)-2y(x)^3}.$$

从方程有 $y^2(y^2-1)=x^2(1-x^2)$, 可见在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 和 $y>0$ 时, 就有 $y(x)\geqslant 1$. 由此就有 $y(x)-2y(x)^3=y(x)[1-2y(x)^2]<0$, 从而可见 $y'(x)$ 的符号完全由上式的分子 $2x^3-x$ 所确定 (符号相反).

这样就可以从 $2x^3-x=x(2x^2-1)$ 确定出 $y'(x)$ 的最大值点为 $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.7071$, 且在 $[0,x_0]$ 上严格单调递增, 而在 $[x_0,1]$ 上严格单调递减. 容易求出

$$y_0 = y(x_0) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \approx 1.098\,7,$$

在附图上标出了这个特征点 (x_0, y_0), 并由对称性可得到其他的特征点.

根据以上讨论和对称性即可简要地列出本题的答案如下:

多值函数 $y(x)$ 的定义域为 $[-y_0, y_0]$, 它具有以下分支性质:

1) 对于任何 $x \in [-y_0, y_0]$, $y(x)$ 都不是单值的;

2) 在 $x = \pm y_0$, $x \in (-1, 0)$ 和 $x \in (0, 1)$ 时 $y(x)$ 有两个值;

3) 在 $x = \pm 1, 0$ 时 $y(x)$ 有三个值;

4) 在 $x \in (-y_0, -1)$, $x \in (1, y_0)$ 时 $y(x)$ 有四个值.

以下求分支点, 即满足方程但在其任何邻域内不存在单值连续分支 $y = y(x)$ 的点.

由以上讨论可见有以下分支点:

$$(-y_0, x_0), (-y_0, -x_0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (y_0, x_0), (y_0, -x_0).$$

其中 $(0, 0)$ 为孤立点, 即在其任何邻域内都没有单值连续分支, 其余 6 个点的特征相同, 即在其充分小的邻域内, 在一侧没有 $y(x)$ 的分支, 而在另一侧却有双值的分支.

各个连续分支的表达式可以从方程解出为

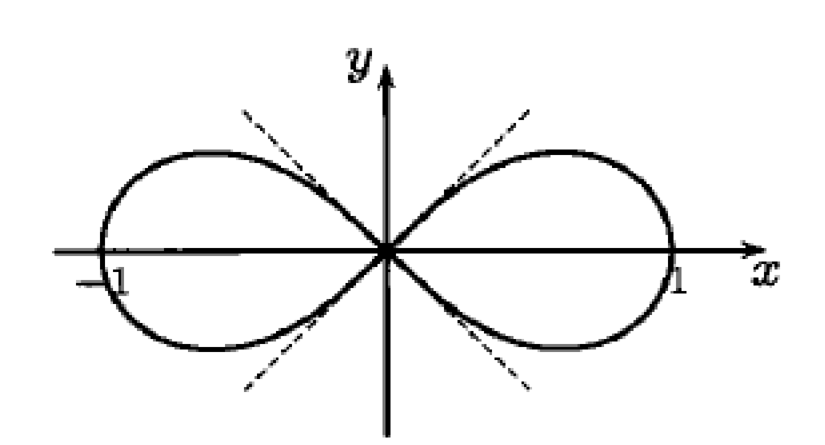
$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}},$$

具体的讨论从略. □

习题 3367 求由方程

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

定义的多值函数 y 的各分支和单值连续的各分支 $y = y(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.



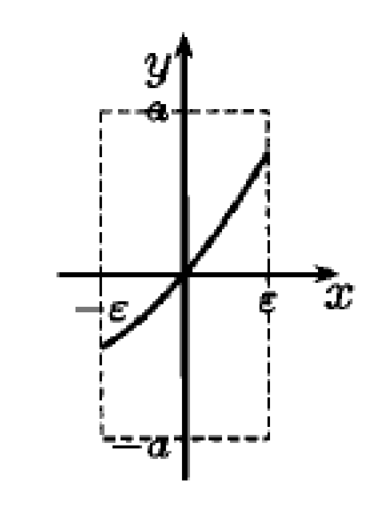
习题3367 的附图

提示 用极坐标即可看出此方程的图像为伯努利双纽线 (已见于第一册附录一的习题 371.1(g)), 以下的讨论可参考习题 3365. □

习题 3369 设

$$x = y + \varphi(y), \tag{1}$$

其中 $\varphi(0) = 0$, 且当 $-a < y < a$ 时 $|\varphi'(y)| \leqslant k < 1$. 证明: 存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时存在唯一的可微函数 $y = y(x)$ 满足方程 (1) 且 $y(0) = 0$.



习题 3369 的附图

解 由于题中没有假设 $\varphi'(y)$ 连续, 因此不能直接应用《习题集》于本节列出的隐函数存在定理, 而需要作较细致的讨论.

引入二元函数

$$F(x, y) = x - y - \varphi(y),$$

它在 $-\infty < x < +\infty$, $-a < y < a$ 时有定义.

将 $F(x,y)$ 对 y 求偏导得到

$$F'_y(x,y) = -1 - \varphi'(y),$$

因此从题设条件 $|\varphi'(y)| \leqslant k < 1$ ($|y| < a$) 可见有 $F'_y(x,y) < 0$. 这表明在 x 固定时, $F(x,y)$ 是 $-a < y < a$ 上的严格单调递减函数. 特别当 $x = 0$ 时从 $F(0,0) = 0$ 可得到

$$F(0,-a) > 0, \quad F(0,a) < 0.$$

利用 $F(x,\pm a)$ 关于 x 连续, 即存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $|x| < \varepsilon$ ($< 1-k$) 时有

$$F(x,-a) > 0, \quad F(x,a) < 0.$$

于是在矩形 $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [-a,a]$ 内 (参见附图), 固定 x 时 $F(x,y)$ 是 y 的严格单调递减函数, 且于矩形的上边界为负, 于矩形的下边界为正, 因此其中存在唯一的 y 值, 记为 $y(x)$, 使得 $F(x,y(x)) = 0$. 这就证明了在上述矩形内, 由方程 $F(x,y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 存在唯一. (附图中矩形内的粗黑曲线是 $y = y(x)$ 的图像.)

可以仿照教科书中的方法证明 $y(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上处处连续, 从略.

下面证明 $y(x)$ 于 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内处处可导.

对于点 $x_0 \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, 取 Δx 使得 $x_0 + \Delta x$ 仍然在区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内. 记 $y(x_0) = y_0$, $y(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$, 则有

$$x_0 = y_0 + \varphi(y_0), \quad x_0 + \Delta x = y_0 + \Delta y + \varphi(y_0 + \Delta y).$$

将两式相减, 有 $\Delta x = \Delta y + \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$, 且可由此式看出, 当 $\Delta x \neq 0$ 时也一定有 $\Delta y \neq 0$.

于是可得到差商的表达式为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1 + \dfrac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y}}.$$

令 $\Delta x \to 0$, 则从 $y(x)$ 于点 x_0 连续可知有 $\Delta y \to 0$. 由于当 $\Delta x \neq 0$ 时也有 $\Delta y \neq 0$, 从而可利用 $\varphi(y)$ 于 y_0 可微而得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{1 + \dfrac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y}}$$

$$= \frac{1}{1 + \varphi'(y_0)}. \quad \square$$

注 对于方程 $F(x,y) = 0$ 在满足 $F(x_0,y_0) = 0$ 的点 (x_0,y_0) 附近的隐函数存在问题来说, 在平时用得较多的定理中要求 F 于点 (x_0,y_0) 的一个邻域内对 x,y 存在连续偏导函数, 且 $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$. 然而为了隐函数存在且连续, 只需要 F 在点 (x_0,y_0) 的一个邻域中关于 y 为严格单调就已足够. 这可以参看 [11] 第二卷的 206 小节的定理 1. 本题的上述解法中关于隐函数存在的证明就是如此. 此外, 还表明只要题设方程中的 φ 可微也就可推出隐函数可微.

习题 3370 设 $y = y(x)$ 为由方程

$$x = ky + \varphi(y)$$

定义的隐函数, 其中常数 $k \neq 0$, $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的周期函数, 且 $|\varphi'(y)| < |k|$. 证明:

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数.

解 将方程看成为 $x = x(y)$ 的表达式, 则从 $x'(y) = k + \varphi'(y)$ 和条件 $|\varphi'(y)| < |k|$ 可见 $k \neq 0$, 且 $x'(y)$ 与常数 k 同号, 因此 $x(y)$ 是 $y \in (-\infty, +\infty)$ 时的严格单调函数, 从而存在反函数 $y = y(x)$. 又由于 $\varphi(y)$ 是连续的周期函数, 因此有界, 从而可见反函数的定义域和值域也是 $(-\infty, +\infty)$, 且也是严格单调函数. 将这个反函数写为

$$y(x) = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

则余下的问题是讨论 $\psi(x)$ 的周期性.

在原方程两边加上 $k\omega$, 并利用 $\varphi(y)$ 是以 ω 为周期的周期函数, 这样就得到等式

$$x + k\omega = k(y + \omega) + \varphi(y + \omega),$$

由此利用反函数关系就得到

$$y(x) + \omega = \frac{x + k\omega}{k} + \psi(x + k\omega),$$

于是就有 $\psi(x) = \psi(x + k\omega)$, 这表明 $\psi(x)$ 是周期函数. 由于一般将周期取为正数, 因此 $\psi(x)$ 是以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数. □

6.3.2 隐函数的导数和微分计算 (习题 3371–3400, 3420)

习题 3372 对于由方程 $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$ 定义的函数 y, 求 y' 和 y''.

解 1 将 $y = y(x)$ 代入方程后对 x 求导, 就有

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - y}{x^2 + y^2},$$

于是就得到一阶导数 $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

将上式再对 x 求导得到

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{1 + y'}{x - y} - \frac{x + y}{(x - y)^2} \cdot (1 - y') \\
&= \frac{1}{x - y} \cdot \left(1 + \frac{x + y}{x - y}\right) - \frac{x + y}{(x - y)^2} \cdot \left(1 - \frac{x + y}{x - y}\right) \\
&= \frac{2x}{(x - y)^2} + \frac{2(x + y)y}{(x - y)^3} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}. \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 y'' 的计算可以从 $y'(x - y) = x + y$ 出发对 x 求导, 得到

$$(1 - y')y' + (x - y)y'' = 1 + y',$$

然后就有

$$y'' = \frac{1}{x - y} \cdot (1 + y'^2) = \frac{1}{x - y} \cdot \left[1 + \frac{(x + y)^2}{(x - y)^2}\right] = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}. \quad \square$$

习题 3374 对于由方程 $x^y = y^x$ $(x \neq y)$ 定义的函数 y, 求 y' 和 y''.

解 将方程两边取对数得到 $y\ln x = x\ln y$, 对 x 求导得到

$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + x\cdot\frac{y'}{y},$$

然后解得

$$y' = \frac{\ln y - \dfrac{y}{x}}{\ln x - \dfrac{x}{y}} = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)} = \frac{y^2(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)}.$$

然后再对 x 求导就得到

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{2y^2(\ln x - 1)}{x^3(\ln y - 1)} + \frac{y^2}{x^3(\ln y - 1)} + \frac{2yy'(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)} - \frac{y(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)^2}\cdot y' \\ &= -\frac{2y^2(\ln x - 1)}{x^3(\ln y - 1)} + \frac{y^2}{x^3(\ln y - 1)} + \frac{2y^3(\ln x - 1)^2}{x^4(\ln y - 1)^2} - \frac{y^3(\ln x - 1)^2}{x^4(\ln y - 1)^3}. \quad \square \end{aligned}$$

注 由于 $y\ln x = x\ln y$, 答案 y', y'' 可以有许多不同的形式. 此外, 如 §2.12.6 的命题 2.12 所示, 可以证明 $y'' > 0$ 处处成立.

习题 3378 证明: 方程

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \ \ (a \neq 0)$$

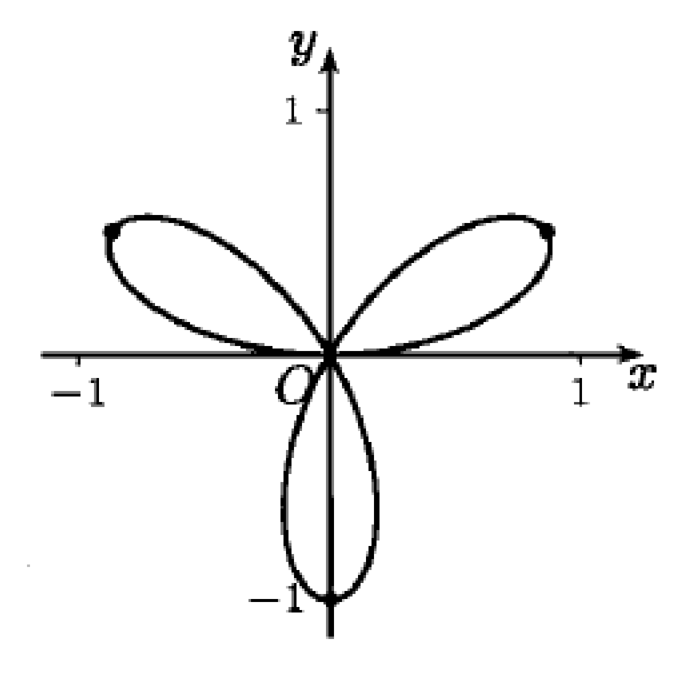
在点 $x = 0, y = 0$ 的邻域中定义出两个可微函数: $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$. 求 $y_1'(0)$ 和 $y_2'(0)$.

提示 在习题 3367 的附图和提示中已指出, 本题的方程的图像为伯努利双纽线. 在确定了两个可微函数后, 只要直接计算差商即可得到答案为 ± 1. $\square$

习题 3379 设

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3,$$

求 y' 当 $x = 0$ 和 $y = 0$ 时的值.



习题 3379 的附图

提示 用极坐标将方程转化为 $r = \sin 3\varphi$, 其图像就是附图所示的三叶玫瑰线 (已见于第一册附录一中的习题 371.1(f) 和附录二中的习题 1547), 可见点 $(0, 0)$ 为分支点, 且有三支可微的单值支经过该点.

用 $y = tx$ 的方法引入参数 t, 则就可以将上述各个分支用参数分离开, 而且经过点 $(0, 0)$ 时的参数 t 的值也就是所要求的 y'. $\square$

小结 到此为止的习题 3364, 3365, 3366, 3367, 3378, 3379 等都涉及分支点以及经过该点的分支性质的研究. 粗糙点说, 分支点几乎就是隐函数存在定理失效的点. 在本书中对于上述各题所用的 (或提示的) 方法都不能说是具有一般意义的方法. 对此有兴趣的读者可以阅读 [11] 第一卷的 236 小节 “平面曲线的奇异点” 以了解分支点的一般特

性. 此外, 对于分支点存在一种普遍有效的计算方法, 即有名的“牛顿法”. 读者可以在 [8] 的第二章中找到关于牛顿法的相当详细的介绍.

习题 3382 证明: 对于二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

成立等式

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

解 由题意可假设行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}\neq 0.$$

(由解析几何可知当上述行列式为 0 时, 二次曲线为退化, 其中的可能性有一对相交直线、一对平行直线、一条直线和一个孤立点.)

用 $y=y(x)$ 代入题设的方程, 然后对 x 求导, 就得到 (其中已除去因子 2)

$$ax+by+bxy'+cyy'+d+ey'=0.$$

再对 x 求导一次则得到

$$a+2by'+bxy''+cy'^2+cyy''+ey''=0.$$

由以上两式可解得

$$\begin{aligned}
y'&=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e},\\
y''&=-\frac{a+2by'+cy'^2}{bx+cy+e}\\
&=-\frac{1}{bx+cy+e}\cdot\left[a-\frac{2b(ax+by+d)}{bx+cy+e}+\frac{c(ax+by+d)^2}{(bx+cy+e)^2}\right]\\
&=-\frac{1}{(bx+cy+e)^3}\cdot[(ac-b^2)(ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey)+ae^2+cd^2-2bde]\\
&=-\frac{1}{(bx+cy+e)^3}\cdot[(ac-b^2)(-f)+ae^2+cd^2-2bde]\\
&=\frac{\Delta}{(bx+cy+e)^3}.
\end{aligned}$$

于是有

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot(bx+cy+e)^2,$$

可见再求导三次后即恒等于 0. □

习题 3386 设

$$z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\tan\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

求函数 $z=z(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数.

解 令 $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$, 则方程为 $u=\tan u$. 可见此方程的解只能是 $u=C$, 其中 C 是常数, 它可以取该方程的任何一个实根.

这时就有 $z=C\sqrt{x^2-y^2}$, 于是只要对此显函数计算一阶和二阶偏导数即可, 只是需要注意在最后的答案中消去常数 C.

下面用全微分法. 求出一阶和二阶全微分如下:

$$\mathrm{d}z=\frac{C}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y)=\frac{z(x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y)}{x^2-y^2},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2z&=-\frac{C}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y)^2+\frac{C}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2)\\&=-\frac{z(x^2\,\mathrm{d}x^2-2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+y^2\,\mathrm{d}y^2)}{(x^2-y^2)^2}+\frac{z}{x^2-y^2}\cdot(\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2).\end{aligned}$$

由此即可得出所有的一阶和二阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}+\frac{z}{x^2-y^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{z}{x^2-y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}.\quad\square$$

我们知道, 一元函数 $y=f(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以看成为 $\mathrm{d}y$ 除 $\mathrm{d}x$ 得到的分式, 但下一个习题表明, 多元函数的偏导数不能理解为分式.

习题 3400 设 $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 定义的函数. 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

解 由 $f(x(y,z),y,z))=0$ 对 y 求偏导得到 $f'_x\dfrac{\partial x}{\partial y}+f'_y=0$, 于是有

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_x}.$$

同样由 $f(x,y(x,z),z)=0$ 对 z 求偏导得到

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{f'_z}{f'_y}.$$

由 $f(x,y,z(x,y))=0$ 对 x 求偏导得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}.$$

然后将以上三式相乘就得到

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\Big(-\frac{f'_y}{f'_x}\Big)\cdot\Big(-\frac{f'_z}{f'_y}\Big)\cdot\Big(-\frac{f'_x}{f'_z}\Big)=-1.\quad\square$$

注 1 本题的一个具体例子是理想气体的状态方程 $\frac{PV}{T}$ =常数. 轮流固定其中一个变量就分别得到等压、等容和等温过程. 分别求出这三个过程的变化率, 即偏导数, 其中两个为正比例, 一个为反比例, 三个变化率相乘得到 -1.

注 2 本题可以推广到 n 个变量的情况. 设由方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 确定 $x_i\ (i=1,\cdots,n)$ 为其余 $n-1$ 个变量的函数, 则可以证明

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_1}=(-1)^n.$$

特别当 $n=2$ 时就得到 §2.2.1 中的 $x'_y\cdot y'_x=1$.

习题 3420 设 $u=f(z)$, 其中 $z=z(x,y)$ 为由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 定义的隐函数. 证明拉格朗日公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\Big\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big\}.$$

解 在此题中要求函数 φ 和 f 无限次可微.

用隐函数存在定理, 令 $F(x,y,z)=z-x-y\varphi(z)$, 任意取定 $x=x_0$, 则 $F(x_0,0,x_0)=0$, 且有 $F'_z(x_0,0,x_0)=1$, 因此在 $(x_0,0)$ 的邻域内, 存在隐函数 $z=z(x,y)$, 且无限次连续可微.

用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 先将 $z=z(x,y)$ 代入方程 $F=0$, 然后对 x,y 求偏导数, 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\varphi'(z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}.$$

利用这两个偏导数就得到 $n=1$ 时的公式:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}=f'(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

在进入数学归纳法的第二步之前, 先做一项准备工作, 即将 $n=1$ 的公式两边对 x 求偏导, 得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

现设公式对 $n=k$ 已经成立, 即有

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\Big\{[\varphi(z)]^k\frac{\partial u}{\partial x}\Big\}.$$

然后将上式对 y 求偏导, 并将关于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 的前述公式和 $\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入, 这样就可以完成数学归纳法的证明:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}} &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{k[\varphi(z)]^{k-1}\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+[\varphi(z)]^k\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}\\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{k[\varphi(z)]^k\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+[\varphi(z)]^k\left(\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right\}\\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{(k+1)[\varphi(z)]^k\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+[\varphi(z)]^{k+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\\ &= \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left\{[\varphi(z)]^{k+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.\quad\square\end{aligned}$$

注　关于拉格朗日公式的进一步知识及其许多应用实例可在 [11] 的第二卷的 452 小节中找到.

6.3.3　隐函数组的导数和微分计算 (习题 3401–3419)

习题 3401 设 $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

解　按题意 x,y 为因变量, z 为自变量.

记 $F(x,y,z)=x+y+z$, $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, 则可求出 $F'_x=F'_y=1$, $G'_x=2x$, $G'_y=2y$, 于是 F,G 关于 x,y 的雅可比行列式为 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=2(y-x)$. 根据隐函数组存在定理, 当 $x\neq y$ 时能够由方程组 $F=G=0$ 确定连续可微的隐函数组 $x=x(z)$ 和 $y=y(z)$,

在将 $x(z),y(z)$ 代入方程组之后, 即可将两个方程对 z 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+1=0,$$

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+2z=0.$$

且可由此方程组解出

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{z-y}{y-x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{x-z}{y-x}.\quad\square$$

习题 3402(b) 设 $xu-yv=0$, $yu+xv=1$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 1　按题意 u,v 为因变量, x,y 为自变量. 令

$$F(x,y,u,v)=xu-yv,\quad G(x,y,u,v)=yu+xv-1,$$

则可求出雅可比行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2.$$

根据隐函数组存在定理, 在 $x^2+y^2>0$ 时可从方程组 $F=G=0$ 确定出隐函数组 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. 将它们代入方程组, 然后将 $F=G=0$ 对 x 求偏导, 就有

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=-u,\quad y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial x}=-v.$$

由此即可解出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-xv+yu}{x^2+y^2}.$$

又将 $F=G=0$ 对 y 求偏导, 即可类似地求出

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2}.\quad \square$$

解 2 (全微分法) 如解 1 那样将隐函数代入方程组 $F=G=0$, 利用一阶微分的形式不变性, 求两个方程的微分即可得到

$$x\,\mathrm{d}u-y\,\mathrm{d}v=-u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y,$$

$$y\,\mathrm{d}u+x\,\mathrm{d}v=-v\,\mathrm{d}x-u\,\mathrm{d}y.$$

然后解出

$$\mathrm{d}u=\frac{x(-u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y)+y(-v\,\mathrm{d}x-u\,\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}=\frac{(-xu-yv)\,\mathrm{d}x+(xv-yu)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}v=\frac{x(-v\,\mathrm{d}x-u\,\mathrm{d}y)-y(-u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}=\frac{(-xv+yu)\,\mathrm{d}x+(-xu-yv)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

由此即可得出与解 1 相同的四个一阶偏导数. $\square$

习题 3407 在 Oxy 平面上怎样的区域内, 方程组

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3$$

(式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值) 定义 z 为变量 x 和 y 的函数? 求导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 将前两个方程改写为 $F(u,v,x,y)=u+v-x=0$, $G(u,v,x,y)=u^2+v^2-y=0$, 则就有 F,G 关于 u,v 的雅可比行列式为 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=2(v-u)$, 因此在 $u\neq v$ 时即可从 $F=G=0$ 确定 u,v 为 x,y 的函数, 这也就确定了 z 为 x,y 的函数.

由于 $x=u+v$ 和 $y=u^2+v^2$ 关于 u,v 对称, 因此关于直线 $u=v$ 对称的两个点 (其中 $u\neq v$) (u,v) 和 (v,u) 映为坐标面 xOy 上的同一个点. 由平均值不等式有

$$x^2=(u+v)^2\leqslant 2(u^2+v^2)=2y,$$

因此在坐标面 uOv 上由直线 $u=v$ 分成的两个半开平面分别映射为坐标面 xOy 上的同一个区域

$$D=\{(x,y)\mid y>\frac{1}{2}x^2\}.$$

反之即可从点 $(x,y)\in D$ 解出 (u,v), 从而表明在区域 D 上 z 为 x,y 的可微函数.

对 $z=u^3+v^3$ 微分得到

$$\mathrm{d}z=3u^2\,\mathrm{d}u+3v^2\,\mathrm{d}v,$$

可见需要求出 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$.

对于前两个方程求微分得到

$$\mathrm{d}u+\mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\quad 2u\,\mathrm{d}u+2v\,\mathrm{d}v=\mathrm{d}y,$$

于是即可解得

$$\mathrm{d}u = \frac{2v\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{2(v-u)}, \quad \mathrm{d}v = \frac{-2u\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{2(v-u)}.$$

然后代入到 $\mathrm{d}z$ 的前述表达式中, 即可得到

$$\mathrm{d}z = \frac{(6u^2v - 6uv^2)\,\mathrm{d}x + (-3u^2 + 3v^2)\,\mathrm{d}y}{2(v-u)}.$$

由此可见在 $u \neq v$ 时有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3u^2v - 3uv^2}{v-u} = -3uv = \frac{3}{2}(y - x^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3u^2 + 3v^2}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v) = \frac{3}{2}x. \quad \square$$

注 函数 z 的定义域可以延拓到区域 D 的边界上, 这时的可微性讨论见后面 §6.5.2 的习题 3548 的注.

习题 3408(b) 设

$$\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3, \\ z = 2uv, \end{cases}$$

求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在点 $u = 2, v = 1$ 的值.

解 从 $z = 2uv$ 求得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + 2v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

因此需要计算出 u, v 关于 x, y 的所有一阶偏导数和两个二阶混合偏导数.

将题设的前两个方程改写为 $F(x,y,u,v) = u + v^2 - x = 0$, $G(x,y,u,v) = u^2 - v^3 - y = 0$, 则可计算出 F, G 关于 u, v 的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 2v \\ 2u & -3v^2 \end{vmatrix} = -3v^2 - 4uv,$$

且知其在点 $u = 2, v = 1$ 处等于 -11, 因此可在此点的邻域内确定 u, v 为 x, y 的可微函数. 将它们代入方程 $F = G = 0$, 求微分得到

$$\mathrm{d}u + 2v\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}x,$$

$$2u\,\mathrm{d}u - 3v^2\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}y.$$

由此可解得

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{-3v^2 - 4uv}(-3v^2\,\mathrm{d}x - 2v\,\mathrm{d}y),$$

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{-3v^2 - 4uv}(-2u\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y).$$

于是可得出所要的全部一阶偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3v^2}{3v^2 + 4uv}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2v}{3v^2 + 4uv},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{3v^2 + 4uv}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{3v^3 + 4uv}.$$

用 $u=2, v=1$ 代入得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3}{11},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{11},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4}{11},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-1}{11}.$$

再计算两个混合偏导数如下:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}=\left.\left[6v\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{1}{3v^2+4uv}-\frac{3v^2}{(3v^2+4uv)^2}\cdot\left(6v\frac{\partial v}{\partial y}+4u\frac{\partial v}{\partial y}+4v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\right|_{\substack{u=2\\v=1}}$$
$$=-\frac{6}{121}+\frac{18}{1331},$$

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}=\left.\left[2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{1}{3v^2+4uv}-\frac{2u}{(3v^2+4uv)^2}\cdot\left(6v\frac{\partial v}{\partial y}+4u\frac{\partial v}{\partial y}+4v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\right|_{\substack{u=2\\v=1}}$$
$$=\frac{4}{121}+\frac{24}{1331}.$$

将以上所得的全部数值代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 中就得到

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}=\left.\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+2v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\right|_{\substack{u=2\\v=1}}$$
$$=2\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{-1}{11}+2\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{4}{11}+2\cdot\left(-\frac{6}{121}+\frac{18}{1331}\right)+4\cdot\left(\frac{4}{121}+\frac{24}{1331}\right)$$
$$=\frac{10}{121}+\frac{4}{121}+\frac{36+96}{1331}=\frac{26}{121}.\quad\square$$

习题 3413 设方程

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v)$$

定义 z 为 x 和 y 的函数. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 利用一阶微分的形式不变性, 对三个方程求微分得到

$$\mathrm{d}x=\varphi'_u\,\mathrm{d}u+\varphi'_v\,\mathrm{d}v,$$
$$\mathrm{d}y=\psi'_u\,\mathrm{d}u+\psi'_v\,\mathrm{d}v,$$
$$\mathrm{d}z=\chi'_u\,\mathrm{d}u+\chi'_v\,\mathrm{d}v.$$

将上式看成为左边的向量用右边的两个向量的线性组合, 其系数为 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$, 则从三个三维向量线性相关可以推出下列行列式等于 0:

$$\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \varphi'_u & \varphi'_v\\ \mathrm{d}y & \psi'_u & \psi'_v\\ \mathrm{d}z & \chi'_u & \chi'_v\end{vmatrix}=0.$$

将上述行列式按照第一列展开, 就得到

$$\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}z=0.$$

由此即可得出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}}.\quad\square$$

习题 3414 设

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

求反函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 的一阶和二阶偏导数.

解 将微分计算写成向量矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix},$$

即可看出有

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是可通过逆矩阵运算得到

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{I} \begin{pmatrix} \psi'_v & -\varphi'_v \\ -\psi'_u & \varphi'_u \end{pmatrix},$$

其中分母 $I = \varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u$.

这样就求出了反函数 u, v 的一阶偏导数:

$$u'_x = \frac{\psi'_v}{I}, \quad u'_y = -\frac{\varphi'_v}{I}, \quad v'_x = -\frac{\psi'_u}{I}, \quad v'_y = \frac{\varphi'_u}{I}.$$

为求反函数的二阶偏导数, 对于前述 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 用 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 线性表出的等式再求微分, 其中又利用 $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$, 于是可得到

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}^2u \\ \mathrm{d}^2v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \varphi''_{uu}\,\mathrm{d}u + \varphi''_{uv}\,\mathrm{d}v & \varphi''_{uv}\,\mathrm{d}u + \varphi''_{vv}\,\mathrm{d}v \\ \psi''_{uu}\,\mathrm{d}u + \psi''_{uv}\,\mathrm{d}v & \psi''_{uv}\,\mathrm{d}u + \psi''_{vv}\,\mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix},$$

其中

$$U = \varphi''_{uu}\,\mathrm{d}u^2 + 2\varphi''_{uv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \varphi''_{vv}\,\mathrm{d}v^2,$$

$$V = \psi''_{uu}\,\mathrm{d}u^2 + 2\psi''_{uv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \psi''_{vv}\,\mathrm{d}v^2.$$

再次利用逆矩阵运算, 即可得到

$$\mathrm{d}^2u = -\frac{1}{I}(\psi'_v U - \varphi'_v V),$$

$$\mathrm{d}^2v = -\frac{1}{I}(-\psi'_u U + \varphi'_u V).$$

以下是对于 U 的具体计算. 用 $\mathrm{d}u = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}v = v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y$ 代入得到

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{I^2}\big\{&[\varphi''_{uu}(\psi'_v)^2 - 2\varphi''_{uv}\psi'_v\psi'_u + \varphi''_{vv}(\psi'_u)^2]\,\mathrm{d}x^2 \\ &+ 2[-\varphi''_{uu}\psi'_v\varphi'_v + \varphi''_{uv}(\psi'_v\varphi'_u + \varphi'_v\psi'_u) - \varphi''_{vv}\psi'_u\varphi'_v]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &+ [\varphi''_{uu}(\varphi'_v)^2 - 2\varphi''_{uv}\varphi'_v\varphi'_u + \varphi''_{vv}(\varphi'_u)^2]\,\mathrm{d}y^2\big\}. \end{aligned}$$

又可见若将上述表达式中的所有的 φ 的二阶偏导数改为 ψ 的相应的二阶偏导数就可以得到 V 的表达式.

将 U, V 代入 d^2u 的表达式中, 并分别收集 $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}y^2$ 项的系数, 就得到

$$u''_{xx} = -\frac{1}{I^3}[(\psi'_v)^2(\psi'_v\varphi''_{uu} - \varphi'_v\psi''_{uu}) - 2\psi'_u\psi'_v(\psi'_v\varphi''_{uv} - \varphi'_v\psi''_{uv}) + (\psi'_u)^2(\psi'_v\varphi''_{vv} - \varphi'_v\psi''_{vv})],$$

$$u''_{xy} = \frac{1}{I^3}[\psi'_v\varphi'_v(\psi'_v\varphi''_{uu} - \varphi'_v\psi''_{uu}) - (\psi'_v\varphi'_u + \varphi'_v\psi'_u)(\psi'_v\varphi''_{uv} - \varphi'_v\psi''_{uv}) + \psi'_u\varphi'_u(\psi'_v\varphi''_{vv} - \varphi'_v\psi''_{vv})],$$

$$u''_{yy} = -\frac{1}{I^3}[(\varphi'_v)^2(\psi'_v\varphi''_{uu} - \varphi'_v\psi''_{uu}) - 2\varphi'_u\varphi'_v(\psi'_v\varphi''_{uv} - \varphi'_v\psi''_{uv}) + (\varphi'_u)^2(\psi'_v\varphi''_{vv} - \varphi'_v\psi''_{vv})].$$

关于 v 的二阶偏导数的计算从略. □

习题 3416 函数 $u = u(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} u = f(x,y,z), \\ g(x,y,z) = 0, \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

定义, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

解 从题意和隐函数组存在定理可知, 题设的方程组确定出 u, y, z 为 x 的函数. 将它们代入方程组并引入算子

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z},$$

则就有

$$u' = Af = f'_1 + f'_2y' + f'_3z',$$
$$0 = Ag = g'_1 + g'_2y' + g'_3z',$$
$$0 = Ah = h'_1 + h'_2y' + h'_3z'.$$

将此方程组再改写如下

$$u' - f'_2y' - f'_3z' = f'_1,$$
$$-g'_2y' - g'_3z' = g'_1,$$
$$-h'_2y' - h'_3z' = h'_1,$$

然后即可解出

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ g'_1 & g'_2 & g'_3 \\ h'_1 & h'_2 & h'_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g'_2 & g'_3 \\ h'_2 & h'_3 \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}}, \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} g'_3 & g'_1 \\ h'_3 & h'_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g'_2 & g'_3 \\ h'_2 & h'_3 \end{vmatrix}}, \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g'_2 & g'_3 \\ h'_2 & h'_3 \end{vmatrix}}.$$

为求二阶导数, 先将前述方程组求导得到

$$u'' = A^2 f + f_2' y'' + f_3' z'',$$
$$0 = A^2 g + g_2' y'' + g_3' z'',$$
$$0 = A^2 h + h_2' y'' + h_3' z'',$$

然后即可解出

$$u'' = \frac{\begin{vmatrix} A^2 f & f_2' & f_3' \\ A^2 g & g_2' & g_3' \\ A^2 h & h_2' & h_3' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_2' & g_3' \\ h_2' & h_3' \end{vmatrix}}. \quad \square$$

6.3.4 隐函数与偏微分方程 (习题 3421–3430)

与 §6.2.5 的第 (1) 种类型的习题类似, 这里的习题是给定方程 (或方程组), 其中一般含有任意可微函数, 要求验证由方程 (或方程组) 确定的隐函数满足某个偏微分方程.

习题 3421 设 $\Phi(u,v)$ 是变量 u,v 的任意可微函数, a 和 b 为常数. 证明: 由方程

$$\Phi(x-az, y-bz) = 0 \tag{1}$$

定义的函数 $z=z(x,y)$ 为方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

的解. 说明曲面 (1) 的几何性质.

解 将 $z=z(x,y)$ 代入方程, 对 x,y 分别求偏导, 得到

$$\Phi_1'\Big(1 - a\frac{\partial z}{\partial x}\Big) - \Phi_2' b\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$-\Phi_1' a\frac{\partial z}{\partial y} + \Phi_2'\Big(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\Big) = 0,$$

然后即可解出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\Phi_1'}{a\Phi_1' + b\Phi_2'},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\Phi_2'}{a\Phi_1' + b\Phi_2'},$$

从而可得到 $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

由于 $\Big(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)$ 是曲面的法向量, 因此上述偏微分方程表明曲面上任意点处的法向量与一个常值向量 $(a,b,1)$ 正交, 即曲面为柱面, 其母线平行于向量 $(a,b,1)$. □

习题 3423 设 $\Phi(u)$ 是变量 u 的任意可微函数, a,b 和 c 为常数. 证明: 由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \tag{2}$$

定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

说明曲面 (2) 的几何性质.

解 将 $z=z(x,y)$ 代入 (2), 然后对 x,y 分别求偏导, 得到

$$(c-2z\Phi')\frac{\partial z}{\partial x}=-a+2x\Phi',$$
$$(c-2z\Phi')\frac{\partial z}{\partial y}=-b+2y\Phi'.$$

解出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-a+2x\Phi'}{c-2z\Phi'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-b+2y\Phi'}{c-2z\Phi'},$$

然后代入方程就有

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(cy-bz)(-a+2x\Phi')+(az-cx)(-b+2y\Phi')}{c-2z\Phi'}$$
$$=bx-ay.$$

为了解曲面的几何意义, 任取曲面上的一个点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 且令

$$r^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2,$$

就可以看出点 P_0 同时满足以下两个方程:

$$ax+by+cz=\Phi(r^2),\quad x^2+y^2+z^2=r^2.$$

而上述两个方程的几何意义是一张平面和半径为 r 的球面. 它们有非空交, 则其交集为经过点 P_0 的一个圆周, 它的圆心是平面 $ax+by+cz=\Phi(r^2)$ 与直线 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 的交点. 由此可见, 这个圆周是点 P_0 绕此直线旋转而形成的.

这样就证明了曲面 $ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2)$ 是以直线 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 为旋转轴的旋转曲面.

此外, 前面证明的偏微分方程可改写为曲面的法向量 $\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)$、曲面上的点的矢径向量 (x,y,z) 和向量 (a,b,c) 的混合积为 0, 即

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & -1\\ x & y & z\\ a & b & c\end{vmatrix}=0.$$

这也有明显的几何意义. 对于曲面上的点 $P(x,y,z)$, 矢径向量 (x,y,z) 与旋转轴的方向向量 (a,b,c) 的向量积就是点 P 绕旋转轴形成的圆周在点 P 处的切方向. 由于该圆周在曲面上, 因此该切方向与曲面的法向量必定正交. □

习题 3426 设 $\alpha=\alpha(x,y)$ 为参变量, $f(\alpha)$ 为任意可微函数. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha), \\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha) \end{cases}$$

定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2.$$

解 题意表明从方程组确定 z 和 α 为 x,y 的函数. 对第一个方程求微分得到

$$\cos\alpha\,\mathrm{d}x+\sin\alpha\,\mathrm{d}y+(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=f'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

利用第二个方程即可消去上式中所有与 $\mathrm{d}\alpha$ 有关的项, 于是得到

$$\mathrm{d}z=-z\cos\alpha\,\mathrm{d}x-z\sin\alpha\,\mathrm{d}y,$$

这样就同时得到了

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-z\cos\alpha,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-z\sin\alpha.$$

它们的平方和等于 z^2. □

注 习题 3426–3429 的背景可参看 §6.5.3 的包络线与包络面.

习题 3430 证明: 由方程

$$y=x\varphi(z)+\psi(z)$$

定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 对方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ 求微分得到 $\mathrm{d}y=\varphi(z)\,\mathrm{d}x+x\varphi'(z)\,\mathrm{d}z+\psi'(z)\,\mathrm{d}z$. 将它整理为

$$(x\varphi'(z)+\psi'(z))\,\mathrm{d}z=-\varphi(z)\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

就可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi(z)}{x\varphi'(z)+\psi'(z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x\varphi'(z)+\psi'(z)}.$$

然后从上述一阶偏导数再求偏导得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\varphi'(z)}{x\varphi'(z)+\psi'(z)}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\varphi(z)}{[x\varphi'(z)+\psi'(z)]^2}\left\{\varphi'(z)+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]\frac{\partial z}{\partial x}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{[x\varphi'(z)+\psi'(z)]^2}\left\{\varphi'(z)+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]\frac{\partial z}{\partial x}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{[x\varphi'(z)+\psi'(z)]^2}\left\{[x\varphi''(z)+\psi''(z)]\frac{\partial z}{\partial y}\right\}.$$

将上述三式分别乘以 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, $-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ 后相加就得到 0. □

§6.4 变量代换 (习题 3431–3527)

内容简介 变量代换是常微分方程、偏微分方程等领域中的基本工具. 本节的习题可分为一元函数和多元函数的变量代换两部分, 后者又分为只对自变量作代换以及同时对自变量和因变量作代换等 3 个小节.

从第二小节开始是多元函数的变量代换计算, 其中的技巧性较强, 对于初学者是一个挑战. 若方法选择不当, 则计算可能会很繁复, 也很容易出错. 为此在计算方法上提出以下几点供参考.

(1) 在变量代换前后的两组变量中, 往往可以自由选择其中某一组变量为自变量, 另一组变量为中间变量[①], 但在一个解法中作出这样的选择之后不应当再作改变.

(2) 在作出 (1) 中的选择之后, 除了直接计算各个偏导数之外, 还可以用 §6.2 和 §6.3 中的全微分方法. 特别是对于一阶全微分可以利用其形式不变性. 二阶全微分虽然没有这样的形式不变性, 但在很多问题的计算中也是有用的. 这时可以利用自变量的二阶微分一定等于 0 的特性. 然而中间变量的二阶微分则没有这样的性质.

(3) 利用自变量的微分可以自由赋值的特点, 在作出 (1) 中的选择之后, 可以将自变量的微分取为某些特特殊数值, 这往往会提供变量代换的较为简便的计算方法[②].

在 §6.4.2 的第一个习题 3458 中, 将通过具体求解对上述各点作出解释.

6.4.1 一元函数的变量代换 (习题 3431–3457)

本小节是关于常微分方程或一元函数的微分表达式的变量代换. 这方面的一本有用的手册是 [23].

习题 3432 把 y 看作新的自变量, 变换方程

$$y'^2y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0.$$

解 (概要) 按照题意即将原来的自变量 x 看作新的因变量, 这样就要求将关于未知函数 $y(x)$ 的微分方程转化为关于其反函数 $x(y)$ 的新的微分方程.

为此需要求出反函数 $x(y)$ 的前几阶导数. 将它们用记号 x', x'' 表示. 回顾 §2.5.2 的习题 1145, 在那里已经计算得到反函数的前 4 阶导数为:

$$x' = \frac{1}{y'}, \quad x'' = -\frac{y''}{y'^3}, \quad x''' = -\frac{y'''}{y'^4} + \frac{3y''^2}{y'^5},$$

$$x^{(4)} = -\frac{y^{(4)}}{y'^5} + \frac{10y'''y''}{y'^6} - \frac{15y''^3}{y'^7},$$

可见本题的方程已经转换为 $x^{(4)} = 0$. 它的通解即所有的三次多项式. □

① 这是对因变量保持不变的代换来说的, 对于因变量也参加代换的情况可以类推.

② 这种方法在 [11] 第三卷的 222 小节的例题 6) 中有所提及 (该题即是 §6.4.4 的习题 3514), 它在变量代换计算中经常有效, 并将成为本节以下从 §6.4.2 到 §6.4.4 的主要方法之一.

习题 3433 把 x 看作函数, 把 $t=xy$ 看作自变量, 变换方程

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0.$$

解 用 $\dot{x},\ddot{x}$ 记 x 对 t 的导数. 从 $t=xy$ 对 t 求导, 就有 $1=\dot{x}y+x\dot{x}y'$, 解得

$$y'=\frac{1}{x\dot{x}}-\frac{t}{x^2}.$$

将上式再对 x 求导, 就有

$$\begin{aligned}y''=\frac{\dfrac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}&=\frac{1}{\dot{x}}\Big(-\frac{\dot{x}^2+x\ddot{x}}{x^2\dot{x}^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{2t\dot{x}}{x^3}\Big)\\&=-\frac{2}{x^2\dot{x}}-\frac{\ddot{x}}{x\dot{x}^3}+\frac{2t}{x^3}.\end{aligned}$$

将 y',y'' 代入方程就得到

$$\begin{aligned}y''+\frac{2}{x}y'+y&=\Big(-\frac{2}{x^2\dot{x}}-\frac{\ddot{x}}{x\dot{x}^3}+\frac{2t}{x^3}\Big)+\frac{2}{x}\Big(\frac{1}{x\dot{x}}-\frac{t}{x^2}\Big)+\frac{t}{x}\\&=-\frac{\ddot{x}}{x\dot{x}^3}+\frac{t}{x}=0.\end{aligned}$$

整理后就得到新的方程为 $\ddot{x}-t\dot{x}^3=0$. 若将 $\dot{x}$ 作为未知函数, 则就将原来的二阶变系数线性方程转换为容易求解的一阶常微分方程. □

习题 3438 引入新变量 $y=u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$, 其中 $p(x)\in C^{(1)}$, 变换常微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$.

解 为简明起见, 令

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)\,\mathrm{d}\xi},$$

则 $y=uf(x)$. 对自变量 x 求导得到

$$\begin{aligned}y'&=u'f(x)+uf(x)\cdot\Big[-\frac{1}{2}p(x)\Big],\\y''&=u''f(x)+2u'f(x)\cdot\Big[-\frac{1}{2}p(x)\Big]+uf(x)\cdot\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{u}{2}f(x)p'(x).\end{aligned}$$

将它们代入所给的方程就得到

$$\begin{aligned}y''+p(x)y'+q(x)y&=\Big[u''f(x)-u'f(x)p(x)+\frac{1}{4}uf(x)p^2(x)-\frac{1}{2}uf(x)p'(x)\Big]\\&\quad+p(x)\cdot\Big[u'f(x)-\frac{1}{2}uf(x)p(x)\Big]+q(x)uf(x)\\&=f(x)\Big\{u''+\Big[q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x)\Big]u\Big\}=0.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 没有任何零点, 因此可以约去 $f(x)$ 得到等价的新方程为

$$u''+\Big[q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x)\Big]u=0.\quad\square$$

注 本题是二阶变系数线性常微分方程研究中的一个基本变量代换, 它表明总可以消去该方程中关于未知函数的一阶导数项.

习题 3443 引入新变量 $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{u}{t}$, 其中 $u=u(t)$, 变换方程 $y'''-x^3y''+xy'-y=0$.

解 用 $\dot{u},\ddot{u}$ 等记 u 对 t 的导数, 则有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\dot{u}}{t}-\frac{u}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}}=u-t\dot{u},$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-t\ddot{u}}{-\frac{1}{t^2}}=t^3\ddot{u},$$

$$y'''=\frac{\mathrm{d}(y'')}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}(y'')}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3t^2\ddot{u}+t^3\dddot{u}}{-\frac{1}{t^2}}=-3t^4\ddot{u}-t^5\dddot{u}.$$

将它们代入所给的方程就得到

$$\begin{aligned}y'''-x^3y''+xy'-y&=(-3t^4\ddot{u}-t^5\dddot{u})-\frac{1}{t^3}(t^3\ddot{u})+\frac{1}{t}(u-t\dot{u})-\frac{u}{t}\\&=-t^5\dddot{u}-3t^4\ddot{u}-\ddot{u}-\dot{u}=0.\end{aligned}$$

于是变换后的方程为 $t^5\dddot{u}+(3t^4+1)\ddot{u}+\dot{u}=0$. 若将 $\dot{u}$ 看作为新的未知函数, 则就已将原来的三阶方程转换为二阶方程. □

习题 3444 (斯托克斯方程) 令

$$u=\frac{y}{x-b},\quad t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|,$$

并把 u 看作变量 t 的函数, 以变换方程

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

解 用 $\dot{x},\dot{u}$ 等记 x,u 关于 t 的导数, 则从 t 与 x 的关系式对 t 求导得到

$$1=\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)\dot{x},$$

于是得到 $\dot{x}=\dfrac{(x-a)(x-b)}{a-b}$.

然后计算

$$y'=u+(x-b)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+(x-b)\frac{\dot{u}}{\dot{x}}=u+\frac{a-b}{x-a}\dot{u},$$

$$\begin{aligned}y''&=\frac{\dot{u}}{\dot{x}}-\frac{a-b}{(x-a)^2}\dot{u}+\frac{a-b}{x-a}\cdot\frac{\ddot{u}}{\dot{x}}\\&=\frac{(a-b)\dot{u}}{(x-a)(x-b)}-\frac{(a-b)\dot{u}}{(x-a)^2}+\frac{a-b}{x-a}\cdot\frac{a-b}{(x-a)(x-b)}\ddot{u}.\end{aligned}$$

将上式代入所给的方程就得到

$$\ddot{u}-\dot{u}-\frac{A}{(a-b)^2}u=0,$$

即已转换为常系数的二阶线性微分方程 (参见 [23] 的 2.382 题). □

习题 3448 证明: 方程 $y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$ 的形式在射影变换

$$x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c},\quad y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c}$$

下保持不变.

解 本题有误 [5]. 即使用最简单的 $x=\xi, y=a\xi\ (a\neq 1)$ 代入, 方程也不是不变的.

若将方程改写为

$$y'''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}-3y'y''^2(1+y'^2)^{-\frac{5}{2}}=0,$$

则就是

$$[y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}]'=0,$$

于是得到

$$y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}=C.$$

回忆平面曲线的曲率公式 (参见 §2.14), 可见上述推导表明满足所给方程的曲线的曲率为常数, 因此就是平面上所有的圆. 可是在本题的射影变换下, 圆在变换后一般不再是圆. 因此本题关于方程形式不变的结论不能成立.

然而在射影变换下不变的方程是存在的. 这就是

$$9y''^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40y'''^3=0.$$

它可从 §6.3.2 的习题 3382 的 $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0$ 推出, 其通解就是所有的平面二次曲线 (且包括退化情况在内), 而在射影变换下二次曲线仍然变为二次曲线. □

注 关于射影变换的分解见 [14] 的 §37, 上述方程就是该书第二章的习题 18, 被称为阿尔方微分不变量. 此外还可参见 [23] 的题 7.11 和 7.17.

习题 3449 (施瓦茨导数) 证明:

$$S[x(t)]=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

的值在分式线性变换

$$y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}\ \ (ad-bc\neq 0)$$

下保持不变.

解 为证明 $S[x(t)]=S[y(t)]$, 只需用链式法则求出 y 的一阶到三阶导数:

$$y'(t)=\frac{a[cx(t)+d]-c[ax(t)+b]}{[cx(t)+d]^2}x'(t)=\frac{ad-bc}{[cx(t)+d]^2}x'(t),$$

$$y''(t)=-\frac{2c(ad-bc)}{[cx(t)+d]^3}[x'(t)]^2+\frac{ad-bc}{[cx(t)+d]^2}x''(t),$$

$$y'''(t)=\frac{6c^2(ad-bc)}{[cx(t)+d]^4}[x'(t)]^3-\frac{6c(ad-bc)}{[cx(t)+d]^3}x'(t)x''(t)+\frac{ad-bc}{[cx(t)+d]^2}x'''(t).$$

将它们代入 $S[y(t)]$ 中即可得到

$$S[y(t)] = \frac{y'''(t)}{y'(t)} - \frac{3}{2}\Big[\frac{y''(t)}{y'(t)}\Big]^2$$
$$= \frac{6c^2}{[cx(t)+d]^2}[x'(t)]^2 - \frac{6c}{cx(t)+d}x''(t) + \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2}\Big[-\frac{2c}{cx(t)+d}x'(t) + \frac{x''(t)}{x'(t)}\Big]^2$$
$$= \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2}\Big[\frac{x''(t)}{x'(t)}\Big]^2 = S[x(t)]. \quad \square$$

注 1 在 [32] 的第六章第二组参考题 12 中列出了施瓦茨导数的几个基本性质, 从其中两个性质即可推出本题的结论. 一个性质是

$$S\Big(\frac{at+b}{ct+d}\Big) = 0,$$

另一个性质是

$$S[f(g(t))] = S[f(u)]\Big|_{u=g(t)} \cdot [g'(t)]^2 + S[g(t)].$$

注 2 这里对历史作一点注解. 施瓦茨导数是复分析中的一个较老的概念. 据编者所知, 施瓦茨导数在 20 世纪 70 年代后期开始的混沌学的发展中有重要的应用, 见 [17] 中专门为此写的附录 B: "施瓦茨导数和辛格尔定理". 对于施瓦茨导数作较全面介绍的一篇短文为: V. Ovsienko and S. Tabachnikov, What is the Schwarzian derivative? Notices of the AMS, v.56, no.1 (2009) 34–36. 在该文中提到, $S[x(t)] = S[y(t)]$ 的充分必要条件是 $y(t) = \dfrac{ax(t)+b}{cx(t)+d}$ $(ad - bc \neq 0)$.

习题 3450 令 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, 写出方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y}{x-y}$ 在极坐标 r, φ 下的形式.

解 视 r 为 φ 的函数, 记 r' 为 r 对于 φ 的导数, 则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}.$$

将它代入所给的方程就得到

$$\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

将此式交叉相乘并加以整理, 就得到变换后的方程为 $r' = r$. 这容易解出为

$$r = C\mathrm{e}^{\varphi},$$

其中 C 为任意正常数. 可以看出, 这就是对数螺线 (参见第一册附录一的习题 371.1(d)). 显然它适合于用极坐标来进行研究. $\square$

习题 3455 写出方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + kx(x^2+y^2), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + ky(x^2+y^2)$$

在极坐标下的形式.

解 从 $r^2 = x^2 + y^2$ 和 $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$ 出发求导就得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kr^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2} = \frac{x}{r^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{y}{r^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1.$$

即使不求出 r, φ 的显表达式也已经可以看出, 随着 t 的递增, 平面上的积分曲线 $(r(t), \varphi(t))$ 必定是以顺时针方向围绕原点作无限次旋转, 而它与原点的距离则按照 k 的符号或者单调趋于 0 或者趋于无穷大. 显然, 采用极坐标系对于本题的方程组的积分曲线的定性研究是合适的. □

习题 3456 引入新函数 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$, 以便变换表达式

$$W = x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - y\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}.$$

解 记 $\dot r, \dot\varphi$ 等为 r, φ 关于 t 的导数, 并将所给的表达式改写为

$$W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big),$$

可见只要求出 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 从 $x = r\cos\varphi$ 和 $y = r\sin\varphi$ 出发对 t 求导, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot\varphi, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot\varphi.$$

将它们代入 W 的新表达式中就得到

$$W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot\varphi) = 2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi. \quad □$$

习题 3457 在勒让德变换中, 曲线 $y = y(x)$ 的每一点 (x, y) 对应于点 (X, Y), 其中

$$X = y', \quad Y = xy' - y.$$

求 Y', Y'' 及 Y'''.

注 本题与 §2.5.2 的习题 1144 重复. 此外, 关于勒让德变换的应用可以参考 [6] 的第一卷的 §4.9 以及第二卷中专设的 §1.6 "勒让德变换".

6.4.2 多元函数的变量代换 I (习题 3458–3483, 3487)

本小节的习题只涉及一阶偏导数. 下面的第一个习题是对于本节前言中提出的各种方法的一个初步解释.

习题 3458 引入新的自变量 $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, 解方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 1 x, y 是原自变量, ξ, η 为新自变量, 于是既可写出 $z = z(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$, 也可写出 $z = z(\xi(x,y), \eta(x,y))$. 现在选择后者, 即以 x, y 为自变量, 以 ξ, η 为中间变量, 则可以计算方程中的偏导数如下:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

将上述结果代入所给的方程就得到 $\frac{\partial z}{\partial \eta}=0$. 于是即可解出

$$z=\varphi(\xi)=\varphi(x+y),$$

其中 φ 为任意可微函数. □

解 2　若选择 ξ,η 为自变量, x,y 为中间变量, 则需要从题设的代换求出其逆代换 $x=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$ 和 $y=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$, 然后就有

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\Big),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\Big),$$

由此可见原来的方程即变成 $\frac{\partial z}{\partial \eta}=0$. (因此 $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ 是不需要计算的.) 其余同解 1. □

解 3 **(全微分法)**　利用一阶微分的形式不变性就有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=z'_x\,\mathrm{d}x+z'_y\,\mathrm{d}y=z'_\xi\,\mathrm{d}\xi+z'_\eta\,\mathrm{d}\eta\\&=z'_\xi\,(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+z'_\eta\,(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)\\&=(z'_\xi+z'_\eta)\,\mathrm{d}x+(z'_\xi-z'_\eta)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

由此即可得到 $z'_x=z'_\xi+z'_\eta$ 和 $z'_y=z'_\xi-z'_\eta$. 以下与解 1 相同. □

解 4　从所给的方程可见, 在全微分等式

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

中, 若令 $\mathrm{d}x=1$, $\mathrm{d}y=-1$, 则就有 $\mathrm{d}z=0$.

又从代换关系 $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ 可得到

$$\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}\eta=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,$$

可见当 $\mathrm{d}x=1$, $\mathrm{d}y=-1$ 时, 就有 $\mathrm{d}\xi=0$, $\mathrm{d}\eta=2$.

将以上结果代入以 ξ,η 为变量的全微分等式

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\eta,$$

则就得到 $\frac{\partial z}{\partial \eta}=0$. 其余同解 1. □

习题 3460 引入新的自变量 $\xi=x$, $\eta=y-bz$, 解方程 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ $(a\neq 0)$.

解 1　在本题的变量代换中自变量的变换与因变量 z 有关, 但 z 仍然为因变量. 由一阶微分的形式不变性有

$$\mathrm{d}z=z'_x\,\mathrm{d}x+z'_y\,\mathrm{d}y=z'_\xi\,\mathrm{d}\xi+z'_\eta\,\mathrm{d}\eta=z'_\xi\,\mathrm{d}x+z'_\eta\,(\mathrm{d}y-b\,\mathrm{d}z),$$

由此解得

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{1+bz'_\eta}(z'_\xi \,\mathrm{d}x + z'_\eta \,\mathrm{d}y).$$

可见有 $z'_x = \dfrac{z'_\xi}{1+bz'_\eta}, z'_y = \dfrac{z'_\eta}{1+bz'_\eta}$. 将它们代入方程 $az'_x + bz'_y = 1$ 就得到

$$az'_\xi + bz'_\eta = 1 + bz'_\eta,$$

于是方程转换为 $z'_\xi = \dfrac{1}{a}$, 因此可解得

$$z = \frac{1}{a}\xi + \varphi(\eta) = \frac{1}{a}x + \varphi(y - bz),$$

其中 φ 为任意可微函数. □

解 2 由方程可知对于满足方程的函数 $z = z(x,y)$, 当 $\mathrm{d}x = a$, $\mathrm{d}y = b$ 时必有 $\mathrm{d}z = 1$. 因此只要在解 1 开始得到的

$$\mathrm{d}z = z'_\xi \,\mathrm{d}x + z'_\eta(\mathrm{d}y - b\,\mathrm{d}z)$$

中用 $\mathrm{d}x = a, \mathrm{d}y = b, \mathrm{d}z = 1$ 代入就得到 $z'_\xi = \dfrac{1}{a}$, 其他同解 1. □

习题 3470 取 x 作为函数, 而 y 和 z 作为自变量, 变换方程

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

解 1 题意是从方程 $z - z(x,y) = 0$ 确定出 $x = x(y,z)$, 因此将它代入方程后就是关于 y, z 的恒等式 $z \equiv z(x(y,z),y)$. 将此式对于 y, z 求偏导, 得到

$$0 = z'_x x'_y + z'_y, \quad 1 = z'_x x'_z.$$

于是即可解出

$$z'_x = \frac{1}{x'_z}, \quad z'_y = -z'_x x'_y = -\frac{x'_y}{x'_z}.$$

将这两个结果代入题中的方程就得到

$$x - z - yx'_y = 0.$$

若改写为 $(x-z)'_y = \dfrac{x-z}{y}$, 即可解得

$$x = z + \varphi(z)y,$$

其中 φ 为任意可微函数. □

解 2 写出

$$\mathrm{d}z = z'_x \,\mathrm{d}x + z'_y \,\mathrm{d}y,$$

并与习题中所给的方程比较, 可见对于满足方程的 $z(x,y)$, 当 $\mathrm{d}x = x - z$, $\mathrm{d}y = y$ 时, 必有 $\mathrm{d}z = 0$.

利用一阶微分的形式不变性, 在

$$\mathrm{d}x = x'_y \,\mathrm{d}y + x'_z \,\mathrm{d}z$$

中用 $\mathrm{d}x = x - z$, $\mathrm{d}y = y$, $\mathrm{d}z = 0$ 代入, 就得到以 x 为未知函数的方程为

$$x - z = yx'_y. \quad □$$

习题 3480 令 $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$, $\zeta = z$, $w = \frac{u}{z}$, 其中 $w = w(\xi, \eta, \zeta)$, 变换方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}.$$

解 1 为了将方程中的三个偏导数用 ξ, η, ζ 和 w 表出, 从 $u = zw$ 计算全微分如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= z\,\mathrm{d}w + w\,\mathrm{d}z \\
&= z(w'_\xi\,\mathrm{d}\xi + w'_\eta\,\mathrm{d}\eta + w'_\zeta\,\mathrm{d}\zeta) + w\,\mathrm{d}z \\
&= zw'_\xi\Big(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{z^2}\,\mathrm{d}z\Big) + zw'_\eta\Big(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}\,\mathrm{d}z\Big) + zw'_\zeta\,\mathrm{d}z + w\,\mathrm{d}z \\
&= w'_\xi\,\mathrm{d}x + w'_\eta\,\mathrm{d}y + \Big(-\xi w'_\xi - \eta w'_\eta + \zeta w'_\zeta + w\Big)\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

这样就有 $\frac{\partial u}{\partial x} = w'_\xi$, $\frac{\partial u}{\partial y} = w'_\eta$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\xi w'_\xi - \eta w'_\eta + \zeta w'_\zeta + w$. 将它们代入方程得到

$$xw'_\xi + yw'_\eta + z(-\xi w'_\xi - \eta w'_\eta + \zeta w'_\zeta + w) = u + \frac{xy}{z}.$$

加以整理后得到新的方程为 $\zeta w'_\zeta = \xi\eta$. 这容易解出为

$$w = \xi\eta\ln|\zeta| + \varphi(\xi, \eta),$$

其中 φ 为任意可微函数. □

解 2 对于 $w = w(\xi, \eta, \zeta)$ 写出其一阶全微分

$$\mathrm{d}w = w'_\xi\,\mathrm{d}\xi + w'_\eta\,\mathrm{d}\eta + w'_\zeta\,\mathrm{d}\zeta,$$

然后根据给定的变换关系得到

$$\frac{1}{z}\,\mathrm{d}u - \frac{u}{z^2}\,\mathrm{d}z = w'_\xi\Big(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{z^2}\,\mathrm{d}z\Big) + w'_\eta\Big(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}\,\mathrm{d}z\Big) + w'_\zeta\,\mathrm{d}z.$$

另一方面, 将 $\mathrm{d}u = u'_x\,\mathrm{d}x + u'_y\,\mathrm{d}y + u_z\,\mathrm{d}z$ 与方程比较, 可见当 $\mathrm{d}x = x, \mathrm{d}y = y, \mathrm{d}z = z$ 时必有 $\mathrm{d}u = u + \frac{xy}{z}$. 将这些微分值代入前式, 则就得到

$$\frac{xy}{z^2} = w'_\zeta z,$$

也就是 $\zeta w'_\zeta = \xi\eta$. 其余同解 1. □

习题 3483 令 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, 写出 $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 在极坐标 r 和 φ 下的形式.

解 1 按照 $u = u(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ 计算其全微分:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u'_x\,\mathrm{d}x + u'_y\,\mathrm{d}y \\
&= u'_x(\cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi) + u'_y(\sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi),
\end{aligned}$$

即可得到

$$\begin{aligned}
u'_r &= u'_x\cos\varphi + u'_y\sin\varphi, \\
u'_\varphi &= -u'_x r\sin\varphi + u'_y r\cos\varphi,
\end{aligned}$$

于是可见有

$$w = u'^2_x + u'^2_y = u'^2_r + \frac{1}{r^2}u'^2_\varphi. \quad \square$$

解 2　写出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$, 然后可以按照 $u=u(r(x,y),\varphi(x,y))$ 计算其全微分:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=u'_r\,\mathrm{d}r+u'_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=u'_r\Big(\frac{x}{r}\,\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\,\mathrm{d}y\Big)+u'_\varphi\Big(\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\Big),\end{aligned}$$

将其右边整理为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的线性式, 就得到

$$u'_x=\frac{xu'_r}{r}-\frac{yu'_\varphi}{r^2},\quad u'_y=\frac{yu'_r}{r}+\frac{xu'_\varphi}{r^2},$$

然后代入 w 的表达式中即可得到与解 1 相同的答案. □

6.4.3 多元函数的变量代换 II (习题 3484–3486, 3488–3511)

这一小节中的习题都涉及二阶偏导数的计算, 但在代换中不改变因变量. 注意在自变量、中间变量和因变量中, 自变量的二阶微分必定等于 0.

习题 3484 写出 $w=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$ 在极坐标 r 和 φ 下的形式.

解 1　利用在习题 3483 的解 2 中已经求出的

$$u'_x=\frac{xu'_r}{r}-\frac{yu'_\varphi}{r^2},\quad u'_y=\frac{yu'_r}{r}+\frac{xu'_\varphi}{r^2},$$

即可计算得到

$$\begin{aligned}u''_{xx}&=u''_{rr}\cdot\frac{x^2}{r^2}-2u''_{r\varphi}\cdot\frac{xy}{r^3}+u''_{\varphi\varphi}\cdot\frac{y^2}{r^4}+u'_r\cdot\frac{y^2}{r^3}+u'_\varphi\cdot\frac{2xy}{r^4},\\u''_{yy}&=u''_{rr}\cdot\frac{y^2}{r^2}+2u''_{r\varphi}\cdot\frac{xy}{r^3}+u''_{\varphi\varphi}\cdot\frac{x^2}{r^4}+u'_r\cdot\frac{x^2}{r^3}-u'_\varphi\cdot\frac{2xy}{r^4}.\end{aligned}$$

将两式相加即得

$$w=u''_{xx}+u''_{yy}=u''_{rr}+\frac{1}{r^2}\cdot u''_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}\cdot u'_r.\quad □$$

解 2　以 x,y 为自变量, 则有

$$\mathrm{d}^2u=u''_{xx}\,\mathrm{d}x^2+2u''_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+u''_{yy}\,\mathrm{d}y^2,$$

因此只要分别求出 $\mathrm{d}x=1,\mathrm{d}y=0$ 和 $\mathrm{d}x=0,\mathrm{d}y=1$ 时的两个 d^2u, 然后相加即可.

由于 r,φ 为中间变量, 因此有

$$\mathrm{d}^2u=u''_{rr}\,\mathrm{d}r^2+2u''_{r\varphi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi+u''_{\varphi\varphi}\,\mathrm{d}\varphi^2+u'_r\,\mathrm{d}^2r+u'_\varphi\,\mathrm{d}^2\varphi.$$

利用 r,φ 为极坐标, 因此有

$$\begin{aligned}&r\,\mathrm{d}r=x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y,&&r^2\,\mathrm{d}\varphi=x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x,\\&\mathrm{d}r^2+r\,\mathrm{d}^2r=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2,&&2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi+r^2\,\mathrm{d}^2\varphi=0.\end{aligned}$$

于是当 $\mathrm{d}x=1,\ \mathrm{d}y=0$ 时得到

$$\mathrm{d}r=\frac{x}{r},\quad \mathrm{d}\varphi=-\frac{y}{r^2},\quad \mathrm{d}^2r=\frac{y^2}{r^3},\quad \mathrm{d}^2\varphi=\frac{2xy}{r^4}.$$

这样就得到

$$u''_{xx} = \frac{x^2}{r^2} \cdot u''_{rr} - 2\frac{xy}{r^3} \cdot u''_{r\varphi} + \frac{y^2}{r^4} \cdot u''_{\varphi\varphi} + \frac{y^2}{r^3} \cdot u'_r + \frac{2xy}{r^4} \cdot u'_{\varphi}.$$

然后用相同的方法计算出 u''_{yy} 并与上述 u''_{xx} 相加即可, 从略. □

解 3 学过场论之后本题的答案可从 §8.17 中的几个习题的结论推出.

先根据 §8.17.2 的习题 4425, 有 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$. 若 $u = u(x, y)$, 则空间的柱坐标变换就是平面上的极坐标变换. 引用 §8.17.1 的习题 4415(a), 就得到 $\operatorname{grad} u = u'_r \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} u'_{\varphi} \boldsymbol{e}_{\varphi}$. 再引用 §8.17.2 的习题 4433, 就得到

$$\Delta u = (u'_r)'_r + \frac{1}{r} \cdot u'_r + \frac{1}{r} \cdot (\frac{1}{r} \cdot u'_{\varphi})'_{\varphi} = u''_{rr} + \frac{1}{r} \cdot u'_r + \frac{1}{r^2} \cdot u''_{\varphi\varphi}. \quad \square$$

习题 3485 写出 $w = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在极坐标 r 和 φ 下的形式.

解 以 x, y 为自变量, 则 w 在 $\mathrm{d}x = x$ 和 $\mathrm{d}y = y$ 时与 $\mathrm{d}^2 u$ 相等.

利用习题 3484 的解 2 中的推导, 在

$$r\,\mathrm{d}r = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y, \qquad r^2\,\mathrm{d}\varphi = x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}r^2 + r\,\mathrm{d}^2 r = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2, \quad 2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + r^2\,\mathrm{d}^2\varphi = 0$$

中用 $\mathrm{d}x = x$ 和 $\mathrm{d}y = y$ 代入, 就得到

$$\mathrm{d}r = r, \quad \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}^2 r = \mathrm{d}^2\varphi = 0.$$

将它们代入

$$\mathrm{d}^2 u = u''_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + 2u''_{r\varphi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + u''_{\varphi\varphi}\,\mathrm{d}\varphi^2 + u'_r\,\mathrm{d}^2 r + u'_{\varphi}\,\mathrm{d}^2\varphi,$$

即可得到

$$w = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r^2 u''_{rr}. \quad \square$$

习题 3486 写出 $w = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 在极坐标 r 和 φ 下的形式.

解 先用上一题 3485 的方法求 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

由一阶微分的形式不变性有 $\mathrm{d}z = z'_x\,\mathrm{d}x + z'_y\,\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z = z'_r\,\mathrm{d}r + z'_{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$, 因此只要计算 $\mathrm{d}x = x$ 和 $\mathrm{d}y = y$ 时的 $\mathrm{d}z$. 如上题所示, 这时 $\mathrm{d}r = r$, $\mathrm{d}\varphi = 0$, 因此就得到

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = r z'_r.$$

然后套用习题 3484, 3485 的结果 (只需将两题中的 u 改记为 z), 就有

$$\begin{aligned} w &= y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ &= r^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ &= r^2 \left(z''_{rr} + \frac{1}{r^2} \cdot z''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \cdot z'_r\right) - r^2 z''_{rr} - r z'_r = z''_{\varphi\varphi}. \quad \square \end{aligned}$$

习题 3488 引入新的自变量 $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, 解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

提示 在 §6.2.5 的习题 3326 中已见过这个弦振动方程, 又在该小节的习题 3353 的解 1 中对于 $a = 1$ 解出该方程, 其中的方法可用于本题. □

习题 3492 取 $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 为新的自变量, 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

提示 参见 §6.2.4 的习题 3308, 本题也是后面的习题 3502 的特例. □

习题 3496 取 $u = x + y$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ 为新的自变量, 变换方程

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

解 以 u, v 为中间变量. 由于方程可改写为

$$x^2 (z'_x - z'_y)'_x - y^2 (z'_x - z'_y)'_y = 0,$$

因此先计算

$$z'_x = z'_u - \frac{1}{x^2} z'_v,$$

$$z'_y = z'_u - \frac{1}{y^2} z'_v,$$

于是得到

$$z'_x - z'_y = \Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \Big) z'_v.$$

以下计算

$$(z'_v)'_x = z''_{uv} - \frac{1}{x^2} z''_{vv},$$

$$(z'_v)'_y = z''_{uv} - \frac{1}{y^2} z''_{vv}.$$

然后就可将所给的方程变成为

$$\begin{aligned} x^2 (z'_x - z'_y)'_x - y^2 (z'_x - z'_y)'_y &= x^2 \cdot \frac{2}{x^3} z'_v + \Big(\frac{x^2}{y^2} - 1 \Big) \Big(z''_{uv} - \frac{1}{x^2} z''_{vv} \Big) \\ &\quad + y^2 \cdot \frac{2}{y^3} z'_v - \Big(1 - \frac{y^2}{x^2} \Big) \Big(z''_{uv} - \frac{1}{y^2} z''_{vv} \Big), \\ &= 2v z'_v + \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 y^2} z''_{uv} = 0. \end{aligned}$$

从自变量 u, v 的代换公式可以得到 $\dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2 y^2} = uv(uv - 4)$, 于是新的方程为

$$z''_{uv} = \frac{2}{u(4 - uv)} z'_v.$$

若以 z'_v 为新的未知函数, 则就可作为一阶常微分方程求解. □

习题 3498 取 $u = x\tan\dfrac{y}{2}$, $v = x$ 为新的自变量, 变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

解 由方程可见, 若以 x, y 为自变量, 则在

$$\mathrm{d}^2 z = z''_{xx}\,\mathrm{d}x^2 + 2z''_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + z''_{yy}\,\mathrm{d}y^2$$

中令 $\mathrm{d}x = x$, $\mathrm{d}y = -\sin y$ 就可将方程化为 $\mathrm{d}^2 z = 0$.

以 u, v 为中间变量写出

$$\mathrm{d}^2 z = z''_{uu}\,\mathrm{d}u^2 + 2z''_{uv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + z''_{vv}\,\mathrm{d}v^2 + z'_u\,\mathrm{d}^2 u + z'_v\,\mathrm{d}^2 v.$$

然后先计算出

$$\mathrm{d}u = \tan\frac{y}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}^2 u = \sec^2\frac{y}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\tan\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y^2, \quad \mathrm{d}^2 v = 0.$$

于是当 $\mathrm{d}x = x$, $\mathrm{d}y = -\sin y$ 时就得到

$$\mathrm{d}u = 0, \quad \mathrm{d}v = x, \quad \mathrm{d}^2 u = -x\sin y, \quad \mathrm{d}^2 v = 0.$$

将以上结果代入 $\mathrm{d}^2 z$ 的前述表达式中, 就得到

$$x^2 z''_{vv} - x\sin y\, z'_u = 0.$$

最后将上述方程中的系数用新自变量表出, 就得到新方程为

$$z''_{v^2} - \frac{2u}{u^2+v^2}z'_u = 0. \quad \square$$

习题 3500 取 $u = x$, $v = y + z$ 为新的自变量, 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^3.$$

解 本题的新自变量与因变量 z 有关, 但 z 仍为因变量.

根据一阶微分的形式不变性, 以 u, v 为中间变量, 计算 z 的全微分:

$$\mathrm{d}z = z'_u\,\mathrm{d}u + z'_v\,\mathrm{d}v = z'_u\,\mathrm{d}x + z'_v\,(\mathrm{d}y + \mathrm{d}z),$$

并整理成为

$$(1 - z'_v)\,\mathrm{d}z = z'_u\,\mathrm{d}x + z'_v\,\mathrm{d}y,$$

即得到

$$z'_x = \frac{z'_u}{1 - z'_v}, \quad z'_y = \frac{z'_v}{1 - z'_v} = \frac{1}{1 - z'_v} - 1.$$

然后将 z'_y 对 x 求导得到

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= \left(\frac{1}{1 - z'_v} - 1\right)'_x = \frac{1}{(1 - z'_v)^2}(z'_v)'_x \\ &= \frac{1}{(1 - z'_v)^2}(z''_{uv} + z''_{vv}\cdot z'_x) \\ &= \frac{z''_{uv}}{(1 - z'_v)^2} + \frac{z''_{vv}z'_u}{(1 - z'_v)^3}. \end{aligned}$$

代入所给的方程就得到新的方程为

$$(1 - z'_v)z''_{uv} + z''_{vv}z'_u = 1. \quad \square$$

习题 3501 利用线性变换

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y,$$

把方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(其中 A, B 和 C 为常数, 且 $AC - B^2 < 0$) 变换为以下形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{1}$$

求满足方程 (1) 的函数的一般形式.

提示 若取 $A = a^2$, $B = 0$, $C = -1$, 又记 $y = t$, 则就变为习题 3488. 它与本题的计算是类似的. □

习题 3502 证明: 拉普拉斯方程

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

的形式在满足条件①

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

的任何非退化变换

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

下保持不变.

解 题意表明, 若 $z = z(x, y)$ 是方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 的解, 则当 φ, ψ 是满足柯西–黎曼方程的非退化变换时, $z(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ 是方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ 的解.

以 x, y 为中间变量, 则有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= z'_x \,\mathrm{d}x + z'_y \,\mathrm{d}y \\ &= z'_x(\varphi'_u \,\mathrm{d}u + \varphi'_v \,\mathrm{d}v) + z'_y(\psi'_u \,\mathrm{d}u + \psi'_v \,\mathrm{d}v) \\ &= (z'_x\varphi'_u + z'_y\psi'_u)\,\mathrm{d}u + (z'_x\varphi'_v + z'_y\psi'_v)\,\mathrm{d}v, \end{aligned}$$

这样就求出了

$$\begin{aligned} z'_u &= z'_x\varphi'_u + z'_y\psi'_u, \\ z'_v &= z'_x\varphi'_v + z'_y\psi'_v. \end{aligned}$$

然后即可计算得到

$$\begin{aligned} z''_{uu} + z''_{vv} &= (z'_x\varphi'_u + z'_y\psi'_u)'_u + (z'_x\varphi'_v + z'_y\psi'_v)'_v \\ &= z''_{xx}(\varphi'^2_u + \varphi'^2_v) + 2z''_{xy}(\varphi'_u\psi'_u + \varphi'_v\psi'_v) + z''_{yy}(\psi'^2_u + \psi'^2_v) \\ &\quad + z'_x(\varphi''_{uu} + \varphi''_{vv}) + z'_y(\psi''_{uu} + \psi''_{vv}). \end{aligned}$$

由于 $\varphi'_u = \psi'_v$, $\varphi'_v = -\psi'_u$, 因此就有 $\varphi'_u\psi'_u + \varphi'_v\psi'_v = 0$, $\varphi'^2_u + \varphi'^2_v = \psi'^2_u + \psi'^2_v$, 且有

① 这组等式经常称为柯西–黎曼方程. 在 §6.2.4 的习题 3308 已经见到过 (参看该题的解后的注).

$$\varphi''_{uu}+\varphi''_{vv}=(\psi'_v)'_u+(-\psi'_u)'_v=0,$$
$$\psi''_{uu}+\psi''_{vv}=(-\varphi'_v)'_u+(\varphi'_u)'_v=0,$$

于是得到

$$z''_{uu}+z''_{vv}=(\varphi'^2_u+\varphi'^2_v)(z''_{xx}+z''_{yy})=0.\quad\square$$

注 以上推导中没有用到题设中的变换非退化的条件. 实际上, 在条件

$$\varphi'^2_u+\varphi'^2_v=\psi'^2_u+\psi'^2_v=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}\neq 0$$

成立时, 就可保证变换 $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ 的反函数 (局部) 存在, 且可从 $z''_{uu}+z''_{vv}=0$ 反推出 $z''_{xx}+z''_{yy}=0$.

习题 3507 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

的形式在变换

$$u=x+z,\quad v=y+z$$

下保持不变.

解 条件表明 $\mathrm{d}^2z=z''_{xx}\,\mathrm{d}x^2+2z''_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+z''_{yy}\,\mathrm{d}y^2$ 在 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=1$ 时等于 0. 以新自变量 u,v 为中间变量, 则为了计算

$$\mathrm{d}^2z=z''_{uu}\,\mathrm{d}u^2+2z''_{uv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+z''_{vv}\,\mathrm{d}v^2+z'_u\,\mathrm{d}^2u+z'_v\,\mathrm{d}^2v,$$

只要先求出 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=1$ 时的 $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, d^2u 和 d^2v.

从变换的表达式可得到

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}z=1+\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}v=\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=1+\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}^2u=\mathrm{d}^2v=\mathrm{d}^2z=0.$$

于是就得到

$$\mathrm{d}^2z=(u''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv})(1+\mathrm{d}z)^2=0.$$

由于这时 $1+\mathrm{d}z=1+z'_x+z'_y$, 而非退化变换 $u=x+z, v=y+z$ 的雅可比行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1+z'_x & z'_y\\ z'_x & 1+z'_y\end{vmatrix}=1+z'_x+z'_y\neq 0,$$

因此得到 $u''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv}=0.\quad\square$

习题 3510 令 $\xi=\dfrac{y}{x}, \eta=\dfrac{z}{x}, \zeta=y-z$, 变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0.$$

解 1 (概要) 按照《习题集》对本题的提示, 引入算子

$$A=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z},$$

则可以验证所给的方程可表示成为 $A^2u-Au=0$. 然后可计算得到

$$Au=\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta},\quad A(Au)-Au=\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}=0.\quad\square$$

解 2 所给的方程表明, 在 $\mathrm{d}x=x$, $\mathrm{d}y=y$, $\mathrm{d}z=z$ 时就有 $\mathrm{d}^2u=0$. 然后以 ξ,η,ζ 为中间变量, 计算出

$$\mathrm{d}\xi=-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}\eta=-\frac{z}{x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}\zeta=\mathrm{d}y-\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}^2\xi=\frac{2y}{x^3}\,\mathrm{d}x^2-\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}^2\eta=\frac{2z}{x^3}\,\mathrm{d}x^2-\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}^2\zeta=0,$$

且用 $\mathrm{d}x=x$, $\mathrm{d}y=y$, $\mathrm{d}z=z$ 代入得到

$$\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}\eta=0,\quad \mathrm{d}\zeta=\zeta,\quad \mathrm{d}^2\xi=\mathrm{d}^2\eta=\mathrm{d}^2\zeta=0.$$

最后将以上结果一起代入

$$\mathrm{d}^2u=u''_{\xi\xi}\,\mathrm{d}\xi^2+u''_{\eta\eta}\,\mathrm{d}\eta^2+u''_{\zeta\zeta}\,\mathrm{d}\zeta^2+2u''_{\xi\eta}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta+2u''_{\eta\zeta}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta+2u''_{\zeta\xi}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi$$
$$+u'_\xi\,\mathrm{d}^2\xi+u'_\eta\,\mathrm{d}^2\eta+u'_\zeta\,\mathrm{d}^2\zeta,$$

即可见左边为 0, 右边除第三项之外也都等于 0, 因此即得到 $\zeta^2u''_{\zeta\zeta}=0$. $\square$

习题 3511 令①

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi,$$

把表达式

$$\Delta_1u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\quad \Delta_2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$

变换为球坐标下的形式.

解 1 按照《习题集》对本题的提示, 球坐标变换可分解为两个特殊的变换组成:

$$x=R\cos\theta,\quad y=R\sin\theta,\quad z=z;$$

$$R=r\sin\varphi,\quad \theta=\theta,\quad z=r\cos\varphi.$$

由于每一个都可以看成为关于某两个变量的极坐标变换, 而另一个变量不变, 因此只要套用前面的习题 3483 和 3484 的结论就可以了.

以下分别计算 Δ_1 和 Δ_2.

(1) 两次引用 §6.4.2 的习题 3483 的结论, 即可得到

$$\Delta_1u=u'^2_R+\frac{1}{R^2}\,u'^2_\theta+u'^2_z$$
$$=u'^2_r+\frac{1}{r^2}\,u'^2_\varphi+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\,u'^2_\theta.$$

(2) 先对第一个变换引用习题 3484 的结论, 就有

$$\Delta_2u=u''_{RR}+\frac{1}{R^2}\,u''_{\theta\theta}+\frac{1}{R}\,u'_R+u''_{zz}.$$

然后再作第二个变换. 这时再套用习题 3484 的结论, 就有

① 本书对球坐标代换采用 [11] 等多数教科书中的记号, 与原题略有不同, 即将记号 φ 与 θ 对换. 还应指出, 《习题集》在本题所用的球坐标代换记号与 §8.6 的三重积分一节中的记号也不一致.

$$u''_{RR}+u''_{zz}=u''_{rr}+\frac{1}{r^2}\,u''_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}\,u'_r,$$

同时又有

$$\frac{1}{R^2}\,u''_{\theta\theta}=\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\,u''_{\theta\theta},$$

$$\frac{1}{R}\,u'_R=\frac{1}{r\sin\varphi}\Big(u'_r\,\frac{R}{r}+u'_\varphi\,\frac{\cos\varphi}{r}\Big)=\frac{1}{r\sin\varphi}\Big(u'_r\,\sin\varphi+u'_\varphi\,\frac{\cos\varphi}{r}\Big)$$

(其中第二式套用极坐标变换 $y=r\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ 时的 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$), 于是就得到

$$\begin{aligned}\Delta_2u&=u''_{rr}+\frac{1}{r^2}\,u''_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}\,u'_r+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\,u''_{\theta\theta}+\frac{1}{r\sin\varphi}\Big(u'_r\,\sin\varphi+u'_\varphi\,\frac{\cos\varphi}{r}\Big)\\&=u''_{rr}+\frac{2}{r}\,u'_r+\frac{1}{r^2}\,u''_{\varphi\varphi}+\frac{\cot\varphi}{r^2}\,u'_\varphi+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\,u''_{\theta\theta}.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 学过场论之后本题的答案可从 §8.17 中的几个习题的结论推出.

首先, 如 §8.17.2 的习题 4434 所示, 考虑三维空间中的一般正交曲线坐标 u,v,w (柱坐标和球坐标只是它的特例). 这时的变换式为

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w).$$

固定其中两个变量, 变动另一个变量得到坐标线, 这样就可生成相互正交的三个单位向量 (其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$):

$$\boldsymbol{e}_u=\frac{1}{L}\,\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u},\quad \boldsymbol{e}_v=\frac{1}{M}\,\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v},\quad \boldsymbol{e}_w=\frac{1}{N}\,\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial w}.$$

引用 §8.17.1 的习题 4415(a) 的注, 就得到函数 $F=F(u,v,w)$ 的梯度为

$$\operatorname{grad}F=\frac{1}{L}F'_u\boldsymbol{e}_u+\frac{1}{M}F'_v\boldsymbol{e}_v+\frac{1}{N}F'_w\boldsymbol{e}_w.$$

其次, 拉普拉斯算子可以通过在梯度运算后接着散度运算得到, 这就是 §8.17.2 的习题 4425:

$$\Delta F=\nabla\cdot\nabla F=\operatorname{div}(\operatorname{grad}F).$$

然后引用习题 4434 的答案, 即对于 $\boldsymbol{a}=a_u\boldsymbol{e}_u+a_v\boldsymbol{e}_v+a_w\boldsymbol{e}_w$ 有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{LMN}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u)+\frac{\partial}{\partial v}(NL\,a_v)+\frac{\partial}{\partial w}(LM\,a_w)\Big].$$

综合以上结果就得到拉普拉斯算子在一般的正交曲线坐标系中的表达式为

$$\begin{aligned}\Delta F&=\operatorname{div}(\operatorname{grad}F)\\&=\frac{1}{LMN}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{MN}{L}F'_u\Big)+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{NL}{M}F'_v\Big)+\frac{\partial}{\partial w}\Big(\frac{LM}{N}F'_w\Big)\Big].\end{aligned}$$

回到本题, 改记 $F=u$, 这时对于球坐标 r,φ,θ 有 $L=1$, $M=r$, $N=r\sin\varphi$ (见习题 4434 的解), 于是得到

$$\Delta_1u=\|\operatorname{grad}u\|^2=u'^2_r+\frac{1}{r^2}\,u'^2_\varphi+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\,u'^2_\theta,$$

$$\begin{aligned}\Delta_2u&=\frac{1}{r^2\sin\varphi}\Big[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\varphi\,u'_r)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\,u'_\varphi)+\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\frac{1}{\sin\varphi}\,u'_\theta\big)\Big]\\&=u''_{rr}+\frac{2}{r}\,u'_r+\frac{1}{r^2}\,u'_\varphi+\frac{\cot\varphi}{r^2}\,u'_\varphi+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\,u''_{\theta\theta}.\quad\square\end{aligned}$$

6.4.4 多元函数的变量代换 III (习题 3512–3527)

这一小节仍涉及二阶偏导数的计算, 但在代换中因变量 (即函数) 也要改变.

习题 3513 取 $u=\dfrac{x}{y}$, $v=x$ 为新的自变量, 而 $w=xz-y$ 为新函数, 变换方程

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}.$$

解 将 $w=xz-y$ 对 y 求导, 得到 $w'_y=xz'_y-1$, 因此有

$$z'_y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}w'_y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot w'_u\cdot\Big(-\frac{x}{y^2}\Big)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}w'_u.$$

将上式再对 y 求导, 得到

$$\begin{aligned}z''_{yy}&=\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}w'_u\Big)'_y=\frac{2}{y^3}w'_u-\frac{1}{y^2}(w'_u)'_y\\&=\frac{2}{y^3}w'_u-\frac{1}{y^2}\cdot w''_{uu}\cdot\Big(-\frac{x}{y^2}\Big)=\frac{2}{y^3}w'_u+\frac{x}{y^4}w''_{uu}.\end{aligned}$$

将以上两个结果代入方程就有

$$yz''_{yy}+2z'_y=\frac{2}{y^2}w'_u+\frac{x}{y^3}w''_{uu}+\frac{2}{x}-\frac{2}{y^2}w'_u=\frac{2}{x},$$

整理后得到 $w''_{uu}=0$. □

习题 3514 取 $u=x+y$, $v=\dfrac{y}{x}$ 为新的自变量, 而 $w=\dfrac{z}{x}$ 为新函数, 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 以 x,y 为自变量, 则可见取 $\mathrm{d}x=1$, $\mathrm{d}y=-1$ 时所给的方程就是 $\mathrm{d}^2z=0$. 这时新自变量 u,v 为中间变量, 计算它们的微分得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y, &&\mathrm{d}^2u=0,\\&\mathrm{d}v=-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y, &&\mathrm{d}^2v=\frac{2y}{x^3}\,\mathrm{d}x^2-\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

用 $\mathrm{d}x=1$, $\mathrm{d}y=-1$ 代入得到 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}^2u=0$, $\mathrm{d}v=-\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{x}$, $\mathrm{d}^2v=\dfrac{2y}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}$.

又可类似地得到这时的函数 w 的微分为

$$\mathrm{d}w=w'_u\,\mathrm{d}u+w'_v\,\mathrm{d}v=w'_v\,\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}^2w=w''_{uu}\,\mathrm{d}u^2+2w''_{uv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+w''_{vv}\,\mathrm{d}v^2+w'_u\,\mathrm{d}^2u+w'_v\,\mathrm{d}^2v=w''_{vv}\,\mathrm{d}v^2+w'_v\,\mathrm{d}^2v.$$

最后从 $z=xw$ 出发计算得到 $\mathrm{d}z=w\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}w$, $\mathrm{d}^2z=2\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}^2w$. 用 $\mathrm{d}x=1$, $\mathrm{d}y=-1$ 代入得到

$$\begin{aligned}0=\mathrm{d}^2z&=2w'_v\,\mathrm{d}v+x(w''_{vv}\,\mathrm{d}v^2+w'_v\,\mathrm{d}^2v)\\&=2w'_v\Big(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\Big)+xw''_{vv}\Big(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}\Big)^2+xw'_v\Big(\frac{2y}{x^3}+\frac{2}{x^2}\Big)\\&=w''_{vv}\cdot\frac{(x+y)^2}{x^3}=w''_{vv}\frac{(1+v)^3}{u}.\end{aligned}$$

可见方程在代换后为 $w''_{vv}=0$. □

习题 3525 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)^2=0$$

的形式与变量 x,y 和 z 所分别担任的角色无关.

解 由对称性可见, 不妨只对于 x 为因变量而 y,z 为自变量的情况作出证明.

与 §6.4.2 的习题 3470 类似, 这只是从方程 $z-z(x,y)=0$ 中确定隐函数 $x=x(y,z)$. 为计算 x 的 3 个二阶偏导数, 采用全微分法.

记住 x 为因变量, y,z 为自变量. 又为了将自变量 z 与函数 $z(x,y)$ 区分开来, 将上述方程改记为 $z-f(x,y)=0$, 并将 f 的偏导数记为 f_1 和 f_2.

在 y,z 为自变量的约定下接连对方程 $z-f(x,y)=0$ 求两次微分得到

$$\mathrm{d}z-f_1\,\mathrm{d}x-f_2\,\mathrm{d}y=0,$$

$$-f_{11}\,\mathrm{d}x^2-2f_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-f_1\,\mathrm{d}^2x-f_{22}\,\mathrm{d}y^2=0,$$

其中利用了这时有 $\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}^2z=0$. 然后将上面的第一式改写为

$$\mathrm{d}x=-\frac{f_2}{f_1}\,\mathrm{d}y+\frac{1}{f_1}\,\mathrm{d}z,$$

并代入第二式, 则就可整理为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2x&=-\frac{f_{11}}{f_1}\,\mathrm{d}x^2-\frac{2f_{12}}{f_1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{f_{22}}{f_1}\,\mathrm{d}y^2\\&=-\frac{f_{11}}{f_1}\Big(\frac{f_2^2}{f_1^2}\,\mathrm{d}y^2-\frac{2f_2}{f_1^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{1}{f_1^2}\,\mathrm{d}z^2\Big)-\frac{2f_{12}}{f_1}\Big(-\frac{f_2}{f_1}\,\mathrm{d}y+\frac{1}{f_1}\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y\\&\qquad-\frac{f_{22}}{f_1}\,\mathrm{d}y^2\\&=\Big(-\frac{f_{11}f_2^2}{f_1^3}+\frac{2f_{12}f_2}{f_1^2}-\frac{f_{22}}{f_1}\Big)\,\mathrm{d}y^2+2\Big(\frac{f_{11}f_2}{f_1^3}-\frac{f_{12}}{f_1^2}\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\frac{f_{11}}{f_1^3}\,\mathrm{d}z^2.\end{aligned}$$

这样就得到了 x 关于自变量 y,z 的所有二阶偏导数, 然后计算得到

$$\begin{aligned}x''_{yy}x''_{zz}-x''^2_{yz}&=\Big(-\frac{f_{11}f_2^2}{f_1^3}+\frac{2f_{12}f_2}{f_1^2}-\frac{f_{22}}{f_1}\Big)\cdot\Big(-\frac{f_{11}}{f_1^3}\Big)-\Big(\frac{f_{11}f_2}{f_1^3}-\frac{f_{12}}{f_1^2}\Big)^2\\&=\frac{f_{11}^2f_2^2}{f_1^6}-\frac{2f_{12}f_{11}f_2}{f_1^5}+\frac{f_{11}f_{22}}{f_1^4}-\Big(\frac{f_{11}^2f_2^2}{f_1^6}-\frac{2f_{11}f_{12}f_2}{f_1^5}+\frac{f_{12}^2}{f_1^4}\Big)\\&=\frac{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}{f_1^4}=0,\end{aligned}$$

其中最后利用函数 $z=f(x,y)$ 满足所给的方程. □

习题 3527 运用勒让德变换

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial z}{\partial y},\quad Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z,$$

其中 $Z=Z(X,Y)$, 变换方程

$$A\Big(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\Big(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\Big(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解　求 Z 的全微分

$$\mathrm{d}Z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}X + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}Y - \mathrm{d}z = x\,\mathrm{d}X + y\,\mathrm{d}Y,$$

于是就得到

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = x, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = y.$$

然后对以上两式再求其微分, 则得到

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\,\mathrm{d}X + \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\,\mathrm{d}Y,$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\,\mathrm{d}X + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\,\mathrm{d}Y.$$

又从新自变量的定义 $X = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial z}{\partial y}$ 求微分, 则得到

$$\mathrm{d}X = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}Y = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y.$$

将以上两次计算的结果写为矩阵向量形式并将它们合并为一个等式, 就可得到

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}X\\ \mathrm{d}Y\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}.$$

这表明等号右边两个矩阵互为另一个的逆矩阵. 将它们分别记为 H_Z 和 H_z, 则它们的行列式都不等于 0. 于是就可得到

$$H_z = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{|H_Z|}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} & -\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\ -\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\end{pmatrix},$$

其中 $|H_Z|$ 是矩阵 H_Z 的行列式.

这样就将 $z = z(x,y)$ 的二阶偏导数用 $Z = Z(X,Y)$ 的二阶偏导数表出, 即有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{|H_Z|}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{|H_Z|}\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{|H_Z|}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}.$$

将它们代入所给的方程中, 就得到变换后的方程为

$$A(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} + C(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0. \quad \square$$

注　本题为涉及两个自变量的勒让德变换. 其中求解的过程可以与 §2.5.2 的习题 1144 中的求导过程作比较. 又可参见 §6.4.1 的习题 3457 的注.

§6.5 几何上的应用 (习题 3528–3580)

内容简介　本节按照以下内容分为三个小节: (1) 曲线的切线和法平面, (2) 曲面的切平面和法线, (3) 包络线与包络面.

6.5.1 曲线的切线和法平面 (习题 3528–3538)

空间曲线的切线和法平面的计算方法因曲线的给定方式不同而有所不同. 空间曲线主要有两种给定方式.

(1) 曲线由下列参数方程给定:

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),\quad (\alpha < t < \beta),$$

其中函数 $x(t), y(t), z(t)$ 连续可微. 在 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为 0 的点处, 曲线存在切线, 其切向量为 $\pm[x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} + z'(t)\boldsymbol{k}]$. 由此即可写出其切线方程和法平面方程.

(2) 曲线由两个曲面的交线给定:

$$F(x,y,z) = 0,\quad G(x,y,z) = 0,$$

其中 F, G 为连续可微函数. 若点 P_0 在两个曲面的交线上, 且在该点的雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix}$$

满秩, 即在该点的两个梯度向量 $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ 和 $\nabla G = (G'_x, G'_y, G'_z)$ 不共线, 则在点 P_0 附近曲面的交线有切线, 其切方向与上述两个梯度向量正交, 因此切向量为

$$\pm\nabla F \times \nabla G.$$

习题 3530 写出曲线 $y = x,\ z = x^2$ 在点 $M(1,1,1)$ 的切线和法平面的方程.

解 1　这时的曲线由两个曲面的方程

$$F(x,y,z) = y - x = 0,\quad G(x,y,z) = z - x^2 = 0$$

确定. 写出在点 $M(1,1,1)$ 的两个梯度向量

$$\nabla F\big|_{(1,1,1)} = (-1,1,0),\quad \nabla G\big|_{(1,1,1)} = (-2,0,1),$$

则就得到切向量为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

于是即可写出切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2},$$

同时得到其法平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1) = 0,$, 整理为 $x + y + 2z = 4$.　□

解 2　引入参数 t, 将曲线用参数方程 $x = t, y = t, z = t^2$ 表出, 则点 $M(1,1,1)$ 对应的参数值 $t_0 = 1$. 于是即可求出切向量为

$$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = (1, 1, 2).$$

以下计算同解 1. □

习题 3536 证明: 斜驶线

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = \mathrm{e}^{k\varphi} \quad (k \text{ 为常数})$$

(其中 φ 是地球上点的经度, ψ 是地球上点的纬度) 与地球的一切子午线相交成定角.

解 按照经度 φ 和纬度 ψ, 地球表面的点的直角坐标方程为

$$x = R\cos\psi\cos\varphi, \quad y = R\cos\psi\sin\varphi, \quad z = R\sin\psi.$$

其中 R 为地球半径.

子午线就是经线, 即在上述方程中取 φ 为常数所得的曲线, 因此其切向量为

$$\boldsymbol{r}_1 = (-R\sin\psi\cos\varphi, -R\sin\psi\sin\varphi, R\cos\psi).$$

从题设的斜驶线方程可以确定 $\varphi = \varphi(\psi)$, 将它代入前述坐标方程即可得到以 ψ 为参数的斜驶线的参数方程为

$$x = R\cos\psi\cos\varphi(\psi), \quad y = R\cos\psi\sin\varphi(\psi), \quad z = R\sin\psi.$$

将此斜驶线的参数方程对 ψ 求导, 并利用题中给出的 φ 与 ψ 的关系式求出

$$\varphi'_\psi = \frac{1}{2k}\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)} = \frac{1}{k\cos\psi},$$

然后就可计算得到斜驶线的切向量为

$$\boldsymbol{r}_2 = \left(-R\sin\psi\cos\varphi - \frac{R}{k}\sin\varphi, -R\sin\psi\sin\varphi + \frac{R}{k}\cos\varphi, R\cos\psi\right).$$

由于两个切向量的长度分别为 $\|\boldsymbol{r}_1\| = R$ 和 $\|\boldsymbol{r}_2\| = R\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$, 而它们的标量积为 $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = R^2$, 因此从余弦定理可知斜驶线与子午线的相交角为常值:

$$\cos(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1\| \cdot \|\boldsymbol{r}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}. \quad \square$$

注 斜驶线也称为斜航线. 如本题所示, 按照斜驶线航行时, 只要使前进方向与罗盘指针的夹角不变即可, 因此相当方便. 然而可以证明, 一般来说, 斜驶线不是从一地到另一地的最短航线①. 由于斜驶线将以无限盘旋的螺线方式趋于地极, 因此在高纬度区域内其使用价值更为有限.

6.5.2 曲面的切平面和法线 (习题 3539–3565)

与曲线的情况类似, 曲面的切平面和法线的计算方法因曲面的给定方式不同而有所不同. 曲面主要有三种给定方式.

① 球面上联接两点的距离最短的曲线只能是该球面上的大圆弧. 而在地球上除了赤道和经线之外的大圆弧都不是斜驶线.

(1) 曲面由二元函数的显表达式 $z=f(x,y)$ (或 $x=g(y,z), y=h(z,x)$) 给定.

若点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $z_0=f(x_0,y_0)$, 且 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 则曲面 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 存在切平面, 其法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm\big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1\big).$$

(2) 曲面由方程 $F(x,y,z)=0$ 给定.

由隐函数存在定理知道, 若点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足条件 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, F 在点 P_0 连续可微, 且在该点的梯度向量 ∇F 不是零向量, 则方程在点 P_0 的一个邻域内确定形式为 $z=z(x,y)$ 或 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 的曲面, 且在点 P_0 有相应的切平面. 这时曲面在点 P_0 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm\nabla F\big|_{P_0}.$$

(3) 曲面由双参数方程给定:

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v).$$

由经纬度确定地面上点的位置就是双参数曲面的最常见例子 (参见 §6.5.1 的习题 3536).

若点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的坐标由参数值 $u=u_0, v=v_0$ 通过上述参数方程给定, 设 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 的一个邻域内连续可微, 且其雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

在点 (u_0,v_0) 处满秩, 则由隐函数组存在定理知道, 前述的双参数方程在点 P_0 的一个邻域内确定形式为 $z=z(x,y)$ 或 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 的曲面, 且在点 P_0 有相应的切平面. 记 $\boldsymbol{r}_1=(x'_u,y'_u,z'_u)\big|_{(u_0,v_0)}$, $\boldsymbol{r}_2=(x'_v,y'_v,z'_v)\big|_{(u_0,v_0)}$, 则曲面在点 P_0 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\pm\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big).$$

注　对于以上情况 (1) 中的显表达式 $z=f(x,y)$, 若令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$, 则就成为情况 (2) 的特例; 又若令 $x=u, y=v, z=f(u,v)$, 则就成为情况 (3) 的特例.

习题 3545 写出曲面 $x=a\cos\psi\cos\varphi, y=b\cos\psi\sin\varphi, z=c\sin\psi$ 在点 $M_0(\varphi_0,\psi_0)$ 的切平面和法线的方程.

解 1　记 $x_0=a\cos\psi_0\cos\varphi_0$, $y_0=b\cos\psi_0\sin\varphi_0$, $z_0=c\sin\psi_0$.

如前所述, 不妨先计算三个雅可比行列式:

$$\begin{vmatrix} -b\sin\psi\sin\varphi & c\cos\psi \\ b\cos\psi\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}=-bc\cos^2\psi\cos\varphi,$$

$$\begin{vmatrix} c\cos\psi & -a\sin\psi\cos\varphi \\ 0 & -a\cos\psi\sin\varphi \end{vmatrix}=-ac\cos^2\psi\sin\varphi,$$

$$\begin{vmatrix} -a\sin\psi\cos\varphi & -b\sin\psi\sin\varphi \\ -a\cos\psi\sin\varphi & b\cos\psi\cos\varphi \end{vmatrix}=-ab\sin\psi\cos\psi,$$

于是该曲面在点 M_0 的法向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\Big(\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a},\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b},\frac{\sin\psi_0}{c}\Big)=\Big(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\Big),$$

其中约去了因子 $-abc\cos\psi_0$. 由于 $\cos\psi_0=0$ 时上述三个雅可比行列式均等于 0, 因此违反了前述雅可比矩阵满秩的条件. 实际上这种情况对应的两个点为 $(0,0,\pm c)$, 而参数值 φ 是任意的. 题设的双参数表示方法对这两个特殊点是不合适的, 这与地球上的北极和南极的经度不定是一样的. 然而约去这个因子后得到的 $\boldsymbol{n}$ 对这两个点也是适用的.

于是可写出切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(X-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(Y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(Z-z_0)=0,$$

还可整理为

$$\frac{x_0}{a^2}X+\frac{y_0}{b^2}Y+\frac{z_0}{c^2}Z=1.$$

同时可写出法线方程为

$$\frac{X-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{Y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{Z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}.\quad\square$$

解 2 (概要) 本题的曲面可用下列方程给定:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

这时的计算要简单得多, 而且在点 $(0,0,\pm c)$ 也不会有困难, 从略. □

习题 3548 求曲面

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3$$

的切平面当切点 $M(u,v)$ $(u\neq v)$ 无限接近于曲面的边界线 $u=v$ 上的点 $M_0(u_0,v_0)$ 时的极限位置.

解 本题的曲面在 §6.3.3 的习题 3407 中已经研究过, 该曲面的双参数方程中的 $x=u+v$ 和 $y=u^2+v^2$ 将 uOv 平面上由 $u<v$ 和 $u>v$ 所定义的两个半开平面同时映射成为在坐标面 xOy 上的区域 $y>\frac{1}{2}x^2$. 在此区域上有曲面 $z=z(x,y)$. 在该题中已经求出了当 $u\neq v$ 时有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-3uv,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v),$$

因此在点 $M(u,v)$ 处的切平面即是

$$-3uv(X-x)+\frac{3}{2}(u+v)(Y-y)-(Z-z)=0.$$

其中 $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$.

令点 $M(u,v)$ 趋于点 $M_0(u_0,u_0)$, 则就可整理得到切平面的极限位置为下列平面:

$$\frac{3}{2}y_0(X-x_0)-\frac{3}{2}x_0(Y-y_0)+Z-z_0=0,$$

其中 $x_0=2u_0$, $y_0=2u_0^2$, $z_0=2u_0^3$. □

注 若从题设的双参数方程消去 u,v, 即可得到本题的曲面的显表达式为

$$z = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{2}x^3.$$

由于这个表达式在整个坐标面 xOy 上有定义, 因此在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 处存在切平面. 于是这里的情况与前面的习题 3545 的解 1 中出现两个特殊点的情况有类似之处, 即由于本题的双参数表示方法本身的缺陷, 它只对于 $y \geqslant \frac{1}{2}x^2$ 有效, 且只能于 $u \neq v$ 时写出切平面, 从而当 $u = v$ 时只能用题设的方法求出此时的切平面的极限位置. 而实际上从上述方程 $z(x, y)$ 看, 该处的切平面本来就是存在的. 在满足 $y_0 = \frac{1}{2}x_0^2$ 的点 (x_0, y_0, z_0) 处直接写出的切平面方程与前面题解得到的结果完全相同.

习题 3556 求椭球面

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

在各坐标面上的投影.

解 先考虑在坐标面 xOy 上的投影. 显然投影的边界曲线是由椭球面上法向量平行于坐标面 xOy 的那些点投影而成的. 由于椭球面的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \pm(2x - y, 2y - x, 2z),$$

因此取 $z = 0$ 即可. 于是本题的椭球面在坐标面 xOy 上的投影是以 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 为边界的椭圆.

同样可知该椭球面在坐标面 zOx 上的投影是以 $\frac{3}{4}x^2 + z^2 = 1$ 为边界的椭圆, 而在坐标面 yOz 上的投影是以 $\frac{3}{4}y^2 + z^2 = 1$ 为边界的椭圆. □

习题 3557 分正方形 $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 为直径不大于 δ 的有限个部分 σ. 若曲面

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

在属于同一部分 σ 的任何两点 $P(x, y)$ 及 $P_1(x_1, y_1)$ 的法线方向相差小于 $1°$, 求数 δ 的上界.

解 点 $P(x, y)$ 和 $P_1(x_1, y_1)$ 对应的曲面上的两个点处的法向量可取为

$$\boldsymbol{n} = (-2x, -2y, -1), \quad \boldsymbol{n}_1 = (-2x_1, -2y_1, -1),$$

可见有 $\|\boldsymbol{n}\| \geqslant 1$, $\|\boldsymbol{n}_1\| \geqslant 1$. 它们的夹角 φ 可以从上述两个向量的向量积得到, 即有

$$|\sin\varphi| = \frac{\|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_1\|}{\|\boldsymbol{n}\| \cdot \|\boldsymbol{n}_1\|} \leqslant \|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_1\|.$$

计算 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_1$ 的模得到

$$\|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_1\| = 2\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + 4(xy_1 - x_1y)^2}.$$

在 $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ 时对上述根号下的第三项可作如下估计

$$\begin{aligned}(xy_1 - x_1y)^2 &= [(xy_1 - xy) + (xy - x_1y)]^2 = [x(y_1 - y) + y(x - x_1)]^2 \\ &\leqslant 2x^2(y_1 - y)^2 + 2y^2(x_1 - x)^2 \leqslant 2[(y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2].\end{aligned}$$

记 $\rho(P_1, P) = \sqrt{(y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2}$ 为点 P 与 P_1 之间的距离, 则就可以从 $|\sin\varphi| \leqslant \|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_1\|$ 和上述估计得到 $|\sin\varphi| \leqslant 6\rho(P_1, P)$, 从而有估计

$$|\varphi| \leqslant 6\rho(P_1, P) \cdot \frac{|\varphi|}{|\sin\varphi|} \approx 6\rho(P_1, P),$$

其中利用 $\varphi < 1°$ 时, 有 $\dfrac{|\varphi|}{|\sin\varphi|} \approx 1$[①]. 由于点 P_1 和 P 同属一个 σ 时, 距离 $\rho(P_1, P)$ 不超过 σ 的直径, 因此只要 $6\delta \leqslant \dfrac{\pi}{180}$ (这是 $1°$ 的角度在弧度制中的数值), 即当

$$\delta \leqslant \frac{\pi}{6 \times 180} \approx 0.003,$$

就可以保证角度 $|\varphi|$ 不超过 $1°$. □

注 在 [5] 中得到了更宽裕的上界 $\delta < 0.008\,727$.

习题 3558 (李雅普诺夫不等式) 设

$$z = f(x, y), \quad 其中\ (x, y) \in D \tag{1}$$

为曲面的方程. $\varphi(P_1, P)$ 为曲面 (1) 在点 $P(x, y) \in D$ 及 $P_1(x, y) \in D$ 二点的法线之间的夹角. 证明: 若 D 为有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内具有有界的二阶导数, 则有不等式

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P)$$

成立, 其中 C 为常数, $\rho(P_1, P)$ 为点 P 与 P_1 之间的距离.

分析 本题的问题与上一个习题 3557 类似, 证明的思路也相同, 只是习题 3557 是对于一个简单函数的一个数值分析, 而本题要证明的却是适用于一般情况的一个通用不等式. 从以下的证明过程还会发现, 本题又与 §6.2.1 的习题 3254 有关. 在 [5, 9, 25] 中都指出, 在本题中必须补充 D 为凸的条件, 否则结论不能成立. 这与习题 3254 的注 3 是一致的. □

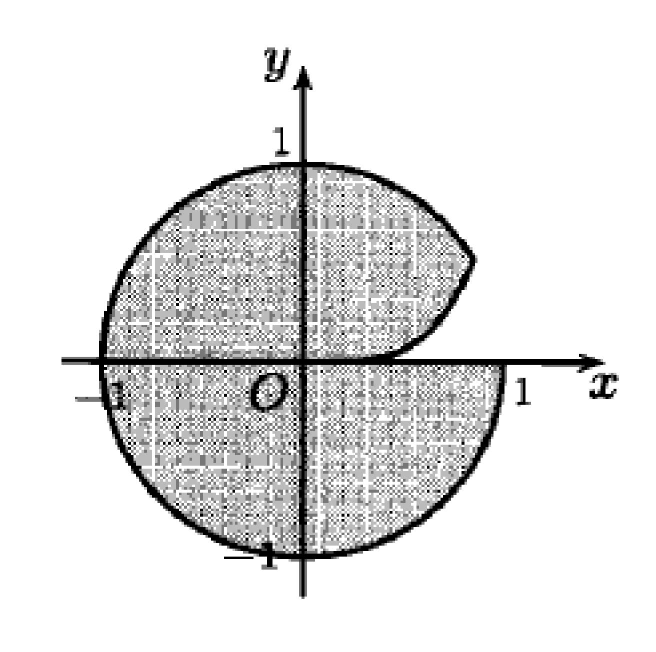
解 首先将习题 3254 的注 3 中的例子改造一下, 用以说明对本题的区域 D 必须增加凸性条件才行.

由于本题的区域 D 是有界闭区域, 因此将习题 3254 的注 3 中的开区域 E 取闭包 (即单位圆), 然后如附图所示去掉一个曲边的扇形, 其定义如下:

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, 而当\ x > 0, y > 0\ 时\ y \geqslant x^4\}.$$

然后在 D 上定义 (与习题 3254 的注 3 相同):

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3, & 如\ (x, y) \in D\ 且\ x > 0, y > 0, \\ 0, & 如\ (x, y)\ 是\ D\ 中的其他点. \end{cases}$$



习题 3558 的附图

现在取点 $P_1(x, x^3), P(x, -x^3) \in D$, 其中 $0 < x < 1/2$. 于是有 $\rho(P_1, P) = 2x^3$. 根据函数 f 的定义, 在这两个点处的法向量分别为 $\boldsymbol{n_1} = (3x^2, 0, -1)$, $\boldsymbol{n} = (0, 0, -1)$. 于是它们的向量积为 $\boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n} = 3x^2\boldsymbol{j}$, 因此有

① 不难计算得到, 因子 $\left|\dfrac{\varphi}{\sin\varphi}\right|$ 在 $|\varphi| < 1°$ 时不超过 1.000 051.

$$|\sin\varphi(P_1,P)| = \frac{\|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n_1}\|}{\|\boldsymbol{n}\|\cdot\|\boldsymbol{n}_1\|} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+9x^4}}.$$

这样就有

$$\frac{|\varphi(P_1,P)|}{\rho(P_1,P)} \geqslant \frac{|\sin\varphi(P_1,P)|}{\rho(P_1,P)} = \frac{3x^2}{2x^3\sqrt{1+9x^4}} \to +\infty \ (x\to +0),$$

从而不可能存在常数 C, 使得 $\varphi(P_1,P)\leqslant C\rho(P_1,P)$ 在 D 上成立.

现在设题中的 D 为凸有界闭区域.

由于 f 在 D 上的所有二阶偏导数有界, 因此可引用 §6.2.1 的习题 3254 推出 f 的所有一阶偏导数连续 (参见 §6.2.1 的前言、附图及其注). 由于有界闭区域上的连续函数必定有界, 从而存在常数 M, 使得在 D 上 $|z'_x|\leqslant M$ 和 $|z'_y|\leqslant M$ 成立.

记点 $P_1,P\in D$ 所对应的曲面上的点处的法向量为

$$\boldsymbol{n_1} = (z'_x(P_1), z'_y(P_1), -1), \quad \boldsymbol{n} = (z'_x(P), z'_y(P), -1).$$

然后重复习题 3557 中的计算, 就有

$$|\sin\varphi(P_1,P)| = \frac{\|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n_1}\|}{\|\boldsymbol{n}\|\cdot\|\boldsymbol{n_1}\|} \leqslant \|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n_1}\|$$
$$= \sqrt{[z'_x(P_1)-z'_x(P)]^2+[z'_y(P_1)-z'_y(P)]^2+[z'_x(P)z'_y(P_1)-z'_x(P_1)z'_y(P)]^2}.$$

由于根号下的第三项满足以下估计:

$$\begin{aligned}&\big[z'_x(P)z'_y(P_1)-z'_x(P_1)z'_y(P)\big]^2\\&=\big\{z'_x(P)[z'_y(P_1)-z'_y(P)]+z'_y(P)[z'_x(P)-z'_x(P_1)]\big\}^2\\&\leqslant 2M^2\big\{[z'_x(P_1)-z'_x(P)]^2+[z'_y(P_1)-z'_y(P)]^2\big\}.\end{aligned}$$

这样就得到

$$|\sin\varphi(P_1,P)| \leqslant \sqrt{1+2M^2}\cdot\sqrt{[z'_x(P_1)-z'_x(P)]^2+[z'_y(P_1)-z'_y(P)]^2}.$$

根据题设条件, 偏导函数 z'_x 和 z'_y 具有有界的偏导数, 再次引用习题 3254 的结论及其注 1, 可知 z'_x 和 z'_y 都是在 D 上满足利普希茨条件的连续函数. 从而不妨设前面所用的常数 M 已经足够大, 使得当点 $P_1,P\in D$ 时, 还同时成立不等式

$$|z'_x(P_1)-z'_x(P)|\leqslant M\rho(P_1,P), \quad |z'_y(P_1)-z'_y(P)|\leqslant M\rho(P_1,P).$$

这样就得到

$$|\sin\varphi(P_1,P)|\leqslant\sqrt{1+2M^2}\cdot\sqrt{2}M\rho(P_1,P).$$

最后, 由于当 $\rho(P_1,P)$ 充分小时, 夹角 $\varphi(P_1,P)$ 为锐角. 利用当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时的若尔当不等式 $x\leqslant\frac{\pi}{2}\sin x$ (见 §2.7.2 的习题 1290), 就得到李雅普诺夫不等式:

$$\varphi(P_1,P)\leqslant\frac{\pi}{2}\sqrt{1+2M^2}\cdot\sqrt{2}M\rho(P_1,P). \quad \square$$

注　对于夹角 $\varphi(P_1,p)$ 何时为锐角作一个补充. 利用余弦定理

$$\cos\varphi(P_1,P) = \frac{\|\boldsymbol{n}_1\|^2+\|\boldsymbol{n}\|^2-\|\boldsymbol{n_1}-\boldsymbol{n}\|^2}{2\|\boldsymbol{n}_1\|\cdot\|\boldsymbol{n}\|},$$

可见分子大于 0 等价于夹角为锐角.

由于 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的模大于等于 1, 而

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{n_1}-\boldsymbol{n}\|^2&=[z'_x(P_1)-z'_x(P)]^2+[z'_y(P_1)-z'_y(P)]^2\\&\leqslant 2M^2\rho^2(P_1,P),\end{aligned}$$

因此只要 $\rho(P_1,P)<\dfrac{1}{M}$, 就保证 $\varphi(P_1,P)$ 为锐角. 这时前面的证明有效. 对于 $\rho(P_1,P)\geqslant\dfrac{1}{M}$ 的情况, 适当放大常数 C, 例如取 C 是前述估计值与 $M\pi$ 中的较大的一个数, 就可以使李雅普诺夫不等式对任何情况成立.

习题 3562 当 $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$ 时, 经过每一点 $M(x,y,z)$ 有三个二次曲面

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=-1\ \ (a>b>c>0).$$

证明: 这些曲面是正交的.

解 首先要对于题设条件, 即经过每一个点存在三个曲面进行讨论. 它们必须对应于三个互异的 λ 值. 显然过原点是不可能有任何这样的曲面的. 由于将题设的曲面表达式通分后得到关于 λ^2 的不超过三次的代数方程, 因此即可看出对于任何坐标面上的点也不可能存在题设的三个曲面.

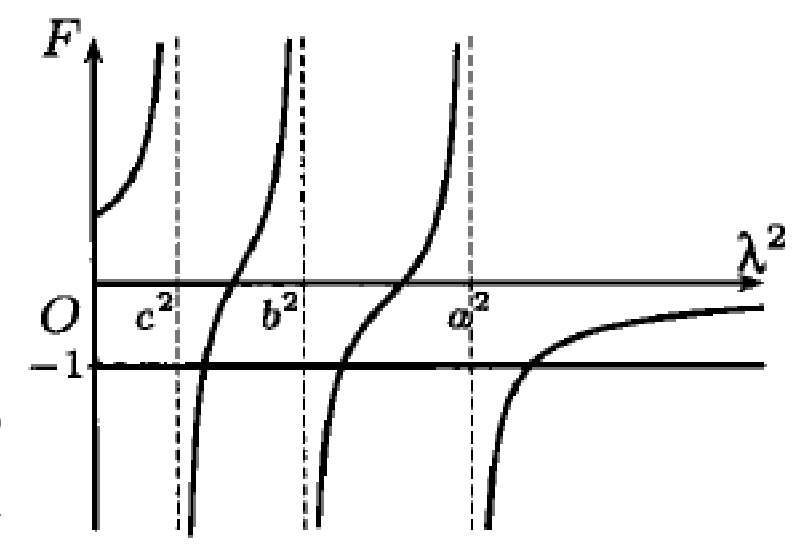
以下只需要对于坐标均大于 0 的点 $M(x,y,z)$ 作讨论.

如附图所示, 作出以 λ^2 为自变量的函数

$$F(\lambda^2)=\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}$$

的图像. 则有 $\lambda^2=c^2,b^2,a^2$ 三条垂直渐近线, 又以 $F=0$ 为水平渐近线.

由于 $F(c^2-0)=F(b^2-0)=F(a^2-0)=+\infty$, $F(c^2+0)=F(b^2+0)=F(a^2+0)=-\infty$, 因此在区间 (c^2,b^2), (b^2,a^2) 和 $(a^2,+\infty)$ 上 F 的图像与水平直线 $F=-1$ 必定相交, 从而得到 λ 的三个根.



习题 3562 的附图

如前所述, 这就是给定 $M(x,y,z)$ 时所要求的三个相异实根, 记为 λ_1, λ_2 和 λ_3, 且不可能再有其他根了.

曲面在点 $M(x,y,z)$ 处的法向量可从方程直接求出为

$$\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{2x}{a^2-\lambda_1^2},\frac{2y}{b^2-\lambda_1^2},\frac{2z}{c^2-\lambda_1^2}\right),$$

$$\boldsymbol{n}_2=\left(\frac{2x}{a^2-\lambda_2^2},\frac{2y}{b^2-\lambda_2^2},\frac{2z}{c^2-\lambda_2^2}\right),$$

$$\boldsymbol{n}_3=\left(\frac{2x}{a^2-\lambda_3^2},\frac{2y}{b^2-\lambda_3^2},\frac{2z}{c^2-\lambda_3^2}\right).$$

它们的正交性可以直接计算得到. 例如

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2 &= \frac{4x^2}{(a^2-\lambda_1^2)(a^2-\lambda_2^2)}+\frac{4y^2}{(b^2-\lambda_1^2)(b^2-\lambda_2^2)}+\frac{4z^2}{(c^2-\lambda_1^2)(c^2-\lambda_2^2)}\\ &= \frac{4x^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\Big(\frac{1}{a^2-\lambda_1^2}-\frac{1}{a^2-\lambda_2^2}\Big)+\frac{4y^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\Big(\frac{1}{b^2-\lambda_1^2}-\frac{1}{b^2-\lambda_2^2}\Big)\\ &\qquad +\frac{4z^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\Big(\frac{1}{c^2-\lambda_1^2}-\frac{1}{c^2-\lambda_2^2}\Big)\\ &= \frac{4}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}[F(\lambda_1^2)-F(\lambda_2^2)]\\ &= \frac{4}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}[-1-(-1)]=0.\end{aligned}$$

其余从略. □

6.5.3 包络线和包络面计算 (习题 3566–3580)

给定含有单参数的一族曲线, 设其方程为

$$F(x,y,a)=0,$$

则在一定条件下有可能存在曲线族之外的某一曲线, 它与上述曲线族内的每一曲线相切. 称此曲线为曲线族的包络线.

关于包络线的介绍材料在数学分析教科书中首推 [11] 的第一卷的 238 和 239 小节. 这里只指出, 若 F 关于 x,y,a 连续可微, 则当存在包络线时, 它可以从

$$F(x,y,a)=0,\quad F'_a(x,y,a)=0$$

中消去 a 而得到. 一般称所得到的曲线为判别曲线, 因其中除了可能包含包络线 (若存在的话), 还可能是曲线族的奇点的轨迹①, 甚至还可能是曲线族中某参数值对应的一条曲线.

以上概念可以推广到空间中的曲面族, 相应地得到包络面②, 并有相似的计算方法.

这里只指出, 对于以如下方式给出的曲线族

$$F(x,y,a,b)=0,\quad C(a,b)=0,$$

则除了用 $C(a,b)=0$ 消去 F 中的一个参数的方法之外, 还可以用后面 §6.7.2 中的拉格朗日乘子的方法来做. 这就是引入辅助函数

$$L=F(x,y,a,b)+\lambda C(a,b),$$

然后从

$$L'_a=0,\quad L'_b=0,\quad C=0,\quad F=0$$

中消去 a,b 和 λ 即可得到判别曲线.

利用隐函数存在定理即可知道这个方法与消去两个参数之一后再用前面的对单参数曲线族求包络线的方法是一样的. 此外, 这个方法也可以推广于包络面的计算中.

---

① 对于平面曲线 $F(x,y)=0$, 在奇点处的梯度 ∇F 必须为零向量. 见后面的 §6.6.2 中关于奇点的定义.

② 在《习题集》的 §6.3 中, 习题 3426–3429 就是与含有参数的曲面族的包络面有关的习题. 由于其中还含有任意函数, 因此问题是求出包络面所满足的偏微分方程.

习题 3570 设有长为 l 的线段, 其两端沿不同坐标轴滑动, 求所产生的线段族的包络线.

解 1 从原点作该直线段的垂直线, 取其与 Ox 的夹角 θ 为参数, 则可见直线段与坐标轴相交点的坐标分别为 $l\sin\theta$ 和 $l\cos\theta$. 因此即可写出其 (截距式) 直线方程为[①]

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=l.$$

将此方程对参数 θ 求导, 得到

$$\frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta}.$$

又将上式改写为

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sin\theta}-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\cos\theta}=0,$$

然后与前述直线方程联合, 看成为关于 $\sin^{-1}\theta$ 和 $\cos^{-1}\theta$ 的线性方程组, 即可解出

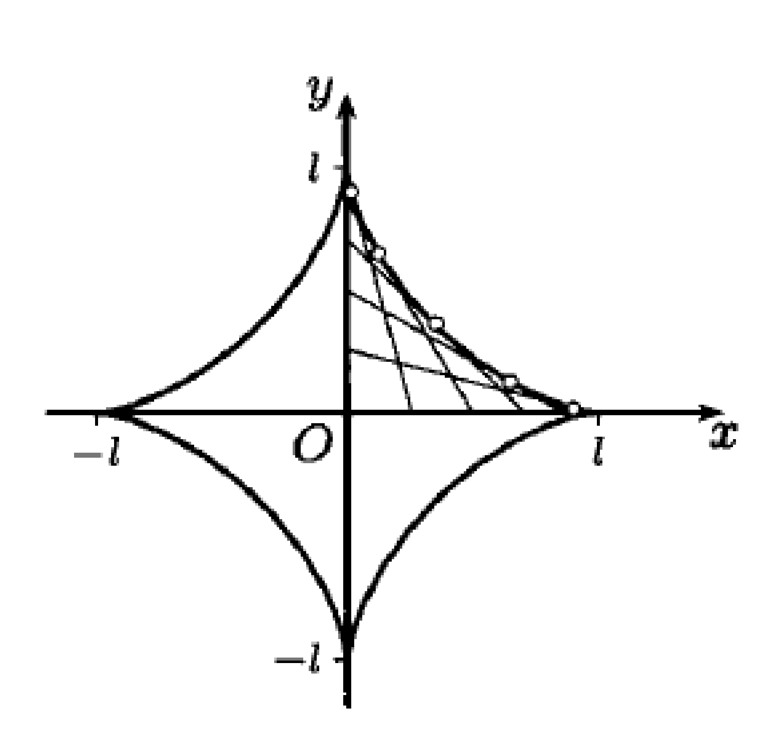
$$\sin\theta=\frac{x^{\frac{1}{3}}y+xy^{\frac{1}{3}}}{ly^{\frac{1}{3}}}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{l}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}),$$

$$\cos\theta=\frac{x^{\frac{1}{3}}y+xy^{\frac{1}{3}}}{lx^{\frac{1}{3}}}=\frac{y^{\frac{1}{3}}}{l}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}).$$

将上述两式代入恒等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 就可整理得到判别曲线方程为

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}.$$

由于原曲线族没有奇点, 而上述判别曲线又不是直线, 因此它就是所求的包络线. □



习题 3570 的附图

注 所得到包络即是附图中的星形线. 在第一册附录一的习题 370.1(d) 中给出了 $l=8$ 的星形线的图像. 在《习题集》的 §2.3 的习题 1070 则要求证明: 星形线的切线介于坐标轴之间的部分的长为一常量.

解 2 将直线段在坐标轴上的截距 a 和 b 取为参数, 则得到 (截距式) 直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

其中两个参数满足方程

$$a^2+b^2=l^2.$$

如前所述, 引入拉格朗日函数

$$L(x,y,a,b,\lambda)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\lambda(a^2+b^2-l^2),$$

然后将 L 对 a,b 求导, 得到方程

$$L'_a=-\frac{x}{a^2}+2\lambda a=0,\quad L'_b=-\frac{y}{b^2}+2\lambda b=0.$$

① 这里及以下运算中均假设 $0<\theta<90°$. 对于 $\theta=0$ 和 $\theta=90°$ 的两条特殊直线可以在求出包络线后验证它与这两条直线也相切.

消去 λ 就得到 $\frac{x}{a^3} = \frac{y}{b^3}$. 两边开立方, 然后从联立方程组

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a} - \frac{y^{\frac{1}{3}}}{b} = 0,$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

解出 a, b, 再代入 $a^2 + b^2 = l^2$, 即可得到与解 1 相同的答案, 从略. □

习题 3572 炮弹在真空中以初速度 v_0 射出, 当投射角 α 在竖直平面中变化时, 求炮弹轨迹的包络线.

解 记 g 为重力加速度常数, 又用 $\dot{x}, \dot{y}$ 等记关于时间 t 的导数, 则有

$$\ddot{y} = -g, \quad \ddot{x} = 0.$$

利用初始速度 $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$ 和 $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$, 且设 $y(0) = x(0) = 0$, 则就可得到

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t,$$
$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin\alpha)t.$$

消去 t 就得到炮弹的轨迹曲线为

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x.$$

将上述方程对参数 α 求导, 得到

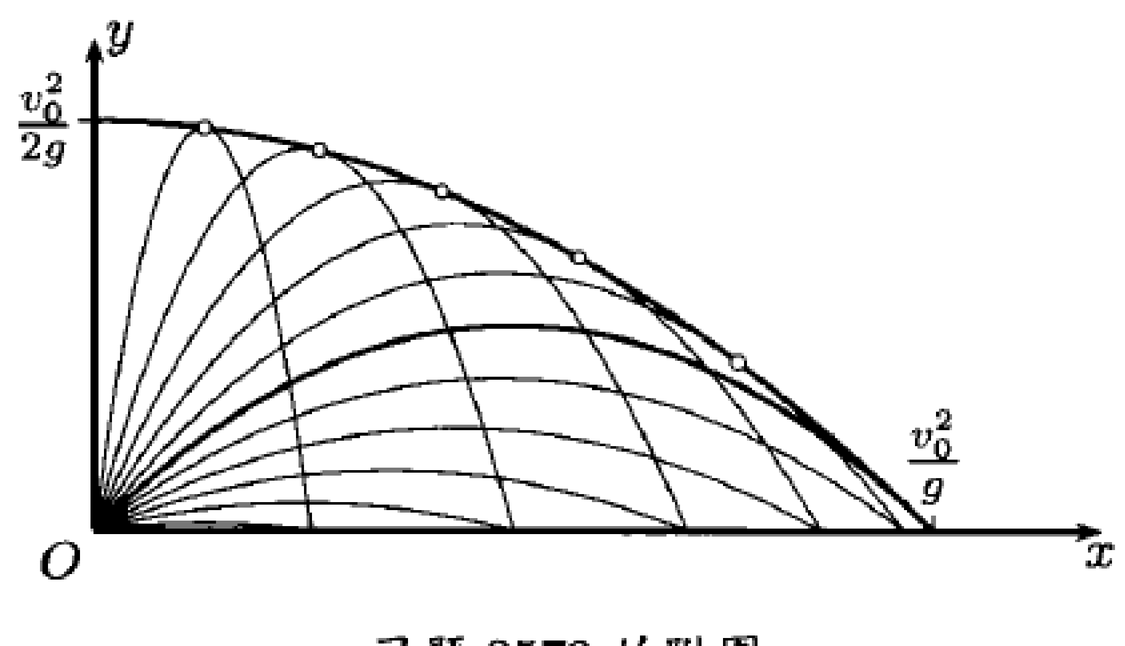
$$x \sec^2\alpha - \frac{gx^2 \sin\alpha}{v_0^2 \cos^3\alpha} = 0.$$

从上述两式消去 α 后就得到

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \quad (0 < x < \frac{v_0^2}{g}).$$

由于原曲线族没有奇点, 而上述判别曲线也不在曲线族中, 因此它就是包络线.

在附图中作出了投射角从 0° 到 90° 每隔 7.5° 的炮弹轨迹. 可见在真空条件下当 $\alpha = 45°$ 时射程最远 (在附图中用粗黑曲线表示). □



习题 3572 的附图

习题 3574 研究下列曲线族的判别曲线的性质 (c 是参变量):

(a) 立方抛物线 $y = (x-c)^3$; (b) 半立方抛物线 $y^2 = (x-c)^3$;

(c) 尼尔抛物线 $y^3 = (x-c)^2$; (d) 环索线 $(y-c)^2 = x^2\frac{a-x}{a+x}$.

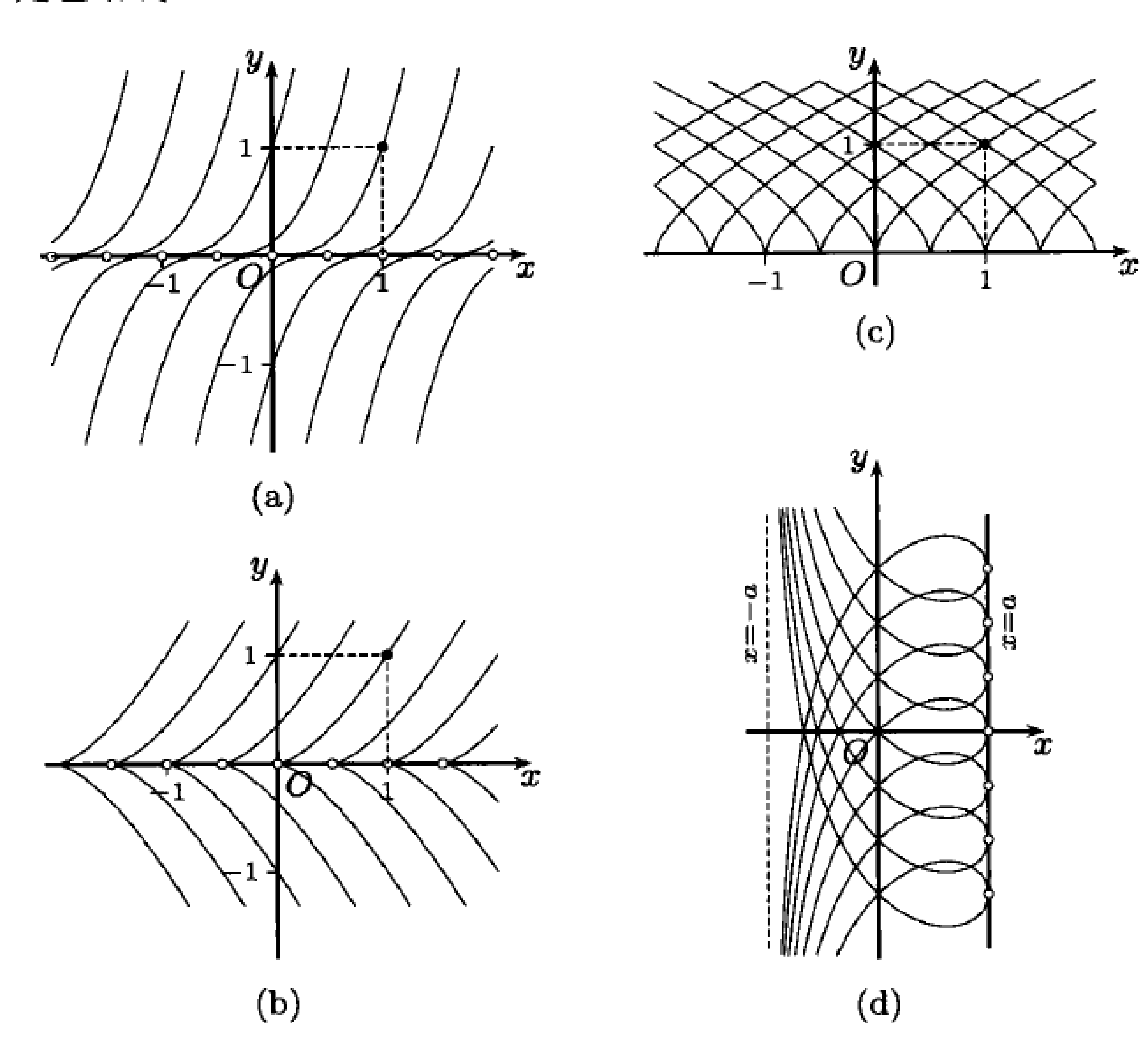
解 (概要) 本题的计算并无困难, 下面只对它们的图像作些说明.

(a) $y = 0$ 是包络线. 前面几个例子中的包络线恰好是曲线族所占据的范围的边界曲线 (这确实是包络线这个词的原来含义), 但本题的包络线 $y = 0$ 并不具有"包络"的字面上的意义.

(b) 直线 $y=0$ 既是包络线, 也是曲线族的奇点的轨迹.

(c) 直线 $y=0$ 是曲线族的奇点 (尖点) 的轨迹, 但并不是包络线.

(d) (设 $a>0$) 判别曲线由两条直线组成, 其中 $x=0$ 是奇点 (二重点) 的轨迹, 而 $x=a$ 是包络线. □



习题 3574 的附图

习题 3576 求球族

$$(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2=1$$

(其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, t 是参变量) 的包络面.

解 将方程对 t 求导得到

$$-\cos\alpha(x-t\cos\alpha)-\cos\beta(y-t\cos\beta)-\cos\gamma(z-t\cos\gamma)=0,$$

即可解出

$$t=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

将它代入原方程就可以整理得到

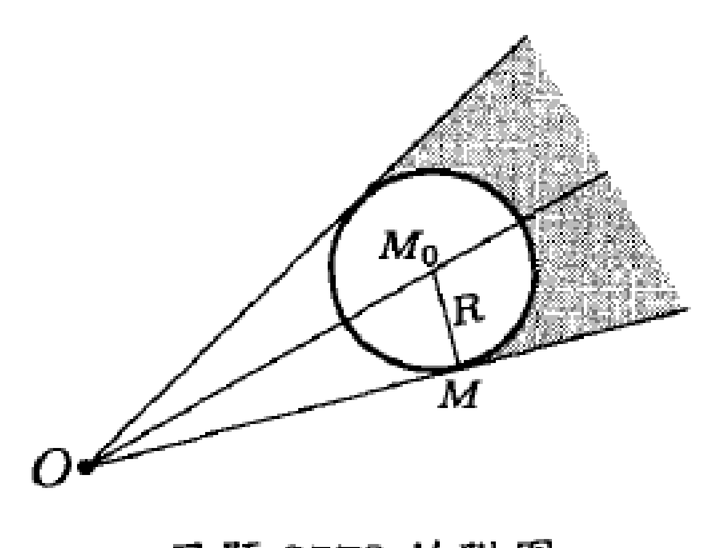
$$x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=1.$$

由于原来的球族没有奇点, 而上述判别曲面也不是球, 因此它就是所要求的包络面. (可以验证它是一个圆柱面.) □

习题 3579 有一发光点位于坐标原点. 若 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$, 求由球

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2$$

投影所生成的阴影圆锥.



习题 3579 的附图

解 1 如附图所示, 在经过发光点 O 和球心 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个平面上, 以 R 为半径的球与此平面交于一个圆.

考虑球心在直线段 OM_0 的延长线上的如下球族:

$$(x-tx_0)^2+(y-ty_0)^2+(z-tz_0)^2=(tR)^2\quad(t\geqslant 1),$$

则所求的阴影圆锥的边界面就是这个球族的包络面.

将上述方程对参数 t 求导得到

$$-x_0(x-tx_0)-y_0(y-ty_0)-z_0(z-tz_0)=tR^2.$$

与原方程联立消去 t 就得到阴影圆锥区域的边界的圆锥面方程为

$$(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)(x^2+y^2+z^2)=(xx_0+yy_0+zz_0)^2.\quad\square$$

解 2 可从题意直接写出所要求的阴影圆锥的边界曲面. 如附图所示, 只要从发光点出发作射线与球相切, 这样的射线就是圆锥面的母线.

附图中的点 $M(x,y,z)$ 就是射线与球的切点. 所有这样的切点组成为圆锥面的准线. 一方面, 由勾股定理有

$$x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2,$$

另一方面, 可以看出所有这样的点 M (形成一个圆周) 又在与直线 OM_0 正交的一个平面上. 于是向量 OM_0 和 OM 的标量积

$$\overrightarrow{OM_0}\cdot\overrightarrow{OM}=|OM|\cdot|OM_0|\cos\angle MOM_0=|OM|^2$$

应当等于常数. 于是就有 $xx_0+yy_0+zz_0=x^2+y^2+z^2$.

这样就得到了准线的方程为

$$x^2+y^2+z^2=xx_0+yy_0+zz_0=x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2.$$

记母线上的点的坐标为 (X,Y,Z), 而 (x,y,z) 是在准线上的点, 则母线方程就是

$$X=tx,\quad Y=ty,\quad Z=tz\quad(t\geqslant 1).$$

将母线方程代入准线方程中消去 x,y,z 和 t, 就得到与解 1 相同的答案:

$$\begin{aligned}X^2+Y^2+Z^2&=t(Xx_0+Yy_0+Zz_0)\\&=t^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)\\&=\frac{1}{x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2}\cdot(Xx_0+Yy_0+Zz_0)^2.\quad\square\end{aligned}$$

§6.6 泰勒公式 (习题 3581–3620)

内容简介 本节含三个内容: (1) 多元函数的泰勒公式 (§2.10 的推广), (2) 多元函数的泰勒级数 (§5.5 的推广), (3) 平面曲线的奇点讨论, 即当 §6.3 中的隐函数存在定理的条件不满足时的研究.

6.6.1 多元函数的泰勒公式和泰勒级数 (习题 3581–3604)

多元函数的泰勒公式是一元函数的泰勒公式的直接推广 (参见 §2.10).

以二元函数为例, $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处展开的泰勒公式为

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a,b)+R_n,$$

其中右边和式中的项理解为

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a,b)=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i(x-a)^i(y-b)^{k-i}\frac{\partial^k f}{\partial x^i\partial y^{k-i}}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}},$$

R_n 为余项. 余项有各种形式. 最常用的有两种. 引入记号

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

第一种是佩亚诺型余项, 即有

$$R_n=o(r^n)\ \ (r\to 0).$$

当 f 在点 (a,b) 处 $n+1$ 阶连续可微时, 也有

$$R_n=O(r^{n+1})\ \ (r\to 0).$$

第二种是拉格朗日型余项, 即有

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(a+\theta_n(x-a),b+\theta_n(y-b)),$$

其中 $\theta_n\in(0,1)$.

在 $a=b=0$ 时, 也称泰勒公式为麦克劳林公式.

若 f 在点 (a,b) 处无穷次连续可微, 且在该点的某个邻域内 $R_n\to 0\ (n\to\infty)$, 则就得到多元泰勒级数. 多元泰勒级数就是多元幂级数.

仍以二元函数为例, $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的一个邻域内展开的泰勒级数可写为

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(a,b)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)\\&=f(a,b)+\sum_{\substack{i,j\geqslant 0\\i+j=1}}^{\infty}\frac{1}{i!j!}\cdot\frac{\partial^{i+j}f(a,b)}{\partial x^i\partial y^j}(x-a)^i(y-b)^j.\end{aligned}$$

对于 $a=b=0$ 的泰勒级数, 也称为麦克劳林级数.

二元幂级数是二重级数的一种特例. 在数学分析教科书中可参考 [11] 的第二卷的 396–397 小节. 如其中所述, 这里只称绝对收敛的级数为收敛级数. 这时级数的和在重排下不变. 此外, 还可以参考 [22] 的第一卷第二分册的 §13.20 等.

习题 3581 在点 $A(1,-2)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数

$$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5.$$

解 1　用全微分法求偏导数, 则有

$$\mathrm{d}f=(4x-y-6)\,\mathrm{d}x+(-x-2y-3)\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}^2f=4\,\mathrm{d}x^2-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2\,\mathrm{d}y^2,$$

而当 $n\geqslant 3$ 时 $\mathrm{d}^nf=0$, 因此就得到

$$f'_x(1,-2)=0,\quad f'_y(1,-2)=0,\quad f''_{xx}\equiv 4,\quad f''_{xy}\equiv -1,\quad f''_{yy}\equiv -2,$$

更高阶的偏导数均为 0. 又有 $f(1,-2)=5$, 于是就得到所要求的泰勒公式为

$$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.\quad \square$$

解 2　由于 f 为二元二次多项式, 又利用泰勒公式的唯一性, 因此只要作初等代数计算就有

$$\begin{aligned}f(x,y)&=2[(x-1)+1]^2-[(x-1)+1]\cdot[(y+2)-2]-[(y+2)-2]^2\\&\qquad -6[(x-1)+1]-3[(y+2)-2]+5\\&=2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2\\&\qquad +(4+2-6)(x-1)+(-1+4-3)(y+2)+(2+2-4-6+6+5)\\&=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.\quad \square\end{aligned}$$

习题 3585 写出函数

$$f(x,y)=x^y$$

在点 $A(1,1)$ 的邻域内的展开式, 到二次项为止.

解 1　$f(1,1)=1$. 用全微分法计算其一阶和二阶偏导数如下:

$$\mathrm{d}f=yx^{y-1}\,\mathrm{d}x+x^y(\ln x)\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}^2f=y(y-1)x^{y-2}\,\mathrm{d}x^2+2[x^{y-1}+yx^{y-1}(\ln x)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+x^y(\ln x)^2\,\mathrm{d}y^2,$$

因此得到

$$f'_x(1,1)=1,\quad f'_y(1,1)=0,\quad f''_{xx}(1,1)=0,\quad f''_{xy}(1,1)=1,\quad f''_{yy}(1,1)=0.$$

这样就可写出

$$f(x,y)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2.\quad \square$$

解 2　用间接法可计算如下:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\exp[y\ln x]=\exp\{[1+(y-1)]\cdot\ln[1+(x-1)]\}\\&=\exp\{[1+(y-1)]\cdot[(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+R_2]\}\\&=\exp[(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)(y-1)+R_2]\\&=1+[(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)(y-1)]+\frac{1}{2}(x-1)^2+R_2\\&=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2.\quad \square\end{aligned}$$

注 以上推导中的各行表达式中的余项 R_2 只表示它是当 $x\to 1$, $y\to 1$ 时的高于 2 阶的无穷小量, 在各行之间的余项 R_2 未必相等. 此外, 在《习题集》的答案中还写出了 R_2 的拉格朗日型余项的表达式, 为此需要计算出三阶偏导数, 但原题并无此要求.

习题 3591 按 h 与 k 的幂次展开函数

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y).$$

解 按照泰勒级数公式写出

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}f(x,y)=&\Big[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f(x,y)\Big]\\&-\Big[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x,y)\Big]\\&-\Big[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial y^n}f(x,y)\Big]+f(x,y)\\=&\,hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial x^m\partial y^{n-m}}f(x,y).\quad\square\end{aligned}$$

注 注意到右边的第一项, 可以将此题与教科书中关于二阶混合偏导数与求偏导顺序无关的定理相联系. 在该定理的证明中, 一般是先证明 $h\to 0, k\to 0$ 时的表达式 $\dfrac{\Delta_{xy}f(x,y)}{hk}$ 的两个累次极限就是两个顺序不同的二阶混合偏导数, 从而将问题归结为两个累次极限相等的问题.

习题 3592 依 ρ 的幂次展开函数

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

解 先将 f 按照 ρ 的幂次展开如下:

$$f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\Big(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f(x,y),$$

然后对 φ 从 0 到 2π 逐项积分 (并除以 2π) 得到

$$\begin{aligned}F(\rho)&=f(x,y)+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\int_0^{2\pi}\Big(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f(x,y)\,\mathrm{d}\varphi\\&=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^n}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial x^k\partial y^{n-k}}f(x,y)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

于是问题归结为最后一式中的定积分计算.

下面将证明, 只要在 k 和 n 中出现奇数, 该积分就等于 0. 以下分两种情况讨论 (其中所用的对称性概念和结论见 §4.2.5).

(1) k 和 n 中有一个是奇数, 另一个是偶数. 这时 $n-k$ 为奇数, 于是从

$$\cos^k(2\pi-\varphi)\sin^{n-k}(2\pi-\varphi)=-\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi,$$

可见 $\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上关于其中点 π 为奇函数, 因此积分

$$\int_0^{2\pi}\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi\,\mathrm{d}\varphi=0.$$

(2) k 和 n 都是奇数. 这时被积函数 $\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上关于 $x=\pi$ 是偶函数, 因此有

$$\int_0^{2\pi}\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\pi}\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

然而从

$$\cos^k(\pi-\varphi)\sin^{n-k}(\pi-\varphi)=-\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi,$$

可见 $\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi$ 在区间 $[0,\pi]$ 上关于其中点 $\pi/2$ 为奇函数, 因此又得到积分

$$\int_0^{2\pi}\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\pi}\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi\,\mathrm{d}\varphi=0.$$

对于 n 和 k 都是偶数的情况, 将它们改记为 $2n$ 和 $2k$, 直接引用 §4.2.6 的习题 2290 的答案, 就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2k}\varphi\sin^{2n-2k}\varphi\,\mathrm{d}\varphi&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}\varphi\sin^{2n-2k}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{2^n\cdot n!}\\&=\frac{(2k)!(2n-2k)!}{2^{2n}n!k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

这样就得到

$$\begin{aligned}F(\rho)&=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2k}\partial y^{2n-2k}}f(x,y)\\&=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)^nf(x,y).\quad\square\end{aligned}$$

习题 3594 将函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 展开成麦克劳林级数.

解 1 (直接法) 计算 $f(0,0)=0$, 然后套用一元函数 $\ln x$ 的高阶导数公式 (见 §2.5.5 开始的表格之 V) 得到

$$\frac{\partial^{m+n}f(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\Big|_{(0,0)}=\frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{(1+x+y)^{m+n-1}}\Big|_{(0,0)}=(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!,$$

于是即可得到

$$\ln(1+x+y)=\sum_{\substack{m,n\geqslant0\\m+n=1}}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^my^n.$$

在满足条件 $|x|+|y|<1$ 时, 就可以证明上式右边的级数绝对收敛. 实际上, 取 $m+n=N$ 后, 这就可以从下列级数

$$\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{(N-1)!}{m!(N-m)!}|x|^m|y|^{N-m}=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}(|x|+|y|)^N$$

的收敛性得到. $\square$

解 2 (间接法) 利用一元函数 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数展开就可以得到

$$\begin{aligned}\ln(1+x+y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+y)^n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m x^m y^{n-m}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!(n-m)!}x^m y^{n-m}.\end{aligned}$$

如解 1 一样可以证明当 $|x|+|y|<1$ 时, 最后得到的级数绝对收敛. 若记 $n-m=n'$, 然后又将 n' 改记为 n, 则就得到与解 1 相同的结果. □

习题 3601 展开函数

$$f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}\,\mathrm{d}t$$

为麦克劳林级数并写出前三项.

解 展开被积函数如下:

$$\begin{aligned}(1+x)^{t^2y} &= \exp[t^2y\ln(1+x)] = 1+t^2y\ln(1+x)+\cdots\\ &= 1+t^2y\Big(x-\frac{x^2}{2}\Big)+\cdots,\end{aligned}$$

其中用省略号表示的是 $m+n\geqslant 4$ 的 x^my^n 项之和.

然后对于 t 在 $[0,1]$ 上逐项积分就得到所求的前三项为

$$\int_0^1\Big[1+t^2y\Big(x-\frac{x^2}{2}\Big)\Big]\,\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{6}x^2y+R_3.\quad □$$

习题 3604 设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 定义的 x 和 y 的隐函数, 且当 $x=1$ 和 $y=1$ 时 $z=1$. 写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

解 1 用全微分法求 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的一阶和二阶偏导数.

对方程求其一阶和二阶微分得到

$$(3z^2-2x)\,\mathrm{d}z-2z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0,$$

$$6z\,\mathrm{d}z^2-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+(3z^2-2x)\,\mathrm{d}^2z-2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0.$$

用 $x=y=z=1$ 代入并整理得到

$$\mathrm{d}z=2\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}^2z=-6\,\mathrm{d}z^2+4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=-16\,\mathrm{d}x^2+20\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-6\,\mathrm{d}y^2,$$

于是有

$$z_x'(1,1)=2,\quad z_y'(1,1)=-1,\quad z_{xx}''(1,1)=-16,\quad z_{xy}''(1,1)=10,\quad z_{yy}''(1,1)=-6.$$

这样就可写出

$$z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+R_2.\quad □$$

解 2 根据隐函数存在定理可以肯定 $z = z(x, y)$ 在点 $(1,1)$ 存在泰勒公式

$$z = 1 + a(x-1) + b(y-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)(y-1) + e(y-1)^2 + R_2,$$

其中 $R_2 = o(r^2)$, $r = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

以下用待定系数法.

为计算方便起见, 令 $z = Z + 1$, $x = X + 1$, $y = Y + 1$, 代入方程得到关于 X, Y, Z 的方程为

$$-2X + Y + Z - 2XZ + 3Z^2 + Z^3 = 0.$$

然后用

$$Z = aX + bY + cX^2 + dXY + eY^2 + R_2$$

代入方程, 并弃去所有高于二次的项, 这样就得到等式

$$-2X + Y + (aX + bY + cX^2 + dXY + eY^2) - 2X(aX + bY) + 3(aX + bY)^2 = 0.$$

将上式按照 X, Y, X^2, XY, Y^2 归并同类项, 得到

$$(a-2)X + (b+1)Y + (-2a + 3a^2 + c)X^2 + (-2b + 6ab + d)XY + (3b^2 + e)Y^2 = 0,$$

并令它们的系数等于 0, 就可得到

$$a = 2,\ b = -1,\ c = -8,\ d = 10,\ e = -3.\quad \square$$

6.6.2 平面曲线的奇点判定 (习题 3605–3620)

隐函数存在定理表明, 若在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内函数 F 连续可微, 满足条件

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

且梯度向量 $\nabla F(x_0, y_0) = (F'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0))$ 不是零向量, 则在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内, 方程 $F(x, y) = 0$ 或者确定 $y = y(x)$, 或者确定 $x = x(y)$, 这时在该邻域内没有其他点满足 $F(x, y) = 0$. 将这样的点 (x_0, y_0) 称为平面曲线 $F(x, y) = 0$ 的通常点.

若 $F(x_0, y_0) = 0$, 但 (x_0, y_0) 不是通常点, 则称为奇点. 对于连续可微的 F 来说, 点 (x_0, y_0) 为平面曲线 $F = 0$ 的奇点的必要条件是:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0.$$

设 F 在点 (x_0, y_0) 处二阶连续可微, 则可用 F 在该点处的二阶偏导数判定某些奇点的类型. 记 $A = F''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = F''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = F''_{yy}(x_0, y_0)$, 则有以下结论: (1) 若 $AC - B^2 > 0$, 则 M_0 为孤立点; (2) 若 $AC - B^2 < 0$, 则 M_0 为二重点 (结点). 在补注小节 §6.6.3 的命题 6.2 中将对此作出证明.

习题 3605 研究曲线 $y^2 = ax^2 + x^3$ 的奇点, 并作其图像.

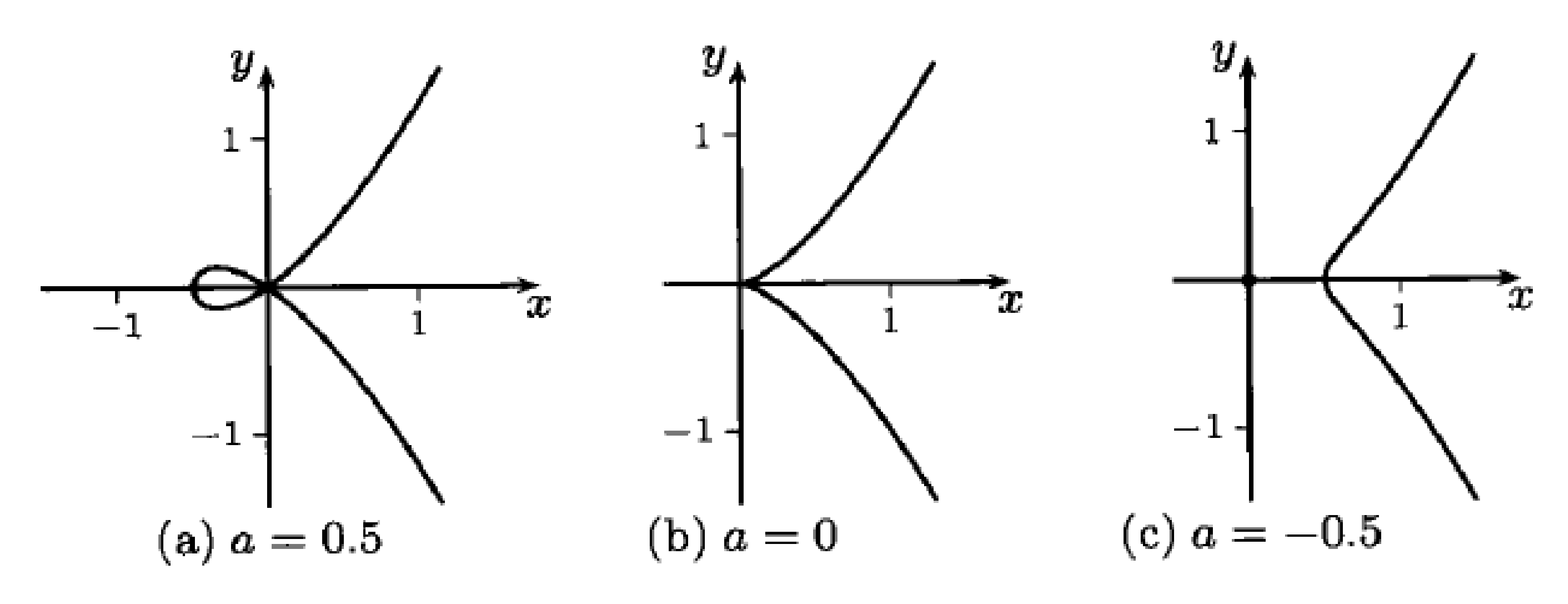
解 这时 a 为参数. 记 $F(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$, 则有

$$F'_x(x, y) = 2ax + 3x^2, \quad F'_y(x, y) = -2y,$$

$$F''_{xx}(x, y) = 2a + 6x, \quad F''_{xy}(x, y) \equiv 0, \quad F''_{yy}(x, y) \equiv -2.$$

由 $F(x, y) = F'_x(x, y) = F'_y(x, y) = 0$ 可确定出只可能有一个奇点 $(0, 0)$.

以下需要按照参数 a 的不同情况来分析该奇点的类型 (参见附图).



习题 3605 的附图

(a) $a>0$, 这时在点 $(0,0)$ 处, $A=2a$, $B=0$, $C=-2$, $AC-B^2=-4a<0$, 因此奇点 $(0,0)$ 是二重点.

(b) $a=0$, 这时在点 $(0,0)$ 处, $A=0$, $B=0$, $C=-2$, $AC-B^2=0$, 方程变成 $y=x^{\frac{3}{2}}$. 该曲线即是 §6.5 的习题 3374(b) 中的半立方抛物线, 奇点 $(0,0)$ 为尖点.

(c) $a<0$, 这时在点 $(0,0)$ 处, $A=2a$, $B=0$, $C=-2$, $AC-B^2=-4a>0$, 因此奇点 $(0,0)$ 是孤立点. □

习题 3606 研究曲线 $x^3+y^3-3xy=0$ 的奇点, 并作其图像.

提示 这是笛卡儿叶形线 (参见 §1.4.4 的习题 370.1(b) 和 §2.12.3 的习题 1541). □

习题 3607 研究曲线 $x^2+y^2=x^4+y^4$ 的奇点, 并作其图像.

提示 参见 §6.3.1 的习题 3366 及其附图. □

习题 3608 研究曲线 $x^2+y^4=x^6$ 的奇点, 并作其图像.

解 (概要) 令 $F(x,y)=x^2+y^4-x^6$, 计算得到

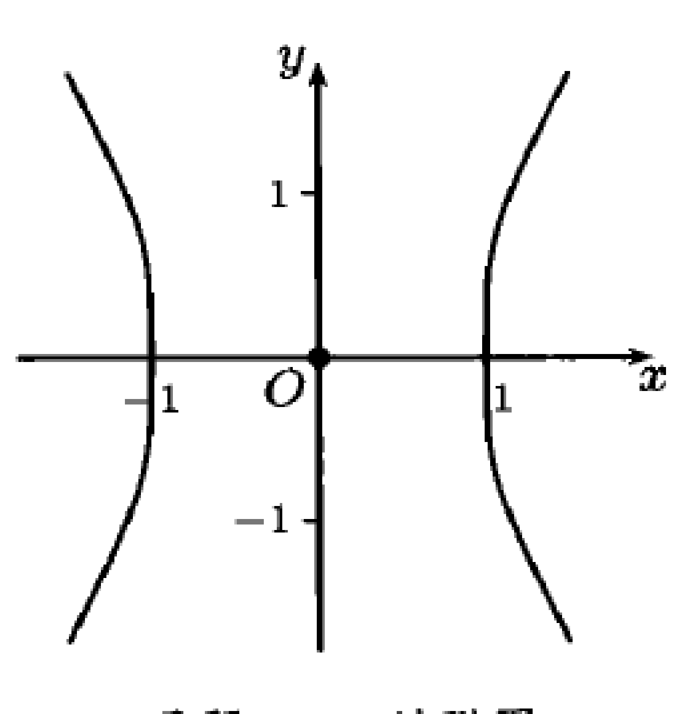
$F'_x(x,y)=2x-6x^5$, $F'_y(x,y)=4y^3$;

$F''_{xx}(x,y)=2-30x^4$, $F''_{xy}(x,y)=0$, $F''_{yy}(x,y)=12y^2$.

由 $F(x,y)=F'_x(x,y)=F'_y(x,y)=0$ 可知只可能有奇点 $(0,0)$. 计算得到在该点的 $A=2$, $B=0$, $C=0$, $AC-B^2=0$. 因此不能由命题 6.2 作出结论. 然而从

$$F(x,y)=x^2(1-x^4)+y^4$$

即可看出, 当 $|x|<1$ 时满足方程 $F(x,y)=0$ 的点只可能是 $(0,0)$, 因此它是孤立点 (见附图). □



习题 3608 的附图

习题 3609 研究曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的奇点, 并作其图像.

提示 这是伯努利双纽线, 参见 §6.3.1 的习题 3367 及其附图. □

习题 3610 研究曲线 $(y-x^2)^2=x^5$ 的奇点, 并作其图像.

解 令 $F(x,y)=(y-x^2)^2-x^5$, 计算得到

$$F'_x(x,y)=-4x(y-x^2)-5x^4,\quad F'_y(x,y)=2(y-x^2);$$

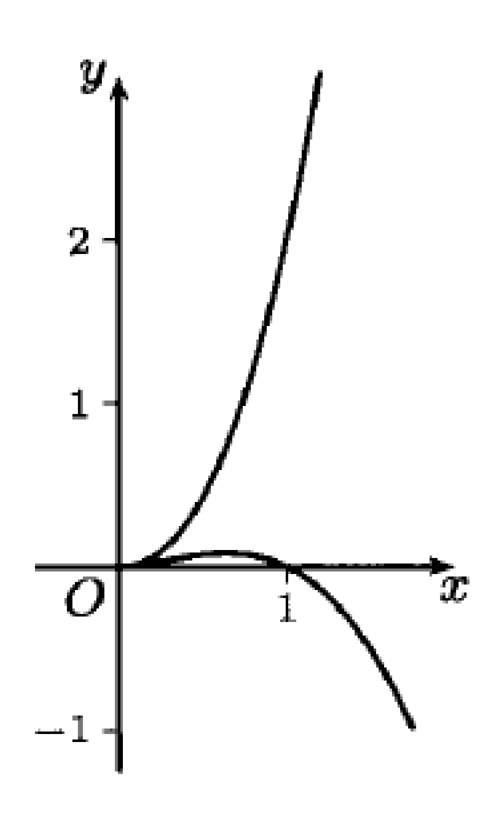
$$F''_{xx}(x,y)=-4y+12x^2-20x^3,\quad F''_{xy}(x,y)=-4x;\quad F''_{yy}(x,y)=2.$$

由 $F(x,y)=F'_x(x,y)=F'_y(x,y)=0$ 可见只可能有奇点 $(0,0)$. 计算得到在该点的 $A=B=0$, $C=2$, $AC-B^2=0$, 因此不能用命题 6.2 来判定.

然而要作出本题的平面曲线的图像并不难. 从方程即可见只在 $x\geqslant 0$ 时有图像. 直接解出两个单值函数支:

$$y_1(x)=x^2+x^{\frac{5}{2}},\quad y_2(x)=x^2-x^{\frac{5}{2}}=x^2(1-\sqrt{x}),$$

就可见它们都经过奇点 $(0,0)$, 且在该处的导数为 0. 其中 $y_1(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时严格单调递增, 而 $y_2(x)$ 则先是严格单调递增, 然后严格单调递减, 在 $x=1$ 处与 Ox 轴相交, 然后继续严格单调递减. 又利用 $y_1(x)>y_2(x)$ $(x>0)$, 这样就不难作出附图中的图像. 奇点 $(0,0)$ 为尖点.



习题 3610 的图像

如 [11] 的第二卷的 236 小节所述, 由于从尖点出发的两支曲线在尖点邻近处于公切线的同一侧, 因此称为第二类尖点. (相应地在习题 3605 的参数 $a=0$ 时的奇点称为第一类尖点.) □

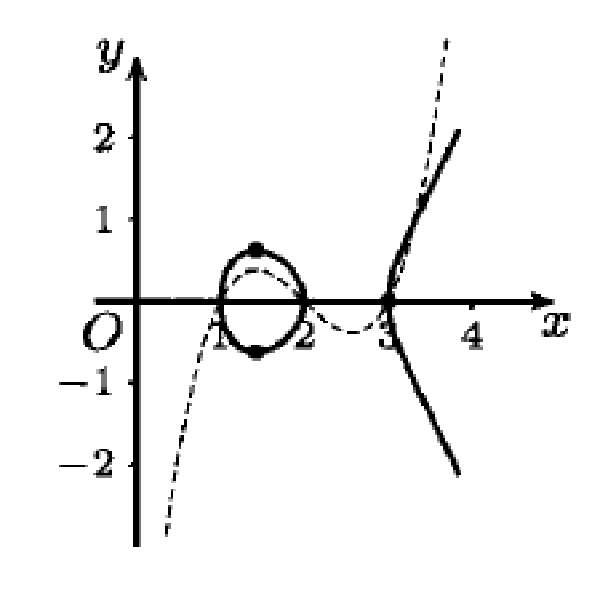
习题 3611 研究曲线 $(a+x)y^2=(a-x)x^2$ 的奇点, 并作其图像.

提示 这是环索线, 对于 $a>0$ 可参见 §6.5.3 的习题 3574(d) 及其附图. 当 $a<0$ 时, 其图像与 $|a|$ 对应的图像关于 Oy 轴对称. 当 $a=0$ 时, 曲线退化为直线 $x=0$. 其中的点 $(0,0)$ 满足作为奇点的必要条件, 且 $A=B=C=0$, 但并没有"奇性", 因此仍然只是一个通常点. □

习题 3612 研究参量 a,b,c $(a\leqslant b\leqslant c)$ 的值与曲线 $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ 的形状之关系.

提示 由于三次多项式 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 的图像很容易作, 因此只要将该图像"开平方"就可以作出所要的曲线, 然后即可看出有否奇点以及在有奇点情况时的奇点类型.

以 $a=1$, $b=2$ 和 $c=3$ 为例, 在附图中用虚曲线表示上述三次多项式的图像 (也称为三次抛物线), 用粗黑曲线表示 $y^2=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的图像 (已见于第一册附录二的习题 1486). 由此图已可推知当 $a<b<c$ 时, 曲线无奇点.



习题 3612 的附图

进一步可从上述附图推测出以下三种情况的结论, 而且都可以用本题的特例, 即习题 3605 的图像来说明.

(1) 若 $a=b<c$, 图上的圈将缩小为一个孤立点 (即习题 3605 的 $a<0$ 的情况).

(2) 若 $a<b=c$, 图上的两支曲线结合成环索线 (即习题 3605 的 $a>0$ 的情况).

(3) 若 $a=b=c$, 则为半立方抛物线 (即习题 3605 的 $a=0$ 的情况). □

注 对图像"开平方"运算是在 §1.4 中学习的一种技巧, 见 §1.4.2 的习题 266, §1.4.3 的习题 328(e), 329(d) 和 §1.4.4 的习题 368(d) 等.

在习题 3602–3612 的方程 $F(x,y)=0$ 中, 函数 F 都是代数多项式, 其曲线称为代数曲线. 下面的习题 3613–3620 则是由超越方程确定的曲线, 称为超越曲线.

如上面的习题所示, 若能用 §1.4 (以及 §2.12) 中的方法画出曲线的草图或图像, 则对于奇点的分析很有帮助.

习题 3613 ($y^2=1-\mathrm{e}^{-x^2}$), 3614 ($y^2=1-\mathrm{e}^{-x^3}$), 3618 ($y^2=\sin\dfrac{\pi}{x}$), 3619 ($y^2=\sin x^2$), 3620 ($y^2=\sin^3 x$) 等都可用习题 3612 中的图像"开平方"解决, 留作练习.

习题 3615 ($y=x\ln x$) 的作图比较简单, 习题 3617 ($y=\arctan\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$) 可参见第一册附录一的习题 324.1(d), 从略.

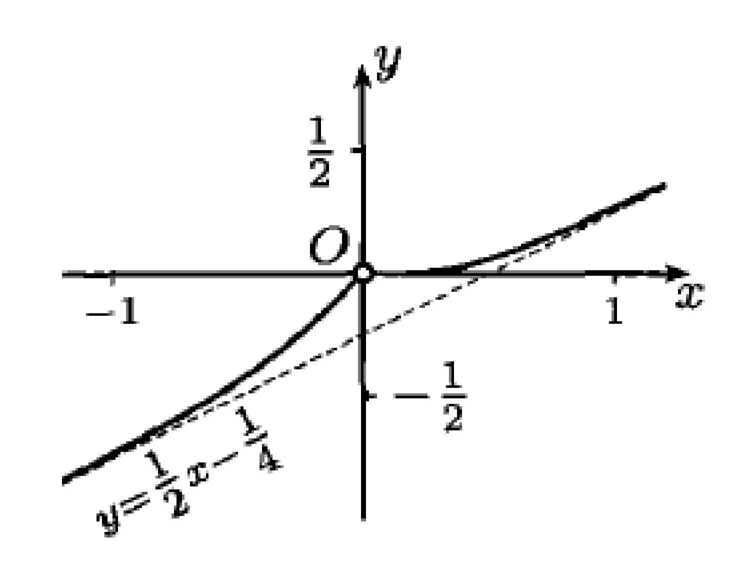
以下分析习题 3616, 它有一些新的特点.

习题 3616 研究超越曲线 $y=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ 的奇点.

解 由于 $y(x)$ 在定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内均连续可微, 因此只有点 $x=0$ 处需要研究.

从 $f(+0)=f(-0)=0$ 可见, 点 $x=0$ 是可去不连续点. 补充定义 $y(0)=0$, 则 $x=0$ 为连续点.

为研究 (延拓后的) $y(x)$ 在 $x=0$ 是否可微, 可用单侧导数极限定理 (见 §2.6.4 的习题 1258.1).



习题 3616 的附图

对 $x\neq 0$ 可求导得到

$$y'(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^2},$$

于是就有

$$y'_+(0)=y'(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to+0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\right)=0+0=0,$$

$$y'_-(0)=y'(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to-0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^2}\right)=1+0=1,$$

可见曲线上的点 $(0,0)$ 为角点. (在附图中还用虚线画出了曲线的斜渐近线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.) □

6.6.3 补注

现在给出平面曲线 $F(x,y)=0$ 在 $AC-B^2\neq 0$ 时的奇点类型的证明, 并对 $AC-B^2=0$ 作注解.

命题 6.2 设函数 $F(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的一个邻域内二阶连续可微, 且满足

$$F(x_0,y_0)=F'_x(x_0,y_0)=F'_y(x_0,y_0)=0.$$

又记

$$A=F''_{xx}(x_0,y_0),\ B=F''_{xy}(x_0,y_0),\ C=F''_{yy}(x_0,y_0),$$

则当 $AC-B^2\neq 0$ 时, 由方程 $F(x,y)=0$ 确定的平面曲线在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处有以下两种可能类型:

(1) 若 $AC-B^2>0$, 则 M_0 为孤立点;

(2) 若 $AC-B^2<0$, 则 M_0 为二重点 (结点).

证 为简明起见, 设 $x_0=y_0=0$. 显然这只要通过平移即可实现.

写出带佩亚诺余项的泰勒公式

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\Big(Ax^2+2Bxy+Cy^2\Big)+o(r^2)\ \ (r\to 0),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

(1) 若 $AC-B^2>0$, 则当 $A>0$ 时, 由高等代数知道 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 为正定二次型, 且存在 $d>0$, 使得对一切 x,y, 成立不等式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2\geqslant d(x^2+y^2)=dr^2.$$

将前述泰勒公式的余项改写为 $o(1)r^2$, 其中 $o(1)$ 是 $r\to 0$ 时的无穷小量, 则就得到

$$F(x,y)\geqslant\Big[\frac{1}{2}d+o(1)\Big]r^2\ \ (r\to 0).$$

因此存在 $r_0>0$, 使得当 $0\leqslant r<r_0$ 时,

$$F(x,y)\geqslant\frac{1}{4}dr^2.$$

由此可见, 在邻域 $x^2+y^2<r_0^2$ 内, 方程 $F(x,y)=0$ 只能在点 $(0,0)$ 处成立, 从而该奇点为孤立点.

对于 $A<0$ 的情况, 证明是类似的, 从略.

(2) 若 $AC-B^2<0$, 则二次型 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 为不定, 它既可取到正值, 也可取到负值. 从高等代数知道, 存在正交变换 (对于二维情况就是坐标轴的一个旋转变换)

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

使得成立

$$F(x,y)=d_1x'^2+d_2y'^2+o(1)r^2\ \ (r\to 0),$$

其中 $d_1>0$, $d_2<0$, 且 $r^2=x^2+y^2=x'^2+y'^2$. 为方便起见, 记 $d_1=a^2$, $d_2=-b^2$, 其中 $a,b>0$, 则就得到

$$F(x,y) = a^2x'^2 - b^2y'^2 + o(1)r^2$$
$$= (ax' - by')(ax' + by') + o(1)r^2 \ \ (r \to 0).$$

若将上式最后的余项弃去, 则方程 $F(x,y) = 0$ 就确定出在点 $(0,0)$ 相交的两条直线 $ax' - by' = 0$ 和 $ax' + by' = 0$. 可以证明, 考虑余项之后, $F(x,y) = 0$ 确定的平面曲线在点 $(0,0)$ 附近是两条于 $(0,0)$ 相交的曲线, 且分别与上述两条直线在点 $(0,0)$ 处相切. 这些证明可在 [11] 的第二卷的 236–237 小节或者 [14] 的 §53 中找到, 从略. 称这样的奇点为二重点或结点. □

注 在 $AC - B^2 = 0$ 但 A, B, C 不全为零时, 《习题集》在 §6.6 的前言处说奇点为尖点或孤立点, 这是不够完整的. 实际上这时与 A, B, C 全为零的情况类似, 需要利用更高阶项作进一步研究, 包括前述二重点在内的更复杂情况都可能出现. 以下举出各种可能性的例子.

(1) 第一类尖点, 见习题 3605(b) 及其附图.

(2) 第二类尖点, 见习题 3610 及其附图.

(3) 二重点, 见 §6.7.1 的习题 3682 及其附图. 该题中的方程为 $2x^2 - 3xy^2 + y^4 = (x - y^2)(2x - y^2) = 0$. 在点 $(0,0)$ 处 $A = 4$, $B = C = 0$. 与 $AC - B^2 < 0$ 时的二重点不同的是两支曲线在奇点处有公共的切线.

(4) 在 (3) 中的两支曲线完全重合, 无任何奇性, 点 $(0,0)$ 为通常点. 例如方程 $y^2 - 2x^2y + x^4 = (y - x^2)^2 = 0$ 在点 $(0,0)$ 处就是如此.

(5) 孤立点, 见习题 3608 及其附图.

§6.7 多元函数的极值 (习题 3621–3710)

内容简介 本节的习题可分为以下部分: (1) 无条件极值问题, (2) 条件极值问题, (3) 最值问题, (4) 应用题.

6.7.1 无条件极值问题 (习题 3621–3649, 3651–3653, 3681–3682)

这里的主要思路可以仿照一元函数的极值和最值问题来考虑 (参见 §2.11.1). 首先是将费马定理推广于多元函数而得到下列命题.

命题 6.3 (多元函数的费马定理) 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 n 维区域 D 上有定义, 点 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in D$ 是 f 的极值点, 且 f 在该点存在所有的一阶偏导数, 则有

$$f_1'(a_1,\cdots,a_n)=0,\cdots,f_n'(a_1,\cdots,a_n)=0.$$

注 1 上述命题也可写为多元可偏导函数 f 在极值点 $\boldsymbol{a}$ 的梯度向量为零向量:

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

注 2 若将命题中的条件加强为 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 可微, 则 f 在该点的微分为 0:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})=0.$$

与一元函数类似, 我们将满足条件 $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ 或 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})=0$ 的点 $\boldsymbol{a}$ 称为驻点 (或临界点), 即极值嫌疑点. 偏导数不存在或函数不可微的点也都是极值嫌疑点.

若 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 处二阶连续可微, 即存在所有的二阶连续偏导数, 则就可将多元函数 f 在驻点 $\boldsymbol{a}$ 附近的增量用带佩亚诺型余项的泰勒公式表示如下:

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{x}+o(r^2)\ \ (r\to 0), \tag{6.5}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $\Delta\boldsymbol{x}=(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)^T$, $r=\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2$, $\boldsymbol{H}$ 为 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 的所有二阶偏导数组成的实对称矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} f_{11}''(\boldsymbol{a}) & f_{12}''(\boldsymbol{a}) & \cdots & f_{1n}''(\boldsymbol{a}) \\ f_{21}''(\boldsymbol{a}) & f_{22}''(\boldsymbol{a}) & \cdots & f_{2n}''(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}''(\boldsymbol{a}) & f_{n2}''(\boldsymbol{a}) & \cdots & f_{nn}''(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix},$$

称为黑塞矩阵 (已见于 §6.2.6 的习题 3350 和 3351 中). 可以看出, (6.5) 右边的第一项乘以 2 就是函数 f 在驻点 $\boldsymbol{a}$ 处的二阶微分:

$$\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{x}.$$

利用高等代数中的二次型知识就可以得到下列命题.

命题 6.4 (多元函数极值的充分条件) 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在驻点 $\boldsymbol{a}$ 的一个邻域内二阶连续可微, $\boldsymbol{H}$ 为 f 在该点的黑塞矩阵, 则有以下结论:

(1) 若 $\boldsymbol{H}$ 为正定阵, 则 $\boldsymbol{a}$ 为极小值点;

(2) 若 $\boldsymbol{H}$ 为负定阵, 则 $\boldsymbol{a}$ 为极大值点;

(3) 若 $\boldsymbol{H}$ 为不定阵, 则 $\boldsymbol{a}$ 不是极值点.

注 情况 (3) 在一元函数中没有对应. 此外, 命题 6.4 留下的情况是黑塞矩阵为半定矩阵的情况, 其中包括所有二阶偏导数在点 $\boldsymbol{a}$ 全等于 0 的特例在内.

为方便起见, 将命题 6.4 对于二元函数的情况另列为一个命题如下.

命题 6.5 设二元函数 $z = f(x,y)$ 在驻点 (x_0, y_0) 的一个邻域内二阶连续可微, 且满足条件 $D = AC - B^2 \neq 0$, 其中 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, 则有以下结论:

(1) 若 $D > 0$, $A > 0\,(C > 0)$, 则 (x_0, y_0) 为极小值点;

(2) 若 $D > 0$, $A < 0\,(C < 0)$, 则 (x_0, y_0) 为极大值点;

(3) 若 $D < 0$, 则 (x_0, y_0) 不是极值点.

注 1 $D = 0$ 的情况相当于命题 6.4 的注中所指出的情况, 其中包括 $A = B = C = 0$ 的特例在内.

注 2 可以将此命题与 §6.6.3 的命题 6.2 作对比, 从而理解平面奇点与二元函数的极值问题之间的密切联系. 例如, 命题 6.5 的情况 (3) 与命题 6.2 的二重点相对应. 这时在点 (x_0, y_0) 的充分小的邻域内满足条件 $f(x,y) - f(x_0, y_0) = 0$ 的点集恰好是经过点 (x_0, y_0) 的两条曲线, 它们将该邻域分成四个区域, $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ 在其中的两个区域内大于 0, 而在另外两个区域内小于 0, 从而点 (x_0, y_0) 不可能是极值点.

本小节的习题一般都可以用上述三个命题求解, 只需注意以下几点:

(1) 利用闭区域上连续函数达到最大值和最小值的定理, 往往可以直接判定某些驻点为极值点, 而不必计算该点处的二阶偏导数;

(2) 求极值时只需考虑定义域的内点, 而在求最值时则要考虑定义域的边界点;

(3) 根据各个习题的具体情况, 也可能找到比上述几个命题更为便捷的方法;

(4) 对于命题 6.4 和 6.5 所不能覆盖的情况需要另作讨论.

习题 3622 研究函数 $z = x^2 - (y-1)^2$ 的极值.

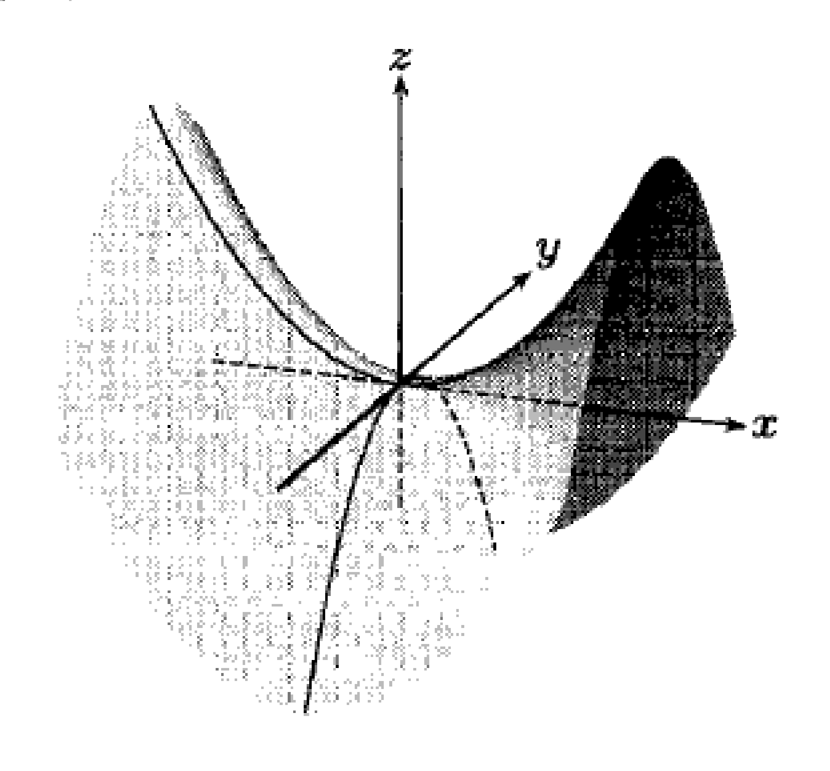
解 1 计算一阶偏导数并列出方程

$$z'_x = 2x = 0, \quad z'_y = -2(y-1) = 0,$$

就得到驻点为 $(0,1)$. 又计算二阶偏导数为 (恰好都是常数)

$$A = z''_{xx} = 2,\ B = z''_{xy} = 0,\ C = z''_{yy} = -2,$$

可见有 $D = AC - B^2 = -4 < 0$, 因此点 $(0,1)$ 不是极值点. (附图中是 $z = x^2 - y^2$ 的图像.) □



习题 3622 的附图

解 2 由于表达式 $x^2 - (y-1)^2$ 的第一项与 y 无关, 于 $x = 0$ 处达到极小值, 而第二项则与 x 无关, 于 $y = 1$ 处达到极大值, 因此即可知只有一个驻点 $(0,1)$, 且在该点

的任何邻域内, 函数值 $z = z(x, y)$ 既可能大于 $z(0,1) = 0$ (只要令 $y = 0$), 又可能小于 $z(0,1) = 0$ (只要令 $x = 0$), 从而 $(0,1)$ 不是极值点. 于是本题的函数没有极值. □

注 函数 $z = x^2 - (y-1)^2$ 的图像是以点 $(0,1)$ 为中心的双曲抛物面, 俗称马鞍面, 点 $(0,1)$ 称为鞍点①. 在附图中作出的是 $z = x^2 - y^2$ 的图像, 只要将它沿着 Oy 轴的正方向移动一个单位长度就得到本题函数的图像.

习题 3624 研究函数 $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ 的极值.

解 从求偏导得到的方程 $z'_x = 2x - y - 2 = 0$ 和 $z'_y = -x + 2y + 1 = 0$ 即可求出唯一的驻点为 $(1,0)$, 又从黑塞矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ 为正定, 可见点 $(1,0)$ 为极小值点, 极小值为 $z(1,0) = -1$. □

注 一元函数中的 $y = ax^2 + bx + c$ 当 $a > 0$ 时, 其图像是开口向上的抛物线, 存在唯一的最小值点. 与此相似, 二元函数 $z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ 当矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ 为正定时, 其图像为开口向上的椭圆抛物面, 存在唯一的最小值点. 本题求出的极小值点就是最小值点. 这些结论可以推广到 n 元函数, 因为这时在公式 (6.5) 中没有余项, 因此命题 6.4 的结论不是局部的, 其情况 (1),(2) 中的点 (x_0, y_0) 为唯一的最值点.

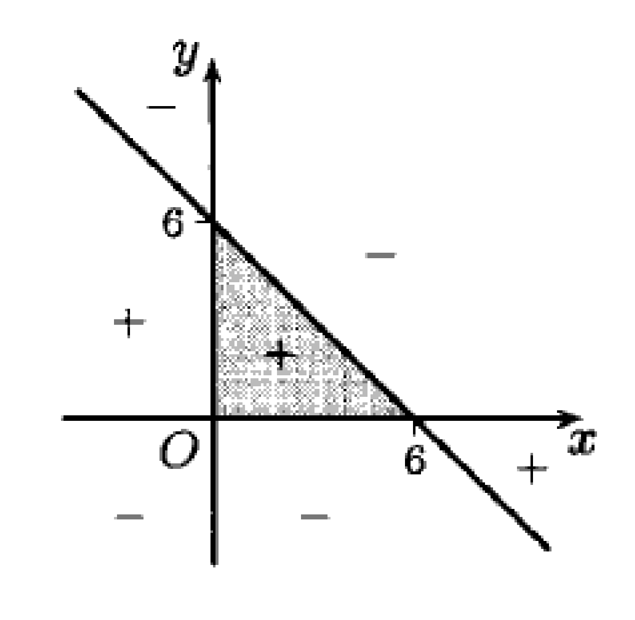
习题 3625 研究函数 $z = x^2y^3(6 - x - y)$ 的极值.

解 计算一阶偏导数并令其为 0, 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3(6 - x - y) - x^2y^3 = xy^3(12 - 3x - 2y) = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2(6 - x - y) - x^2y^3 = x^2y^2(18 - 3x - 4y) = 0.$$

由此即可解得所有驻点为: (1) 满足 $x = 0$, 即 Oy 轴上的所有点; (2) 满足 $y = 0$, 即 Ox 轴上的所有点; (3) 点 $(2,3)$.

由于本题的方程非常简单, 用几何分析方法即可解决问题. 如附图所示, 其中的三条粗黑直线 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ 就是满足 $z = 0$ 的点集全体. 这三条直线将坐标面 xOy 分成 7 个区域, 且容易确定每一个区域上二元函数 z 的符号.



习题 3625 的附图

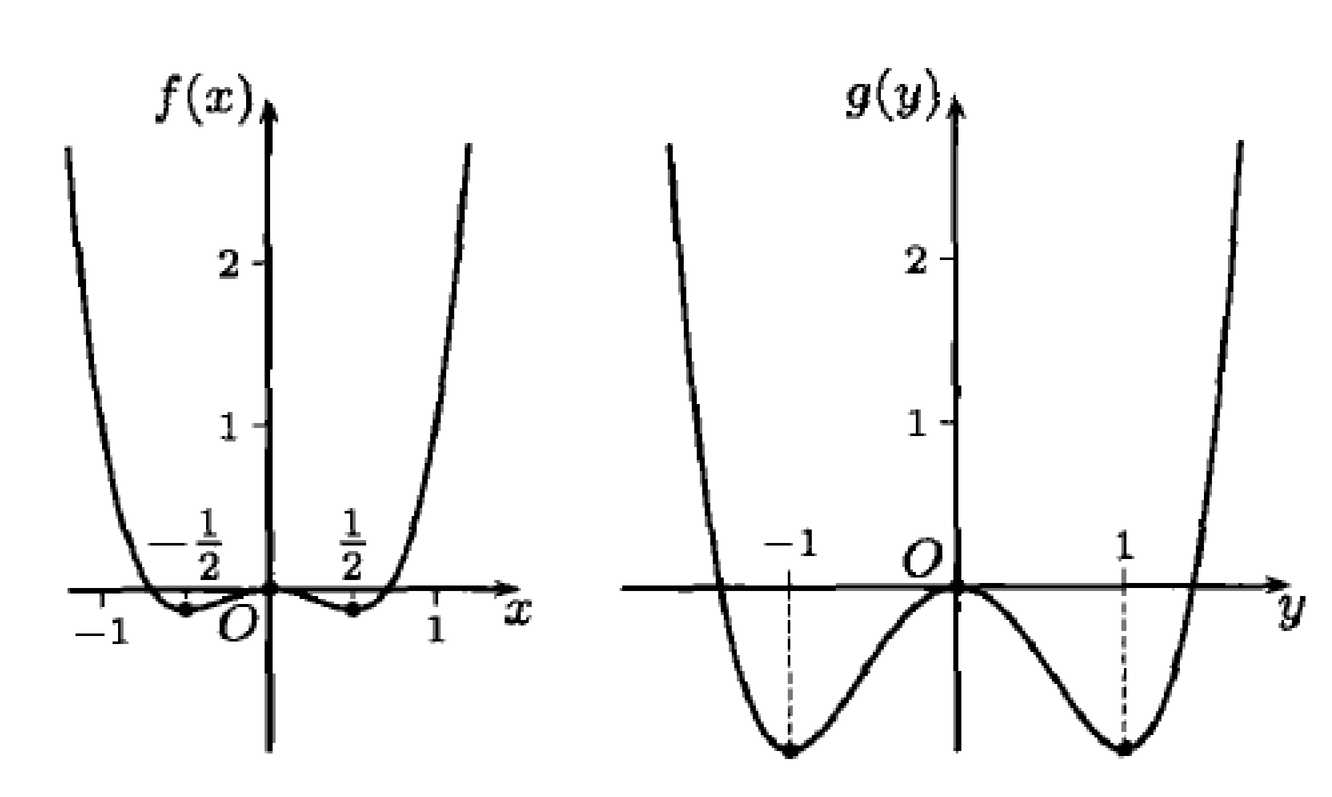
在这些区域中只有一个是有界的闭区域, 在图中标以灰色. 在该区域内 $z > 0$, 而前面求出的驻点 $(2,3)$ 恰好是这个区域的内点. 利用连续函数在有界闭区域上达到最大值和最小值, 可见点 $(2,3)$ 就是极大值点, 极大值为 $z(2,3) = 108$.

对于满足 $x = 0$ 的点, 即 Oy 轴上的点, 从附图可见, 满足 $y > 6$ 和 $y < 0$ 的点都是极大值点, 而满足 $0 < y < 6$ 的点则是极小值点. 这些点处的极值都是 0. 然而点 $(0,0)$ 和 $(0,6)$ 却不是极值点, 因为在它们的任意小的邻域内函数 z 可同时取到正值和负值.

同理可见, 对于满足 $y = 0$ 的点, 即 Ox 轴上的点, 也都不是极值点. □

① 同样也将命题 6.5 中情况 (3) 的驻点称为鞍点.

习题 3627(b) 研究函数 $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$ 的极值.



习题 3627(b) 的附图

解　与习题 3622 类似, 将函数写为 $z=f(x)+g(y)$, 其中

$$f(x)=2x^4-x^2,$$

$$g(y)=y^4-2y^2,$$

则就可以分别研究两个一元函数 $f(x)$ 和 $g(y)$ 的极值.

如附图所示, 通过导数计算即可知道函数 $f(x)$ 有一个极大值点 $x=0$ 和两个极小值点 $x=\pm\frac{1}{2}$, 而函数 $g(y)$ 则有一个极大值点 $y=0$ 和两个极小值点 $y=\pm1$.

由此可见, 本题的二元函数 $z(x,y)$ 有 9 个驻点. 容易看出其中点 $(0,0)$ 为极大值点, 极大值为 $z=0$; 点 $(\pm\frac{1}{2},\pm1)$ 为两个极小值点, 极小值为 $z=-1\frac{1}{8}$; 其余 6 个驻点则如习题 3622 的解 2 所示都是鞍点. □

习题 3629 研究函数 $z=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\ (a>0,b>0)$ 的极值.

解　函数 $z(x,y)$ 的自然定义域是闭区域

$$D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}.$$

如附图所示, 用粗黑线表示 $z=0$ 的点集, 则区域 D 可分为 4 个子区域, 在它们的边界上都有 $z=0$. 又用 $\pm$ 号标出 $z(x,y)$ 的符号.

由附图可以看出, 原点 $(0,0)$ 不是极值点 (而是鞍点).

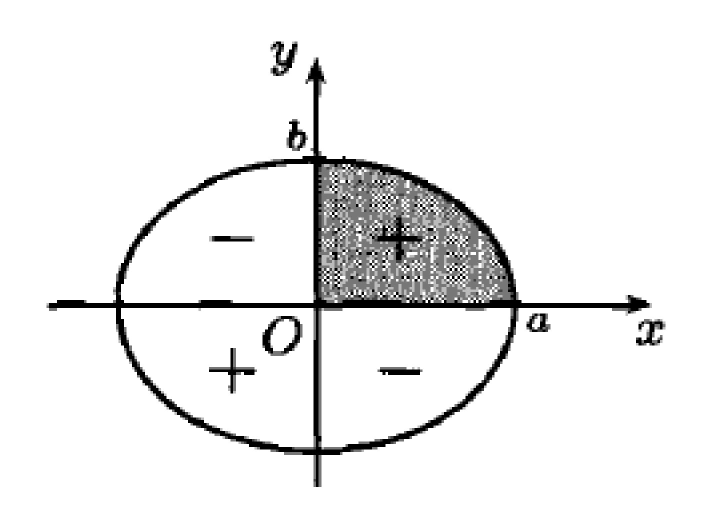
利用函数和区域的对称性可以断定, z 在第一象限中的阴影区域内有最大值点, 且也是极大值点. 从对称性可见, z 在第三象限有取到相同最大值的最大值点, 而在第二和第四象限则有最小值点, 其最小值等于最大值乘以 -1. 这些最值点都是极值点.

记 $\Delta=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$, 于是有 $z=xy\sqrt{\Delta}$. 由此式计算 z_x 如下:

$$z_x=y\sqrt{\Delta}-\frac{x^2y}{a^2\sqrt{\Delta}}=\frac{y}{\sqrt{\Delta}}\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

由对称性可直接写出

$$z_y=\frac{x}{\sqrt{\Delta}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right),$$



习题 3629 的附图

然后求解下列方程组

$$\frac{2x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1.$$

它在第一象限中的唯一解为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

由前面的分析可知，所求出的驻点就是极大值点 (也是最大值点). 将它代入 $z(x,y)$ 中，得到极大值 (也是最大值) 为 $\frac{ab}{3\sqrt{3}}$. 由对称性可求出极小值点和极小值，从略. □

注 本题利用有界闭集上连续函数的最值定理，在计算之前就可以断定最值点的存在性. 又由于利用了函数与区域的双重对称性，因此不必计算所有的驻点 (例如鞍点 $(0,0)$)，也不必计算它们的黑塞矩阵.

习题 3630 研究函数 $z = \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$ 的极值.

提示 此题可归结为一个简单的几何问题. 考虑三维空间的向量 $(x,y,1)$ 和 (a,b,c)，则从三角学的余弦定理可见这两个向量的夹角 θ 的余弦为

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot z.\end{aligned}$$

然后对于 $c \neq 0$ 和 $c = 0$ 的两种情况分别进行讨论. 由问题的几何意义即容易猜测到前者有极大值和极小值 (也就是最大值和最小值)，而后者没有极值. □

习题 3643 研究函数 $u = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$ 的极值.

解 计算三元函数 u 的一阶偏导数为

$$\begin{aligned}u'_x &= 3x^2+12y,\\ u'_y &= 2y+12x,\\ u'_z &= 2z+2,\end{aligned}$$

于是可求出两个驻点为 $(0,0,-1)$ 和 $(24,-144,-1)$.

代替计算两个驻点处的黑塞矩阵，可以直接计算 u 的二阶微分如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= (3x^2+12y)\,\mathrm{d}x + (2y+12x)\,\mathrm{d}y + (2z+2)\,\mathrm{d}z,\\ \mathrm{d}^2u &= (6x\,\mathrm{d}x+12\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x + (2\,\mathrm{d}y+12\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}z^2\\ &= 6x\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}z^2.\end{aligned}$$

于是可直接得出在驻点 $(0,0,-1)$ 处的黑塞矩阵为 $\begin{pmatrix}0&12&0\\12&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 容易看出它有两个正特征值和一个负特征值，因此是不定阵，可见驻点 $(0,0,-1)$ 不是极值点.

又可得出在驻点 $(24,-144,-1)$ 的黑塞矩阵为 $\begin{pmatrix}144&12&0\\12&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，它是正定矩阵[①]，因此驻点 $(24,-144,-1)$ 是极小值点，函数 u 的极小值为

$$24^3+144^2+1-12\cdot24\cdot144-2=-6913. \quad \square$$

① 这里的常用方法是利用高等代数中的西尔维斯特定理，即实对称阵为正定的充要条件是矩阵的各阶顺序主子式都大于 0. 对本题来说可看出点 $(24,-144,-1)$ 处的黑塞矩阵的特征值均大于 0，因此是正定阵.

习题 3646 研究函数 $u = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{b}$ $(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0)$ 的极值.

提示 一种初等解法是设法将函数 u 写成 15 项之和, 且使得这 15 项的乘积为正常数, 因此用平均值不等式即可求出函数 u 的最小值. 另一方面, 使得这 15 项彼此相等的条件与费马定理提供的驻点条件完全相同, 因此最小值点就是唯一的极小值点. □

习题 3651 设由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 定义变量 x 和 y 的隐函数 z, 求其极值.

分析 容易看出方程的几何图像是三维空间中以点 $(1, -1, 2)$ 为心的球面, 因此题中的隐函数 z 的图像即是其上半球面和下半球面. □

解 为了求 z 的极值, 除了先求出它们的显表达式后求解之外, 也可以用隐函数方法计算.

将题设的方程记为 $F(x, y, z) = 0$, 则有 $F'_z = 2z - 4$. 因此对于点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 只要 $z_0 \neq 2$, 就可以在点 P 的一个邻域内确定唯一的隐函数 $z = z(x, y)$. 当 $z = 2$ 时则方程成为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$, 因此不可能确定形状为 $z = z(x, y)$ 的隐函数.

将隐函数代入方程 $F(x, y, z) = 0$ 并求微分得到

$$2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z - 2\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y - 4\,\mathrm{d}z = 0, \tag{6.6}$$

然后整理成

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{z-2}[(1-x)\,\mathrm{d}x + (-1-y)\,\mathrm{d}y],$$

即可确定当 $x = 1, y = -1$ 时 $\mathrm{d}z = 0$. 将 $x = 1, y = -1$ 代入方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$, 可求出 z 的两个值为 6 和 -2. 于是可知在点 $(1, -1, 6)$ 和点 $(1, -1, -2)$ 的某个邻域内方程 $F(x, y, z) = 0$ 分别确定了两个隐函数 $z = z(x, y)$, 而点 $(1, -1)$ 为它们的共同驻点.

为确定上述两个隐函数在驻点 $(1, -1)$ 处是否取极值, 可对 (6.6) 再求微分得到

$$2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}z^2 + 2z\,\mathrm{d}^2z - 4\,\mathrm{d}^2z = 0,$$

其中由于 x, y 是自变量, 因此 $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$. 又因在驻点处 $\mathrm{d}z = 0$, 于是就有

$$\mathrm{d}^2z = -\frac{1}{z-2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

因此可从命题 6.4 (或命题 6.5) 知道 $z = 6$ 是极大值, 而 $z = -2$ 是极小值. □

习题 3653 设由方程 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$ 定义变量 x 和 y 的隐函数 z, 求其极值.

提示 这是坐标面 xOz 上的双纽线 $(x^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - z^2)$ 围绕 Oz 轴旋转得到的旋转曲面方程, 由此曲面的图像即可在计算之前猜测到可能会有什么样的结论. 这里可参考第一册附录一的习题 371.1(g) 和 §4.7.3 的习题 2483.2, 此外还可参考 §6.1.2 中关于旋转曲面方程的习题 3172. □

习题 3681 证明: 函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

解 计算一阶微分得到

$$dz=[-(1+e^y)\sin x]\,dx+[(\cos x-1-y)e^y]\,dy.$$

于是从 $dz=0$ 可求出无穷多个驻点为

$$x=n\pi,y=(-1)^n-1\ \ (n\in\mathbb{Z}).$$

然后再计算二阶微分得到

$$d^2z=[-(1+e^y)\cos x]\,dx^2+2(-e^y\sin x)\,dx\,dy+[(\cos x-2-y)e^y]\,dy^2.$$

于是当 $n=2k\ (k\in\mathbb{Z})$ 为偶数时, 在驻点 $(2k\pi,0)$ 处的黑塞矩阵为 $\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}$, 可见这些驻点均为极大值点.

然而当 $n=2k-1\ (k\in\mathbb{Z})$ 为奇数时, 在驻点 $((2k-1)\pi,-2)$ 处的黑塞矩阵为 $\begin{pmatrix}1+e^{-2}&0\\0&-e^{-2}\end{pmatrix}$, 可见这些驻点都是鞍点.

综上所述, 函数 z 有无穷多个极大值点, 但没有任何极小值点. □

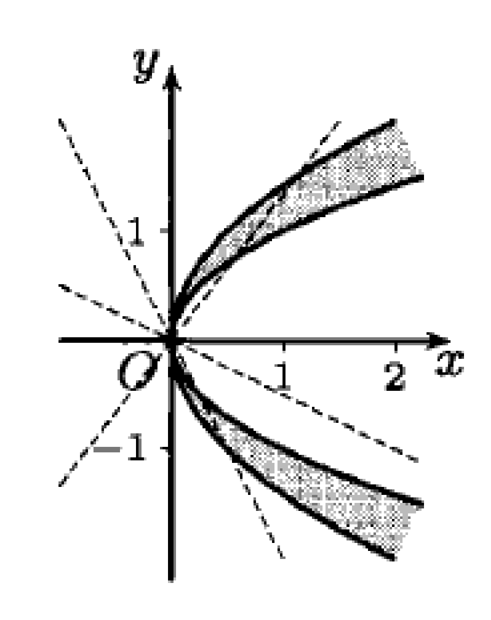
注 这种情况对于一元连续函数是不可能发生的. 这与后面 §6.7.3 的习题 3650 的注中所说的情况有联系, 即鞍点的存在起了关键作用.

习题 3682 函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 有极小值的充分必要条件是否为此函数在通过点 M_0 的每一条直线上有极小值呢?

研究例子 $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$.

解 必要性显然成立, 但从所提供的例子可知充分性不成立.

如附图所示, 在抛物线 $x=y^2$ 和 $2x=y^2$ 之间的灰色区域的内点处, 函数 $z(x,y)<0$, 而在该区域及其边界之外均有 $z(x,y)>0$. 于是如图上绘出的三条虚直线所示, 函数 $z(x,y)$ 在每一条虚直线上所取的值在原点总是达到极小值 0, 然而作为二元函数的 $z(x,y)$ 在原点的任意邻近既可取到正值, 又可取到负值, 因此原点 $(0,0)$ 不是该函数的极值点. □



习题 3682 的附图

6.7.2 条件极值问题 (习题 3654–3671)

这里只考虑存在等式约束条件时的条件极值问题, 其中的主要方法是拉格朗日乘子法. 以下对于存在一个等式约束条件和多个等式约束条件的情况分别给出合理应用该方法的主要根据. 为简明起见, 对于一个约束条件的命题只对二元函数的条件极值问题来叙述. 这些命题的证明见本节的最后补注小节 §6.7.5.

命题 6.6 (单个约束条件下的拉格朗日乘子法) 设函数 $f(x,y)$ 和 $\varphi(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 内连续可微. 若点 $(a,b)\in D$ 是满足约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的目标函数 $f(x,y)$ 的条件极值点或条件最值点, 且梯度向量 $\operatorname{grad}\varphi=(\varphi_x,\varphi_y)$ 在点 (a,b) 处不是零向量, 则存在 λ_0, 使得在 a,b,λ_0 处, 拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

的偏导数均等于 0:

$$L'_x(a,b,\lambda_0)=0,\quad L'_y(a,b,\lambda_0)=0,\quad L'_\lambda(a,b,\lambda_0)=0.$$

注 1 命题 6.6 给出的方程组是条件极值点应当满足的必要条件. 与费马定理的意义相似, 从上述方程组求得的解只是条件极值嫌疑点, 也称为驻点. 此外, 函数 f,φ 的不可微点, $\nabla\varphi=\mathbf{0}$ 的点也都是条件极值嫌疑点.

注意: 从 §6.7.5 中对命题的证明可知, 对于 $\varphi(x,y)=0$ 这样的等式约束而言, 条件最值点也是条件极值点. 这相当于一元函数中当最值点为内点时也是极值点.

注 2 $L'_\lambda=0$ 就是约束 $\varphi=0$. 条件 $L'_x=L'_y=0$ 则可写为向量形式:

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(a,b)}+\lambda_0\operatorname{grad}\varphi\Big|_{(a,b)}=\mathbf{0}.$$

这表明在点 (a,b) 处 f 的梯度与 φ 的梯度共线. 利用梯度向量与等值线的正交关系 (参见 §6.2.6 和习题 3342 及其附图), 可见在点 (a,b) 处约束条件的曲线 $\varphi(x,y)=0$ 与等值线 $f(x,y)=f(a,b)$ 相切.

更一般的条件极值或条件最值问题为: 设函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $k<n$ 个函数 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,k)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上连续可微, 要求在满足等式约束条件

$$\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=0\ \ (i=1,\cdots,k)$$

时的目标函数 $z=f(x_1,\cdots,x_n)$ 的条件极值或条件最值.

定义这时的拉格朗日函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=f(x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^k\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_n),$$

其中的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 称为拉格朗日乘子①.

在命题 6.6 中解决了 $k=1$ 和 $n=2$ 时的问题, 它的推广如下.

命题 6.7 (多个约束条件下的拉格朗日乘子法) 设函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $k<n$ 个函数 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,k)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内连续可微. 若点 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 是满足约束条件 $\varphi_1=\cdots=\varphi_k=0$ 下的目标函数 f 的条件极值点或条件最值点, 且雅可比矩阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant n}}$ 在点 P_0 处满秩, 则存在 k 个数 $\lambda_1^0,\cdots,\lambda_k^0$, 它们与 $x_1^0,\cdots,x_n^0$ 一起, 使得 $n+k$ 元的拉格朗日函数

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=f(x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^k\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)$$

在该处的偏导数均等于 0:

$$L'_{x_1}=0,\cdots,L'_{x_n}=0;\ L'_{\lambda_1}=0,\cdots,L'_{\lambda_k}=0.$$

注 1 与命题 6.6 相同, 这时的条件最值点也是条件极值点. 同时定理的结论只是 P_0 为条件极值点的必要条件. 也称满足命题最后的 $n+k$ 个偏导数等于 0 的点为驻点. 命题中的雅可比矩阵满秩在只有一个约束条件 (即 $k=1$) 时就是梯度向量非零.

① 从下面的注 2 可见, 在 L 的定义中于乘子前不取正号而改取负号则更为自然, 但这个符号的选取对计算没有影响.

注 2 利用梯度概念可将前 n 个方程 $L'_{x_1}=\cdots=L'_{x_n}=0$ 写成为一个有明显几何意义的向量等式:

$$\operatorname{grad} f(P_0)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^0 \operatorname{grad}\varphi_i(P_0), \tag{6.7}$$

即在点 P_0 处目标函数 f 的梯度向量可以用约束条件中的函数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 在该点的 k 个梯度向量线性表出, 其组合系数就是拉格朗日乘子的值 λ_i^0 $(i=1,\cdots k)$.

如上所说, 拉格朗日乘子法相当于无条件极值问题中的费马定理 (即命题 6.3), 所求得的还只是极值嫌疑点, 因此还需要有判定它是否为极值点的方法. 由于这时的 $\mathrm{d}f$ 一般不等于 0, 因此不可能用无条件极值问题中的命题 6.4 和 6.5. 这方面的推广是下列命题, 其中的记号与命题 6.7 相同.

命题 6.8 设 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_k^{(0)})$ 是命题 6.7 中得到的驻点和乘子, 函数 f 和 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 在点 $P_0(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 的一个邻域内二阶连续可微. 若关于 $\mathrm{d}x_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 的二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\lambda}^{(0)})\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j \tag{6.8}$$

在满足线性约束条件

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n=0\ \ (i=1,\cdots,k) \tag{6.9}$$

时为正定 (负定), 则点 P_0 为条件极小值点 (极大值点). 又若 (6.8) 在满足条件 (6.9) 时为不定号的二次型, 则 P_0 不是极值点.

小结 拉格朗日乘子法是解决条件极值问题的有力工具, 然而在用该方法之前应当检查雅可比矩阵满秩的条件是否成立, 凡是不满足该条件的点也都是极值嫌疑点.

习题 3654 求函数 $z=xy$ 的条件极值, 若 $x+y=1$.

解 目标函数 $z=xy$ 的梯度为

$$\operatorname{grad} z=(y,x),$$

它在点 (x,y) 满足约束条件 $x+y=1$ 时不会是零向量, 因此满足命题 6.6 的条件. 作拉格朗日函数

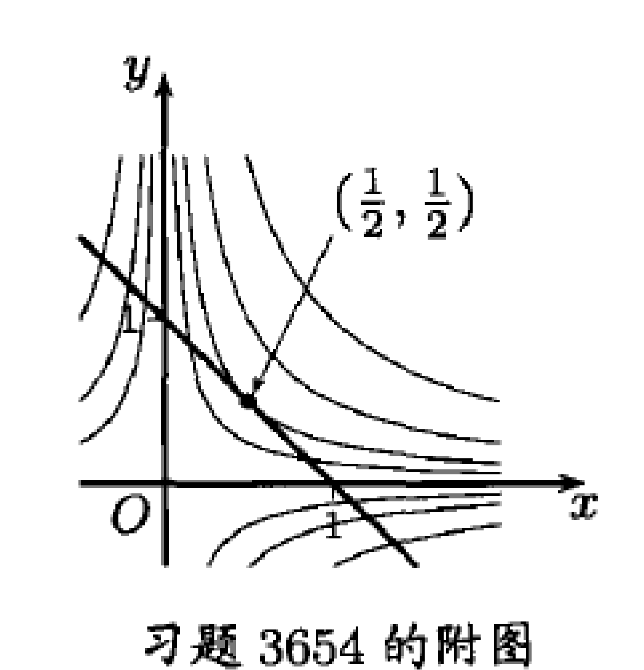
$$L=xy+\lambda(x+y-1),$$

计算得到方程组为

$$L'_x=y+\lambda=0,\ L'_y=x+\lambda,\ L'_\lambda=x+y-1=0.$$

由此可解得驻点为

$$x_0=\frac{1}{2},\ y_0=\frac{1}{2},\ \lambda_0=-\frac{1}{2}.$$



习题 3654 的附图

计算 L 关于 x,y 的二阶偏导数, 得到黑塞矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, 于是 (6.8) 的二次型为 $2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 又从约束条件 $x+y=1$ 得到微分 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 满足的约束条件 (即 (6.9)) 为

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0,$$

于是在 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 不全为 0 时有

$$2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}x^2 < 0,$$

由命题 6.8 可见点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 是条件极大值点, 条件极大值 $\max z = \frac{1}{4}$.

在附图中用粗黑直线作出了约束条件 $x + y = 1$ 的图像, 又用细曲线作出了目标函数 $z = xy$ 的若干条等值线. 可以看到, 在极值点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 处等值线 $xy = \frac{1}{4}$ 与直线 $x + y = 1$ 相切. 又从附图中可见, 在直线 $x + y = 1$ 上除了上述极值点之外, 在其他点处都与 $z = xy$ 的某条等值线相交, 但不相切, 从而都不是目标函数的极值点. □

注 若将本题的要求改为求最大值, 则可用初等不等式求解[①]. 这时可见只需要考虑 $x > 0, y > 0$ 的范围. 从平均值不等式得到

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

且当 $x = y$ 时成立等号, 就可知道最大值为 1/4, 且仅当 $x = y = 1/2$ 时达到.

另一个方法是利用约束条件 $x + y = 1$ 消去其中一个变量, 例如令 $y = 1 - x$, 则就得到 $z = xy = x(1 - x)$, 然后即可求出于 $x = 1/2$ 时 z 达到最大值 1/4.

习题 3655 求函数 $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ 的条件极值, 若 $x^2 + y^2 = 1$.

解 此时梯度 $\mathrm{grad}\, z = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ 不是零向量. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

求偏导得到方程组

$$L'_x = \frac{1}{a} + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0.$$

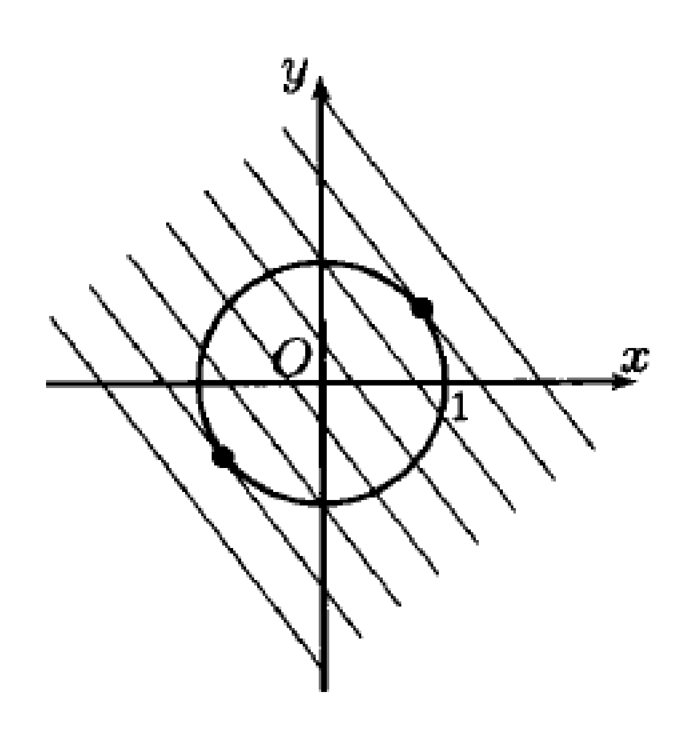
它们与约束方程 $x^2 + y^2 = 1$ 一起即可确定出两个驻点为

$$P_1\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$P_2\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

由于满足约束条件 $x^2 + y^2 = 1$ 的点集为有界闭集, 因此 z 必有最大值和最小值, 且不相同. 从命题 6.6 知道相应的最值点也是极值点, 因此所得的两个驻点就是极大值点和极小值点. 将它们代入 $z(x, y)$ 就得到两个极值为:

$$z(P_1) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \quad z(P_2) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}. \quad □$$



习题 3655 的附图

注 附图中对于 a, b 同号的情况作出了目标函数 $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ 的若干条等值线, 两个小圆点是极值点, 在该处的等值线与约束条件 $x^2 + y^2 = 1$ 的图像相切.

习题 3656 求函数 $z = x^2 + y^2$ 的条件极值, 若 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

提示 本题是后面的习题 3667 在 $n = 2$ 时的特例. 几何上即是考虑直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 上的点到原点距离平方的极值, 显然有极小值但无极大值. 本题用消去一个变量的方法也容易求解, 即将问题归结为一元函数的极值问题. □

① 下面的习题 3655–3657 等也都是如此.

习题 3657 (a) 求函数 $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ 的条件极值，若 $x^2 + y^2 = 1$.

提示 本题是后面的习题 3671 在 $n = 2$ 时的特例, 本质上是一个线性代数问题. 本题也见于 [32] 的例题 21.4.1, 其中给出了三个解法. □

习题 3663 (a) 求函数 $u = xyz$ 的条件极值，若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

解 1 从有界闭集上连续函数必有最值可见问题有解, 且可看出最大值必大于 0, 最小值必小于 0. 这时的约束条件的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

除非 $x = y = z$, 矩阵一定满秩. 然而在满足约束条件 $x + y + z = 0$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 时 $x = y = z$ 不可能成立. 于是用拉格朗日乘子法的条件满足.

作出拉格朗日函数 $L = xyz + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, 求偏导得到

$$L'_x = yz + \lambda + 2\mu x = 0,\ L'_y = zx + \lambda + 2\mu y = 0,\ L'_z = xy + \lambda + 2\mu z = 0.$$

从这三个方程和两个约束条件可以组合得到 $xL'_x + yL'_y + zL'_z = 3xyz + 2\mu = 0$. 这样就可以从前三个方程得到

$$2\mu x^2 + \lambda x = \frac{2\mu}{3},\ 2\mu y^2 + \lambda y = \frac{2\mu}{3},\ 2\mu z^2 + \lambda z = \frac{2\mu}{3}.$$

固定一组 λ, μ, 则可见 x, y, z 满足同一个二次方程, 因此其中至少有两个相等. 如前所说, 满足约束条件的点的三个坐标不可能全相等, 于是只能是恰好两个坐标相等.

从问题的对称性知, 这种极值点或最值点的个数应当是 3 的倍数, 即成组出现, 且在每一组中的极值或最值相同. 因此不妨设 $x = y \neq z$ 直接求解. 以下已经不再需要上述驻点方程组, 也没有必要去求出拉格朗日乘子 λ, μ.

于是问题已经转化为在约束条件 $2x + z = 0, 2x^2 + z^2 = 1$ 下求 $u = x^2 z$ 的最值. 从前两个约束已经可以解出 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z = \mp\sqrt{\frac{2}{3}}$, 从而得到 $u = \mp\frac{1}{3\sqrt{6}}$. 利用在有界闭集 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上 u 一定有最值, 可见已经得到条件最大值 $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ 和条件最小值 $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, 它们也同时是条件极大值和条件极小值. □

解 2 本题的条件最值可利用代数方程的根与系数关系求出. 先由约束条件得到

$$xy + yz + zx = \frac{1}{2}[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] = -\frac{1}{2},$$

因此 x, y, z 是关于未知数 v 的下列三次方程的三个实根:

$$\begin{aligned}(v - x)(v - y)(v - z) &= v^3 - (x + y + z)v^2 + (xy + yz + zx)v - xyz \\ &= v^3 - \frac{1}{2}v - xyz = 0.\end{aligned}$$

根据 §2.11.5 的习题 1470, 三次方程 $v^3 + pv + q = 0$ 的根全为实数的充要条件是 $q^2 + \frac{4p^3}{27} \leqslant 0$, 因此就可从 $p = -1/2$ 和 $q = -xyz$ 得到

$$(xyz)^2 \leqslant \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{54},$$

两边开平方即可见 $u = xyz$ 的最大值和最小值为 $\pm\frac{1}{3\sqrt{6}}$. □

注 本题的其他解法还很多, 例如从两个约束条件消去 z, 这样就减少了用拉格朗日乘子法时的变量个数. 另一个方法是从两个约束条件消去 x, y, 从而将问题转换成为关于 z 的一元函数的最值问题. 这时需要确定 z 的变化范围.

习题 3665 求函数 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 的条件极值, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$ $(a > b > c > 0,\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$.

解 根据连续函数在有界闭集上达到最值, 可见函数 u 有条件最大值和条件最小值, 它们同时也是条件极大值和条件极小值.

这时函数 $\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ 和 $\varphi_2(x, y, z) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ 的雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

在满足 $\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) = 0$ 的点处满秩 (这里的细节请读者补充).

作出拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma),$$

就可求偏导得到方程组

$$L'_x = \frac{2x}{a^2} - 2\lambda x - \mu\cos\alpha = 0,$$

$$L'_y = \frac{2y}{b^2} - 2\lambda y - \mu\cos\beta = 0,$$

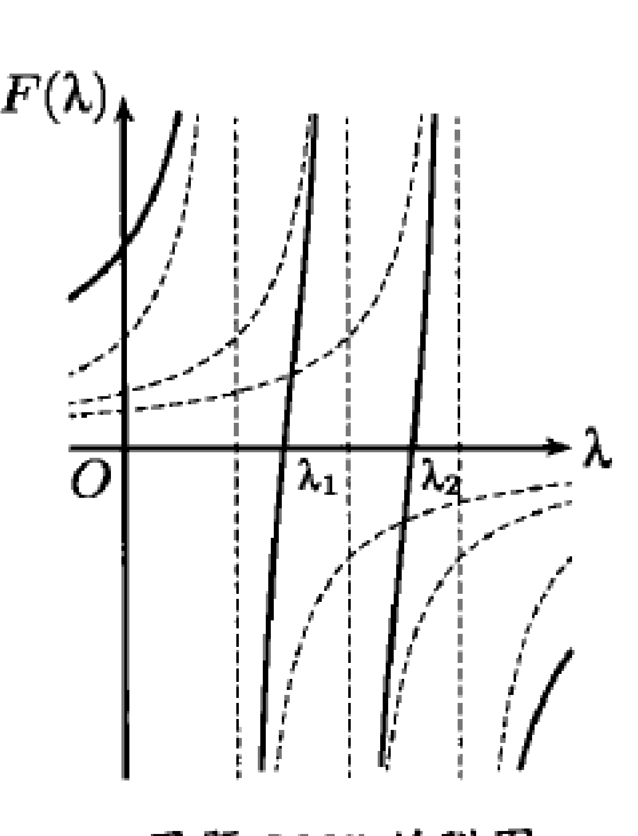
$$L'_z = \frac{2z}{c^2} - 2\lambda z - \mu\cos\gamma = 0.$$

将这三个方程组合为 $xL'_x + yL'_y + zL'_z = 0$, 并利用两个约束条件, 就得到 $u = \lambda$. 这表明只要求出乘子 λ 的值就得到所要的极值.

从方程组 $L'_x = L'_y = L'_z = 0$ 解出 x, y, z 并代人第二个约束条件中, 就得到只含有乘子 λ 的方程

$$F(\lambda) = \frac{\cos^2\alpha}{\frac{1}{a^2} - \lambda} + \frac{\cos^2\beta}{\frac{1}{b^2} - \lambda} + \frac{\cos^2\gamma}{\frac{1}{c^2} - \lambda} = 0.$$

以下先处理三个方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 都不等于 0 的情况. 这时上述方程中的每一项的图像都是单调递增的双曲线, 因此利用图像相加方法 (见 §1.4.3), 就得到附图所示的图像, 其中三条垂直渐近线是 $x = \frac{1}{a^2}$, $x = \frac{1}{b^2}$ 和 $x = \frac{1}{c^2}$. 由此可见, 上述方程恰好确定了两个 λ 值, 记为 $\lambda_1 < \lambda_2$. 如前所述, 它们就是所要求的极小值和极大值.



习题 3665 的附图

将 $F(\lambda)=0$ 的三个分式通分, 即可得到关于 λ 的两个根的方程为

$$\lambda^2-\Big(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\Big)\lambda+\Big(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\Big)=0.$$

以下简述在方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 中出现 0 的处理方法. 对于方向余弦中只有一个为 0 的情况, 例如设 $\cos\gamma=0$, 则可从第一个约束条件中消去 z 得到目标函数为

$$u=\Big(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\Big)x^2+\Big(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\Big)y^2+\frac{1}{c^2},$$

约束条件为 $x\cos\alpha+y\cos\beta=0$. 这与习题 3656 类似, 只是目前还多一个 $x^2+y^2\leqslant 1$. 再消去 y 就成为 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 上的一元函数的极值问题.

对于方向余弦中恰有两个为 0 的情况, 例如设 $\cos\alpha=\cos\beta=0$, 则从第二个约束条件可见 $z=0$, 于是问题变为在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下求 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 的极值. 这可以参见习题 3657(a). □

习题 3666 求函数 $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$ 的条件极值, 若 $Ax+By+Cz=0$, $x^2+y^2+z^2=R^2$, $\dfrac{\xi}{\cos\alpha}=\dfrac{\eta}{\cos\beta}=\dfrac{\zeta}{\cos\gamma}$, 其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

提示 这里只指出对本题的两种理解方法.

第一种理解是将最后两个条件, 即 $\dfrac{\xi}{\cos\alpha}=\dfrac{\eta}{\cos\beta}=\dfrac{\zeta}{\cos\gamma}$, 其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 看成为关于 $u=$ 常数的球心 (ξ,η,ζ) 的一个限制, 但球心还是固定的. 这与《习题集》的答案一致.

第二种理解见 [5], 可供参考, 其中认为球心 (ξ,η,ζ) 可以在方向余弦给定且经过原点的无限直线上任意选取. 引入

$$\rho=\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma},$$

则目标函数 u 成为 x,y,z,ρ 的四元函数

$$u=R^2-2\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)+\rho^2.$$

由于对 ρ 无限制, 因此函数 u 不可能有最大值, 但可以有最小值.

将 u 中关于 ρ 的项配平方得到

$$u=R^2+[\rho-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)]^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2,$$

则在求最小值时可以舍去右边的第二项, 即取 ρ 使其为 0, 然后只要求

$$v=R^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$

的最小值. □

习题 3667 求函数 $u=x_1^2+\cdots+x_n^2$ 的条件极值, 若 $\dfrac{x_1}{a_1}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0;\ i=1,2,\cdots,n)$.

解 这时 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{x_1}{a_1}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}$ 的梯度不会是零. 作拉格朗日函数

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=x_1^2+\cdots+x_n^2+\lambda\Big(\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}-1\Big),$$

则求偏导就得到方程组

$$L'_{x_1}=2x_1+\frac{\lambda}{a_1}=0,\cdots,L'_{x_n}=2x_n+\frac{\lambda}{a_n}=0.$$

然后再联合约束条件即可确定出唯一的驻点. 但这里可以不必求出驻点. 利用柯西不等式 (见 §2.7.2 的习题 1293 及其注), 就有

$$1=\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}},$$

于是可见有

$$u=x_1^2+\cdots+x_n^2\geqslant\frac{1}{\dfrac{1}{a_1^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}}.$$

又从柯西不等式成立等式的条件知道, 当且仅当 $x_1a_1=\cdots=x_na_n$ 时 u 达到右边的条件最小值. 由于这也就是条件极小值, 因此前面的唯一驻点即是条件极小值点. □

注 1 若本题改为求最值, 则只要用柯西不等式即可.

注 2 从几何上看, 本题即是在 n 维空间中求原点到超平面 $\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}=1$ 上的点的距离 (平方) 的极值. 容易看出, 这个距离的最小值就是原点到该超平面的距离, 但没有最大值.

习题 3671 在 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$ 的条件下, 求二次型 $u=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ 的极值.

解 1 这时函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 的梯度不会是零向量. 作拉格朗日函数

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1\Big),$$

然后就可求偏导得到方程组

$$L'_{x_i}=2\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-\lambda x_i\Big)=0\ \ (i=1,\cdots,n).$$

若用矩阵向量记号, 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$, 则就可以将上述方程组写为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}.$$

由于约束条件为 $\|\boldsymbol{x}\|=1$, 因此从线性代数知识可见, 取 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 取 $\boldsymbol{x}$ 为与此特征值对应的单位特征向量, 这就是所求的驻点.

由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 因此存在 n 个实特征值 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 记 $\boldsymbol{x}^{(i)}=(x_1^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})^T$ 是与 λ_i 对应的单位特征向量, 则就有

$$u(\boldsymbol{x}^{(i)})=(\boldsymbol{x}^{(i)})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(i)}=\lambda_i,$$

可见函数 u 在驻点处的取值就等于相应的拉格朗日乘子.

以下有几种可能性. 若 $\lambda_1=\lambda_n$, 例如 $\boldsymbol{A}$ 为单位矩阵的倍数时就是如此. 这时函数 u 为常值函数, 满足约束条件的每一个 $\boldsymbol{x}$ 都是极值点.

除此之外, 则 λ_1 就是最小值, λ_n 就是最大值. 它们同时也是极小值和极大值.

若有介于它们之间的特征值 λ_i, 即 $\lambda_1 < \lambda_i < \lambda_n$, 则可以用命题 6.8 中带有约束条件的二次型来证明 λ_i 不是极值.

这时的二次型 (6.8) 是

$$f(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = 2(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{A} - \lambda_i)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

约束条件是

$$(\boldsymbol{x}^{(i)})^T\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

由于实对称阵的对应于相异特征值的特征向量相互正交, 因此 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ 都满足上述约束条件, 于是当 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 不是零向量时就得到

$$f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = 2(\lambda_1 - \lambda_i)\|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\|^2 < 0,$$

以及

$$f(\boldsymbol{x}^{(n)}) = 2(\lambda_n - \lambda_i)\|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\|^2 > 0,$$

可见 $f(\mathrm{d}\boldsymbol{x})$ 在约束条件下为不定号的二次型, 因此 λ_i 不是极值. □

解 2 (概要) 由于实对称阵可以通过正交变换化为对角阵, 而正交变换保持向量的模长不变, 因此不妨设二次型 u 已经是平方项的代数和:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2,$$

且满足 $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, 同时约束条件仍然是 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. 由此即可直接导出与解 1 相同的结论. □

6.7.3 最值问题 (习题 3650, 3672–3680, 3683–3685)

习题 3650 (惠更斯问题) 在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使分数

$$u = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)\cdots(x_n + b)}$$

的值最大.

解 本题是求最大值问题. 由于 u 作为 n 元函数的定义域为 n 维立方体 $[a, b]^n$, 因此利用有界闭集上的连续函数必定有最大值, 可见最大值点的存在性是有保证的.

记最大值点为 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$, 然后在函数 u 中固定 $x_i = x_i^{(0)}$ $(i = 2, \cdots, n)$, 则得到以 $x_1 \in [a, b]$ 为自变量的一元函数

$$u(x_1, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) = \frac{x_1}{(a + x_1)(x_1 + x_2^{(0)})} \cdot \frac{x_2^{(0)} \cdots x_n^{(0)}}{(x_2^{(0)} + x_3^{(0)})\cdots(x_n^{(0)} + b)},$$

它必定在 $x_1 = x_1^{(0)}$ 时达到最大. 由于上式的第一个因子可写为

$$\frac{x_1}{(a + x_1)(x_1 + x_2^{(0)})} = \frac{1}{x_1 + \dfrac{a x_2^{(0)}}{x_1} + a + x_2^{(0)}},$$

而分母前两项的乘积为常数 $ax_2^{(0)}$, 因此当且仅当这两项相等时分母达到最小①. 这样就得到

$$(x_1^{(0)})^2 = ax_2^{(0)},$$

且有 $a \leqslant x_1^{(0)} \leqslant x_2^{(0)}$. 用同样的方法可得到

$$(x_2^{(0)})^2 = x_1^{(0)}x_3^{(0)}, \cdots, (x_n^{(0)})^2 = x_{n-1}^{(0)}b,$$

且满足

$$a \leqslant x_1^{(0)} \leqslant x_2^{(0)} \leqslant \cdots \leqslant x_n^{(0)} \leqslant b.$$

由此即可得到比例等式

$$\frac{x_1^{(0)}}{a} = \frac{x_2^{(0)}}{x_1^{(0)}} = \cdots = \frac{x_n^{(0)}}{x_{n-1}^{(0)}} = \frac{b}{x_n^{(0)}}.$$

将上述比例记为 q, 可见数组 $\{a, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, b\}$ 为公比为 q 的等比数列. 为求 q, 可将上述 $n+1$ 个分式相乘, 则就可求得 $b = aq^{n+1}$, 即 $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$, 且同时得到

$$x_i^{(0)} = aq^i \ \ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

这样就可以求出最大值

$$\begin{aligned}
\max u &= \frac{x_1^{(0)} \cdots x_n^{(0)}}{(a + x_1^{(0)})(x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) \cdots (x_{n-1}^{(0)} + x_n^{(0)})(x_n^{(0)} + b)} \\
&= \frac{x_1^{(0)} \cdots x_n^{(0)}}{ax_1^{(0)} \cdots x_n^{(0)} \left(1 + \frac{x_1^{(0)}}{a}\right) \cdots \left(1 + \frac{x_n^{(0)}}{x_{n-1}^{(0)}}\right)\left(1 + \frac{b}{x_n^{(0)}}\right)} \\
&= \frac{1}{a(1+q)^{n+1}} = \frac{1}{a\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{n+1}} \\
&= \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}}. \quad \square
\end{aligned}$$

注 若用费马定理计算驻点, 则可求出与上述解中相同的点 $(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$, 且可计算出该点处的黑塞矩阵为负定, 因此可知该驻点为极大值点. 然而多元函数在有界闭集上只有唯一的极大值点时不能推出该点一定是最大值点②, 因此这样的解法是不完整的. 除非能够证明该极大值不小于函数在边界上的所有可能取值, 这才能够确定它就是最大值. 然而, 本题在边界上的讨论也不很简单. 因此本书采取以上解法.

惠更斯问题来自于一个有趣的力学问题, 见 [33] §8.4 的例 5.

小结 习题 3650 是最值问题, 它与本小节中求极值的其他问题均不相同. 如同闭区间上的一元函数的最值问题一样, 若最值在函数定义域的内点处达到, 则该点就是极

① 这可从中学数学的基本不等式 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ 推出, 也就是 $n = 2$ 的平均值不等式, 其中 a, b 为非负数, 当且仅当 $a = b$ 时成立等号.

② 这是一元函数的最值问题与多元函数的最值问题的一个显著差异. 参见 [11] 的第二卷 200 小节的最后附注及其中的例子, 其中鞍点的存在起了关键作用.

值点, 但最值也可能在定义域的边界处达到, 因此在最值问题中, 一般除了研究极值之外还需要讨论边界上的函数性态.

习题 3650 的上述解法是利用有界闭区域上连续函数必定达到最值, 然后求出最值点, 这是一种常用方法.

在上页的底注中指出了一元函数和多元函数在最值问题上的差异. 这里再补充一点, 即本节前面列出的命题 6.4–6.5 都具有局部性质, 因此它们至多只能解决驻点在某个邻域内具有极值点的特性, 但一般并不能推出它们是函数定义域内的最值点, 除非同时用其他方法证明该函数的最值点必定不在边界上, 例如习题 3625, 3629 等.

与该底注中指出的多元函数的情况不同, 读者可试证以下练习题.

练习题 设 $f \in C[a,b]$, 且已知 $x_0 \in (a,b)$ 为 f 的唯一极大值点 (极小值点), 则 x_0 也是 f 在 $[a,b]$ 上的最大值点 (最小值点).

习题 3672 若 $n \geqslant 1$ 及 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, 证明不等式: $\dfrac{x^n+y^n}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

解 按照《习题集》中的提示, 只要在 $x+y=S$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 的条件下求函数 $z=\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)$ 的最小值. 由于连续函数在有界闭集上必有最小值, 因此最小值点的存在性是有保证的.

这时 $\varphi(x,y)=x+y$ 的梯度 $(1,1)$ 不是零向量. 作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)-\lambda(x+y-S),$$

则求偏导后得到方程组

$$L'_x=\frac{n}{2}x^{n-1}-\lambda=0,$$

$$L'_y=\frac{n}{2}y^{n-1}-\lambda=0.$$

联合约束条件 $x+y=S$ 即可解得 $x=y=\dfrac{S}{2}$. 将目标函数在该点的值

$$z\left(\frac{S}{2},\frac{S}{2}\right)=\left(\frac{S}{2}\right)^n=\frac{S^n}{2^n}$$

与约束集合的边界点上的函数值 $z(S,0)=z(0,S)=\dfrac{1}{2}S^n$ 作比较, 可见 $x=y=\dfrac{S}{2}$ 即是最小值点, 这时的

$$z(x,y) \geqslant z\left(\frac{S}{2},\frac{S}{2}\right)=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

就是要求证的不等式. □

注 可看出本题的不等式只是 §2.7.3 中的习题 1296 的结论 (2) 之特例, 然而所用的证明方法完全不同.

习题 3673 证明赫尔德不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}},$$

其中 $a_i \geqslant 0$, $x_i \geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$, $k>1$, $\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k'}=1$.

提示 本题即是第一册中的命题 2.8, 在 §2.8.3 中已经给出了两个证明. 这里可按照《习题集》中的提示, 即在 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = A$ 的约束条件下, 求

$$u = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\Big)^{\frac{1}{k}} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\Big)^{\frac{1}{k'}}$$

的最小值.

另一种对偶方法是在条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{k'} = 1$ 下求目标函数 $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ 的最大值. □

在下一个习题 3674 中的阿达马不等式是一个著名的基本不等式, 它有明显的几何意义. 与 $n = 2, 3$ 的熟知情况作类比, 可将 n 阶行列式看成为 n 维平行多面体的体积, 阿达马不等式表明这个体积不会超过同样边长但各边相互垂直的 n 维长方体的体积.

阿达马不等式据说已经有上百种的不同证法 [1]. 下面先在解 1 中给出按照《习题集》的提示的证明, 然后再给出几个其他证明.

习题 3674 (阿达马不等式) 对于 n 阶行列式 $A = |a_{ij}|$, 证明不等式

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big).$$

解 1 按照《习题集》中的提示, 在 n 个约束条件 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 下, 求行列式 $A = |a_{ij}|$ 的最大值. 由于在此约束条件下的最小值等于最大值乘以 -1, 因此只要将最大值平方就得到 A^2 的最大值.

若至少有某一个 $S_i = 0$, 则行列式的第 i 行的元素全为 0, 此时阿达马不等式的两边都等于 0, 因此其成立是平凡的. 以下设所有的 $S_i > 0\ (i = 1, \cdots, n)$. 这时行列式 A 是 n^2 个变量的连续函数, 而 n 个约束条件给出的是有界闭集, 因此最大值存在.

记 $\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2\ (i = 1, \cdots, n)$, 则这 n 个函数关于 n^2 个自变量 $a_{ij}\ (i, j = 1, \cdots, n)$ 的 n 行 n^2 列的雅可比矩阵 (其中未写出的元素都是 0) 为

$$\begin{pmatrix} 2a_{11}\cdots 2a_{1n} & & & \\ & 2a_{21}\cdots 2a_{2n} & & \\ & & \cdots\cdots & \\ & & & 2a_{n1}\cdots 2a_{nn} \end{pmatrix},$$

它在满足约束条件 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 且 $S_i > 0\ (i = 1, \cdots, n)$ 时是满秩阵.

作拉格朗日函数

$$L = A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 - S_i\Big),$$

则在求偏导后得到方程组

$$\frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i a_{ij} = 0 \ \ (i, j = 1, \cdots, n),$$

其中 A_{ij} 是行列式中元 a_{ij} 的代数余子式. 由此知道使 A^2 达到最大值的行列式 A 的每一行的元素与其代数余子式成比例.

由于行列式的每一行与其他行的代数余子式的乘积之和必定为 0, 因此作为驻点的行列式的各行 (作为向量) 彼此正交. 满足这个条件和约束条件的行列式有无穷多个. 最简单的例子就是对第 i 行取其第 i 个元为 $\sqrt{S_i}$, 而该行的其他元均取 0 $(i = 1, \cdots, n)$.

记行列式 A 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $A = \det \boldsymbol{A}$. 又将 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵记为 $\boldsymbol{A}^T$, 则对于满足驻点条件的行列式就有

$$A^2 = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \prod_{i=1}^{n} S_i.$$

由于最大值点也是极大值点, 而满足驻点条件的行列式的平方都等于上述乘积, 因此这个乘积就是 A^2 的最大值. □

解 2 [24, **第二章问题** 19] 如解 1 所述, 在 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i > 0 \ (i = 1, \cdots, n)$ 的条件下研究 A^2 的最大值.

将行列式 A 按照第 i 行展开得到

$$A = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

其中 A_{ij} $(j = 1, \cdots, n)$ 是元 a_{ij} 的代数余子式.

对上述展开式右边用柯西不等式 (见 §2.7.2 的习题 1293 及其注) 得到

$$\begin{aligned} A^2 &\leqslant (a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2)(A_{i1}^2 + \cdots + A_{in}^2) \\ &= S_i(A_{i1}^2 + \cdots + A_{in}^2). \end{aligned}$$

根据柯西不等式成立等式的充分必要条件可知, 当且仅当

$$\frac{a_{i1}}{A_{i1}} = \cdots = \frac{a_{in}}{A_{in}}$$

时上述不等式成立等号.

由此可见, 若 A^2 达到最大值, 则前述不等式必须成立等号, 否则就可以按照上述比例相等以及其平方和为 S_i 的条件来修改第 i 行, 从而使得 A^2 更大而引出矛盾. 以下同解 1. □

解 3 [29, §75] 若有某个 $S_i = 0$, 则阿达马不等式平凡成立. 对于所有 $S_i > 0$ 的情况, 只需要证明该不等式的一个简化的等价形式: 在 $S_i = 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ 的条件下 A^2 的最大值等于 1. 为此只需要将行列式的第 i 行的元 a_{ij} 换为 a_{ij}/S_i 即可.

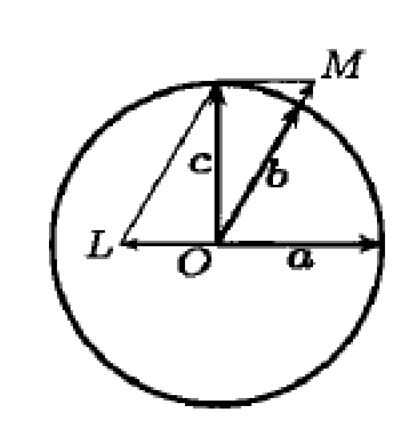
由于单位矩阵的行列式已符合这个条件, 可见达到最大值的 A^2 大于等于 1.

下面我们来证明, 使得 A^2 达到最大值的行列式的各行必定相互正交.

本解法的关键在于一个简单的几何分析.

用反证法. 例如假设使 A^2 达到最大值的行列式 A 中的第一行与第二行不正交. 将它们 (作为单位向量看待) 分别记为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$. 如附图所示, 在 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 张成的平面上, 与 $\boldsymbol{a}$

正交的 (两个单位向量之一) $\boldsymbol{c}$ 必定可以分解为 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 即图中的 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}$. 这时有 $\|\overrightarrow{OM}\|=|\mu|>\|\boldsymbol{b}\|=1$. 对于与图中的 $\boldsymbol{c}$ 相反方向的单位向量也有相同的结论.



习题 3674 的附图

具体来说, 设两个不相关的单位向量 $\|\boldsymbol{a}\|$ 和 $\|\boldsymbol{b}\|$ 不正交, 则标量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=C$ 满足 $0<|C|<1$. 要求确定数 λ 和 μ, 使得向量

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

满足条件 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{a}=0$ 和 $\|\boldsymbol{c}\|^2=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c}=1$. 这时第一个条件即是 $\lambda+\mu C=0$, 第二个条件即是 $\lambda^2+2\lambda\mu C+\mu^2=1$. 由此解得 $\mu^2(1-C^2)=1$, 因此 $|\mu|>1$.

将行列式 A 中的第二行 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{c}$ 替换, 并将所得的行列式记为 A^*, 则有 $A^*=\mu A$, 于是 $(A^*)^2=\mu^2A^2>A^2$, 这与 A^2 达到最大值相矛盾.

对于满足约束条件且其各行彼此正交的行列式 A, 记其对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则就有

$$A^2=\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)=\prod_{i=1}^{n}S_i=1.$$

可见最大值只能是 1. □

解 4 [1, §2.11], [18, **定理** 30] 阿达马不等式在本质上与正定对称阵的一个不等式等价. 现将后者作为引理列出如下①.

引理 设 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})$ 是 n 阶正定对称阵, 则就有 $\det\boldsymbol{D}\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}d_{ii}$.

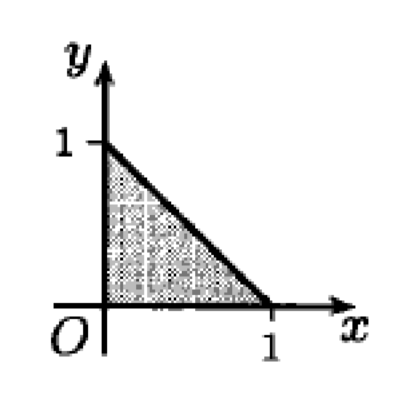
现设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行都是单位向量. 若 $A=\det\boldsymbol{A}=0$, 则不必再讨论. 否则, $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ 就是一个正定对称阵, 且其对角线上的元素都等于 1. 于是利用上述引理就得到所要的阿达马不等式:

$$A^2=\det\boldsymbol{D}\leqslant 1. \quad □$$

习题 3675–3680 是求函数在指定区域内的上确界和下确界. 若确界能够达到, 则就是最大值或最小值.

习题 3675 求函数 $z=x-2y-3$ 的上确界和下确界, 若 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant x+y\leqslant 1$.

解 1 由于函数 $z=z(x,y)$ 是有界闭集 (见附图的阴影区), 上的连续函数, 因此存在最大值和最小值.



习题 3675 的附图

由于 $z(x,y)$ 为线性函数, $z'_x=1$, $z'_y=-2$, 因此它的最值只能在边界上达到. 又由于定义域是附图所示的闭三角形区域, 其边界由三条直线段组成, $z(x,y)$ 在每一条直线段上又是线性函数, 因此最值又在这些直线段的端点处达到.

于是只要计算出闭三角形定义域的三个顶点处的目标函数的值为

$$z(0,0)=-3, \quad z(1,0)=-2, \quad z(0,1)=-5,$$

就可以确定 $z(x,y)$ 的最小值为 -5, 最大值为 -2. □

① 为不打断这里的讨论, 其证明从略. 需要的读者可参考 [1] 的 §2.10 或 [18] 的 §2.13.

解 2 由 $y \geqslant 0$ 和 $x \leqslant 1$ 即可有

$$z = x - 2y - 3 \leqslant 1 - 3 = -2,$$

且于 $x = 1, y = 0$ 时达到 $z_{\max} = -2$.

又由 $y \leqslant 1 - x$ 和 $x \geqslant 0$ 即可有

$$z = x - 2y - 3 \geqslant -2(1-x) - 3 = 2x - 5 \geqslant -5,$$

且于 $x = 0, y = 1$ 时达到 $z_{\min} = -5$. □

习题 3676 求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 的上确界和下确界, 若 $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

解 1 根据连续函数在有界闭集上达到最值, 本题存在最大值和最小值.

从 $z'_x = 2x - 12 = 0$ 和 $z'_y = 2y + 16 = 0$ 求出驻点为 $(6, -8)$, 它不在指定的定义域内, 因此最值只能在定义域的边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上达到. 于是问题归结为一个条件最值问题.

在 $x^2 + y^2 = 25$ 上 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ 的梯度不会是零向量. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = 25 - 12x + 16y - \lambda(x^2 + y^2 - 25),$$

求偏导得到方程组

$$L'_x = -12 - 2\lambda x = 0, \quad L'_y = 16 - 2\lambda y = 0.$$

由此解出 $x = -\dfrac{6}{\lambda}$ 和 $y = \dfrac{8}{\lambda}$, 代入约束条件 $x^2 + y^2 = 25$ 中, 得到 $\lambda = \pm 2$, 并得到驻点 $(-3, 4)$ 和 $(3, -4)$. 由于已知存在最大值和最小值, 因此这两个驻点分别为最大值点和最小值点. 计算得到 $z(-3, 4) = 125$ 和 $z(3, -4) = -75$, 它们分别是所要求的最大值和最小值. □

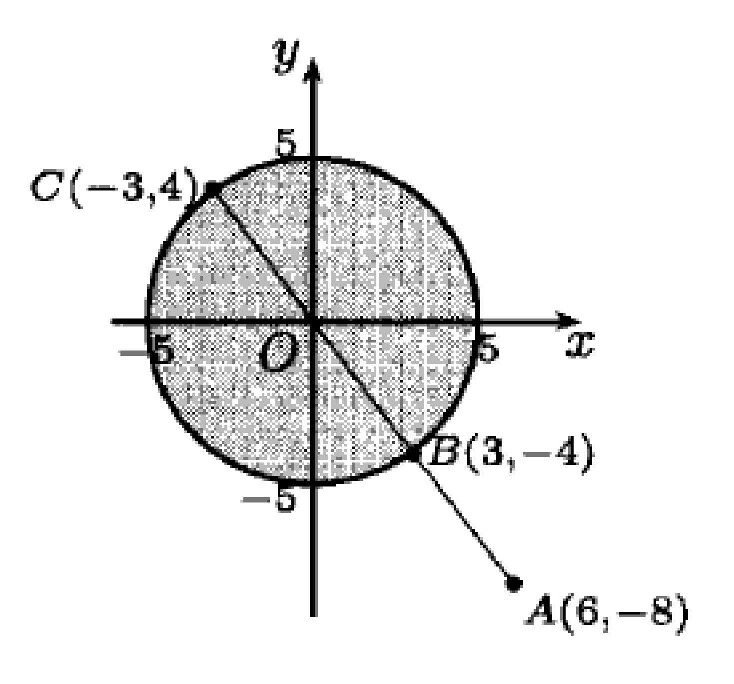
解 2 将 z 的表达式改写为

$$z = (x-6)^2 + (y+8)^2 - 100,$$

即可以从几何角度将问题转化为在圆 $x^2 + y^2 \leqslant 25$ 内求到达点 $A(6, -8)$ 的距离最大和最小的点 (见附图).

从平面几何知识可见, 由于点 A 在圆外, 只要作出连接点 A 和原点 O 的直线, 并将它延长与圆周相交, 就得到所要求的两个点 $B(-3, 4)$ 和点 $C(3, -4)$. 由于 $\overline{AB}$ 长为 5, $\overline{AC}$ 长为 15, 因此就得到

$$z_{\max} = 15^2 - 100 = 125, \quad z_{\min} = 5^2 - 100 = -75. \quad \square$$



习题 3676 的附图

习题 3679 求函数 $u = x + y + z$ 的上确界和下确界, 若 $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

解 1 函数 $u(x, y, z)$ 的定义域为有界闭集, 由于它是线性函数, $u'_x = u'_y = u'_z = 1$, 因此最值在定义域的边界集上达到.

这个定义域的边界集由两部分组成, 即平面 $z = 1$ 上满足 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 的点集, 记为 S_1, 以及满足 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 的旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上的点集, 记为 S_2. 下面分别求 u 在 S_1 和 S_2 上的最值.

在 S_1 上 $u=x+y+1$, 因此最值只能在 S_1 的边界上达到. 这时 $z\equiv 1$, $x^2+y^2\leqslant 1$, 因此如 §6.7.2 的习题 3655 所示, 即可得到

$$\max_{S_1} u=\sqrt{2}+1,\quad \min_{S_1} u=-\sqrt{2}+1.$$

在 S_2 上 $u=x+y+x^2+y^2$, 定义域为 $x^2+y^2\leqslant 1$. 从 $u'_x=1+2x=0$ 和 $u'_y=1+2y=0$ 得到驻点 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. 计算得到 $u\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

然后再研究于 $x^2+y^2=1$ 上函数 $u=x+y+1$ 的最值. 这与前面对于 S_1 上的情况相同, 不必再计算. 将这时得到的最值与上述驻点处的 u 值合并, 即可得到

$$\max_{S_2} u=\sqrt{2}+1,\quad \min_{S_2} u=-\frac{1}{2}.$$

最后合并关于 S_1 和 S_2 的结果, 可见函数 u 的最大值为 $\sqrt{2}+1$, 最小值为 $-\dfrac{1}{2}$. □

解 2 由条件 $z\geqslant x^2+y^2$ 即可有

$$u=x+y+z\geqslant x+y+x^2+y^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\geqslant-\frac{1}{2},$$

且可见在 $x=y=-\dfrac{1}{2}$ 和 $z=\dfrac{1}{2}$ 时函数 u 的值达到 $u_{\min}=-\dfrac{1}{2}$.

对于 $u=x+y+z$ 的前两项用柯西不等式即可有

$$u=x+y+z\leqslant\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}+z\leqslant\sqrt{2z}+z\leqslant\sqrt{2}+1,$$

且可见在 $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z=1$ 时函数 u 的值达到 $u_{\max}=\sqrt{2}+1$. □

习题 3680 求函数

$$u=(x+y+z)\mathrm{e}^{-(x+2y+3z)}$$

在区域 $x>0,y>0,z>0$ 内的上确界和下确界.

解 首先看函数 u 是否可能有最值. 由于定义域中的点都是内点, 因此若有最值点, 则它就是极值点. 根据费马定理, 极值点的坐标应当满足下列方程组:

$$u'_x=[1-(x+y+z)]\mathrm{e}^{-(x+2y+3z)}=0,$$
$$u'_y=[1-2(x+y+z)]\mathrm{e}^{-(x+2y+3z)}=0,$$
$$u'_z=[1-3(x+y+z)]\mathrm{e}^{-(x+2y+3z)}=0.$$

由于这个方程组显然无解, 因此函数 u 在给定的区域内没有任何驻点, 当然也就没有任何极值点和最值点. 因此本题只可能有上确界和下确界, 而没有最大值和最小值.

由于函数 u 只取正值, 而点 (x,y,z) 在所给定的区域内可任意接近原点, 从而使得 $u(x,y,z)>0$ 任意小, 因此 $\inf u=0$.

再讨论上确界. 它是否是有限数取决于函数 u 在给定的区域上是否有界. 从 $x>0,y>0,z>0$ 可见有

$$0<u(x,y,z)=(x+y+z)\mathrm{e}^{-(x+y+z)}\cdot\mathrm{e}^{-y-2z}\leqslant\max_{t>0}\{t\mathrm{e}^{-t}\},\tag{6.10}$$

而右边的最大值只要从 $(t\mathrm{e}^{-t})'_t=(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ 即可求得最大值点为 $t=1$, 最大值为 e^{-1}, 因此就可以知道函数 u 存在有限的上确界, 且满足

$$\sup u\leqslant\mathrm{e}^{-1}.$$

从 (6.10) 中 u 的表达式和 $\max\limits_{t>0}(te^{-t}) = (te^{-t})|_{t=1}$ 又可看出, 若取 $x = 1$, y, z 为任意小的正数, 则 u 的值就可任意接近 e^{-1}, 因此得到 $\sup u = e^{-1} \approx 0.368$. □

习题 3683 分解给定正数 a 为 n 个正数之积, 使它们的倒数之和最小.

解 这就是在条件 $a = x_1 \cdots x_n$ 和 $x_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ 之下求函数 $u = \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$ 的最小值. 用平均值不等式即可得到

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a}},$$

这样就已经知道所讨论的倒数之和的下界为 $\dfrac{n}{\sqrt[n]{a}}$. 又从平均值不等式成立等号的充要条件知道, 当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n = \sqrt[n]{a}$ 时上述下界可以达到, 因此就得到最小值. □

习题 3684 分解给定正数 a 为 n 个正数之和, 使它们的平方和最小.

解 这就是在条件 $x_1 + \cdots + x_n = a > 0$ 下求 $u = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 的最小值. 对于这个条件最值问题可用柯西不等式 (见 §2.7.2 的习题 1293 及其注) 解决. 写出不等式

$$\begin{aligned} 0 < a^2 &= (x_1 + \cdots + x_n)^2 = (1 \cdot x_1 + \cdots + 1 \cdot x_n)^2 \\ &\leqslant (1^2 + \cdots + 1^2)(x_1^2 + \cdots x_n^2) = n(x_1^2 + \cdots x_n^2), \end{aligned}$$

这样就已经得到不等式

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant \frac{a^2}{n}.$$

又从柯西不等式成立等号的充要条件知道, 当且仅当 $\dfrac{x_1}{1} = \cdots = \dfrac{x_n}{1} = \dfrac{a}{n}$ 时上述不等式成立等号, 因此就得到

$$\min(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \frac{a^2}{n}. \quad \square$$

注 上两个习题中的条件最值问题可以用简单的初等不等式解出, 这比用拉格朗日乘子法要方便得多. 下一题也是如此, 虽然驻点的计算不难, 但如何用微分学方法严格证明它就是最小值点却未必容易. 因此我们还是用现成的不等式来解它.

习题 3685 分解给定正数 a 为 n 个正数之积, 使它们的给定正数次幂之和最小.

解 [5] 这就是在条件 $a = x_1 \cdots x_n$ 和 $x_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ 之下求函数 $u = x_1^{\alpha_1} + \cdots + x_n^{\alpha_n}$ 的最小值, 其中 α_i $(i = 1, \cdots, n)$ 为给定的正幂指数.

为应用广义的算术平均值–几何平均值不等式 (简称为广义平均值不等式, 见第一册的命题 2.7), 作代换

$$x_i^{\alpha_i} = \frac{t_i}{\alpha_i} \ \ (i = 1, \cdots, n),$$

则问题转化为在 $t_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ 和条件

$$\prod_{i=1}^{n} t_i^{\frac{1}{\alpha_i}} = a \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}$$

之下求函数 $u=\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{\alpha_i}$ 的最小值. 令 $\lambda_i=\frac{1}{\alpha_i\left(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)}$ $(i=1,\cdots,n)$, 则从广义平均值不等式有

$$t_1^{\lambda_1}\cdots t_n^{\lambda_n}\leqslant \lambda_1 t_1+\cdots+\lambda_n t_n,$$

且当 $t_1=\cdots=t_n$ 时成立等号, 于是就可得到

$$\begin{aligned}u=\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{\alpha_i}&\geqslant\left(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}t_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\alpha_1^{-1}+\cdots+\alpha_n^{-1}}}\\&=\left(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\alpha_1^{-1}+\cdots+\alpha_n^{-1}}}.\end{aligned}$$

由于上式右边是一个常数, 且可以达到, 因此就是所要求的最小值. □

6.7.4 应用题 (习题 3686–3710)

与前面的处理方法类似, 在本小节的最值问题中不一定用拉格朗日乘子法求解, 而是根据计算方便来选取适当的方法.

习题 3687 容积为 V 的无盖长方浴缸在何种尺寸下有最小的表面积?

解 1 设浴缸的长、宽、高分别为 x,y,z, 则容积为 $xyz=V$, 表面积为 $S=xy+2yz+2zx$. 问题是在 V 给定的条件下求 S 的最小值, 当然还应满足 $x>0,y>0,z>0$ 的自然限制. 这时梯度 $\operatorname{grad}V$ 不是零向量是明显的. 作拉格朗日函数

$$L=xy+2yz+2zx-\lambda(xyz-V),$$

求偏导得到方程组

$$L'_x=y+2z-\lambda yz=0,\quad L'_y=x+2z-\lambda xz=0,\quad L'_z=2y+2x-\lambda xy=0.$$

由此得到

$$\lambda=\frac{1}{z}+\frac{2}{y}=\frac{1}{z}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y},$$

于是可确定 $x=y=2z$. 代入约束条件 $xyz=V$ 中解出驻点为 $x_0=y_0=\sqrt[3]{2V}$, $z_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$, 并求出在驻点处的目标函数值为 $S_0=S(x_0,y_0,z_0)=3\sqrt[3]{4V^2}$.

为证明这个唯一的驻点就是最小值点, 只需要证明最小值的存在性.

约束条件 $xyz=V$ 以及 $x>0,y>0,z>0$ 确定了第一卦限中的一个无界闭集. 现在考虑该集合中满足 $0\leqslant x\leqslant R$, $0\leqslant y\leqslant R$ 和 $0\leqslant z\leqslant R$ 的部分, 它是一个有界闭集, 记为 Ω. 因此目标函数 $S(x,y,z)$ 在其上存在最小值. 取 R 充分大就可以使得上述驻点 $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$.

下面只要证明, 当 R 充分大时, $S(x,y,z)$ 在满足 $xyz=V$ 且在上述有界闭集 Ω 之外的部分上的值处处大于 $S(x_0,y_0,z_0)$ 即可. 这时在变量 x,y,z 中至少有一个大于 R, 不妨设为 $x>R$, 然后用平均值不等式有

$$S(x,y,z) > xy+yz+zx > x(y+z)$$
$$\geqslant x\cdot 2\sqrt{yz} = 2x\cdot\sqrt{\frac{V}{x}} > 2\sqrt{VR},$$

可见目标函数 S 在 Ω 之外的取值可以大于任意指定的正数. 这样就证明了本题的最小值存在. 由于本题的约束条件规定的点集没有边界, 因此最小值也是极小值, 从而 S 在唯一的驻点处的值就是最小值. □

解 2 用平均值不等式就有

$$S(x,y,z) = xy+2yz+2zx = 2V\Big(\frac{1}{2z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big)$$
$$\geqslant 2V\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{2xyz}} = \frac{6V}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{V}} = 3\sqrt[3]{4V^2},$$

且知道当 $x=y=2z$ 时上述不等式成立等号, 因此右边的常数就是最小值. □

习题 3688 横截面为半圆形的无盖柱形浴盆, 其表面积等于 S, 在何种尺寸下此盆有最大的容积?

解 设圆柱半径为 R, 长为 H, 则对于浴盆的表面积的约束条件为 $S=\pi(R^2+RH)$, 容积为 $V=\dfrac{1}{2}\pi R^2H$. 将约束条件改写为

$$S=\pi\Big(R^2+\frac{1}{2}RH+\frac{1}{2}RH\Big),$$

就可以用平均值不等式得到

$$V^2=\frac{1}{4}\pi^2R^4H^2=\pi^2\cdot R^2\cdot\frac{1}{2}RH\cdot\frac{1}{2}RH\leqslant\pi^2\Big(\frac{S}{3\pi}\Big)^2=\frac{S^3}{27\pi},$$

且于 $H=2R$ 时成立等号. 因此浴盆在取尺寸 $H=2R=2\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ 时达到最大容积

$$V_{\max}=\sqrt{\frac{S^3}{27\pi}}.\quad □$$

习题 3689 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点, 这点到 n 个给定点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的距离的平方和最小.

解 1 从连续函数在有界闭集上达到最值可知本题的最小值存在 (且还存在最大值). 这时的目标函数为 $u=\sum_{i=1}^n[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$. 利用约束条件并舍去常数项, 就可将问题改为使得 $v=-2\sum_{i=1}^n(xx_i+yy_i+zz_i)$ 达到最小. 作出拉格朗日函数

$$L=-2\sum_{i=1}^n(xx_i+yy_i+zz_i)+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

求偏导得到方程组

$$L'_x=-2\sum_{i=1}^n x_i+2\lambda x=0,\quad L'_y=-2\sum_{i=1}^n y_i+2\lambda y=0,\quad L'_z=-2\sum_{i=1}^n z_i+2\lambda z=0.$$

这里有一个特殊情况要讨论, 这就是 $\lambda=0$ 的可能性. 从上述方程组可见, 这只能发生在 $\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n y_i=\sum_{i=1}^n z_i=0$ 时. 容易看出, 这时原来的目标函数

$u = n + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ 为常值函数. 这表明球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的每一个点到这样的 n 点的距离平方和为常数, 最大值和最小值相等, 不必再讨论.

对于其他情况则可以解出 $x = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}, y = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\lambda}, z = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i}{\lambda}$. 将它们代人约束条件, 并记

$$N = \left[\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} z_i\Big)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

就可解出乘子为

$$\lambda_1 = N, \quad \lambda_2 = -N.$$

由此对应的两个驻点即分别为最小值点和最大值点.

为了知道在两个乘子中哪一个对应于最小值, 可以将 $L'_x = 0$, $L'_y = 0$ 和 $L'_z = 0$ 分别乘以 x, y 和 z 并相加, 然后就得到原来的目标函数的值为

$$u = n - 2\lambda_{1,2} + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

可见在两个乘子中, 大于 0 的 $\lambda_1 = N$ 对应于最小值, 因此所求的最小值点 (x_0, y_0, z_0) 的坐标表达式为

$$x_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{N}, y_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{N}, z_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i}{N}. \quad \square$$

解 2 (概要) 从目标函数 v 出发, 利用柯西不等式以及它成立等号的充分必要条件就可以得到与解 1 相同的结果. □

习题 3690 底面相同的直圆柱体与直圆锥体拼接在一起构成一个物体, 其总表面积 Q 取给定值. 为了使此物体的体积最大, 求相应尺寸大小.

解 如附图所示, 图中所示的阴影区由一个矩形及其上的等腰三角形拼接而成, 将此区域围绕中间的竖直线旋转, 就可得到题中所说的物体.

物体的尺寸由直圆柱体的半径 R、高 H 和圆锥体的母线与底面的夹角 θ 所确定. 由此即可写出全表面积给定的约束条件是

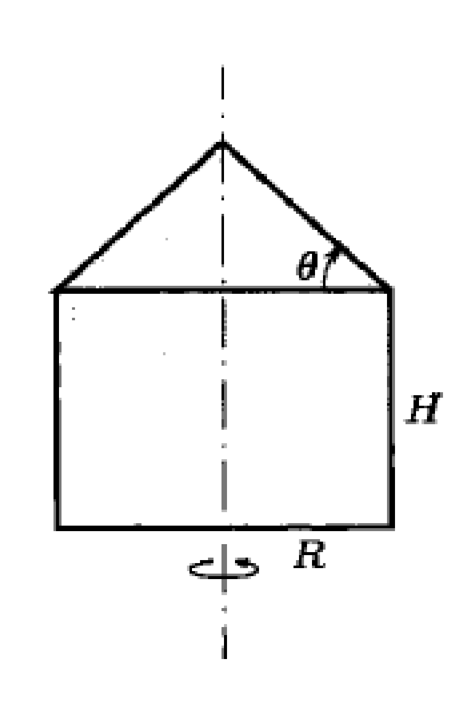
$$2\pi RH + \pi R^2 + \pi R^2 \sec\theta = Q,$$

而目标函数 (即体积) 的表达式为

$$V = \pi R^2 H + \frac{\pi}{3} R^3 \tan\theta.$$

此外, 三个变量 R, H, θ 还应满足由问题引入的自然限制条件.

$$R \geqslant 0, \quad H \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}.$$



习题 3690 的附图 1

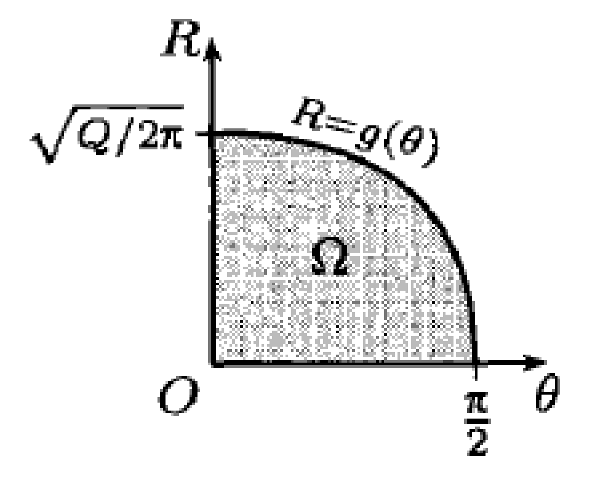
注意: 从具体问题来说, 考虑圆柱体的半径 $R = 0$ 是荒谬的. 然而将 $R = 0$ 加入后可使得定义域为闭集, 这对于数学上应用有界闭集的有关定理是必要的. 同样, 在下面

的区域 Ω 中包含了 $\theta=\pi/2$ 的情况, 这时恰好 $R=0$, 因此将它包括在 Ω 内也是适宜的.

本题是有一个等式约束条件和三个不等式约束条件的最值问题. 若用拉格朗日乘子法计算其驻点, 则计算并无困难, 问题在于如何严格判定它就是最大值点. 因此我们在下面采取消去变量 H 的方法.

从约束条件解出 H, 并利用 $H\geqslant 0$ 的限制, 就可得到变量 R 和 θ 所满足的条件为

$$0\leqslant R\leqslant g(\theta)=\sqrt{\frac{Q\cos\theta}{\pi(1+\cos\theta)}},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$



习题 3690 的附图 2

在附图 2 中的阴影区是满足上述条件的点 (θ,R) 全体所成的点集. 它是一个有界闭区域, 记为 Ω. 相应地在前述的体积表达式中消去 H, 就得到

$$V=\frac{1}{2}QR-\frac{1}{6}\pi R^3f(\theta),$$

其中 $f(\theta)=3+3\sec\theta-2\tan\theta$.

这样就将条件最值问题归结为一个无条件最值问题. 根据连续函数在有界闭集上达到最值可知体积 V 有最大值. 其最小值显然在区域 Ω 的边界 $R=0$ 上达到为 0.

先计算在附图所示的区域 Ω 内的驻点. 将 V 求偏导得到方程组

$$V'_\theta=-\frac{1}{6}\pi R^3f'(\theta)=-\frac{1}{2}\pi R^3\sec^2\theta\Big(\sin\theta-\frac{2}{3}\Big)=0,$$
$$V'_R=\frac{1}{2}Q-\frac{1}{2}\pi R^2f(\theta)=0.$$

由此解得驻点的坐标为

$$\theta_0=\arcsin\frac{2}{3},\quad R_0=\sqrt{\frac{Q}{\pi(3+\sqrt{5})}}.$$

从 $0<R_0<g(\theta)$ 可见该驻点为区域 Ω 的内点, 并可以计算得到在该点的体积为

$$V_0=V(\theta_0,R_0)=\frac{Q\sqrt{Q}}{3\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}.$$

由于只有上述一个驻点, 为了证明这就是所求的最大值点, 利用最大值的存在性, 只需要证明 V_0 大于体积 V 在 Ω 的边界上的取值即可.

对 Ω 的三段边界需分别讨论.

(1) 如前所述, 在 $R=0$ 处体积显然为 0.

(2) 在边界 $R=g(\theta)$ 上, 原问题中的圆柱体的高 $H=0$, 因此即是在圆锥体的全表面积等于 Q 的条件下求其体积的最大值. 这就是在约束条件 $\pi R^2(1+\sec^2\theta)=Q$ 下求 $V=\dfrac{\pi}{3}R^3\tan\theta$ 的最大值. 利用平均值不等式, 这个条件最值问题可求解如下. 利用

$$Q=\pi R^2+\pi R^2+\pi R^2\tan^2\theta$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{\pi^3R^6\tan^2\theta},$$

并当左边三项相等 (即 $\theta=45°$) 时上述不等式成立等号, 从而可求出体积的最大值为

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{Q}{3\pi}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{Q\sqrt{Q}}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

它显然小于前述的 V_0.

(3) 最后考虑边界 $\theta = 0$, 即原问题中只考虑圆柱体的全面积为 Q 的条件下求其体积的最大值. 这就是要在区间 $I = [0, \sqrt{\frac{Q}{2\pi}}]$ 上求 $V = \frac{1}{2}RQ - \pi R^3$ 的最大值. 将这个表达式对 R 求导得到在区间 I 内的唯一驻点为 $R_2 = \sqrt{\frac{Q}{6\pi}}$, 且有

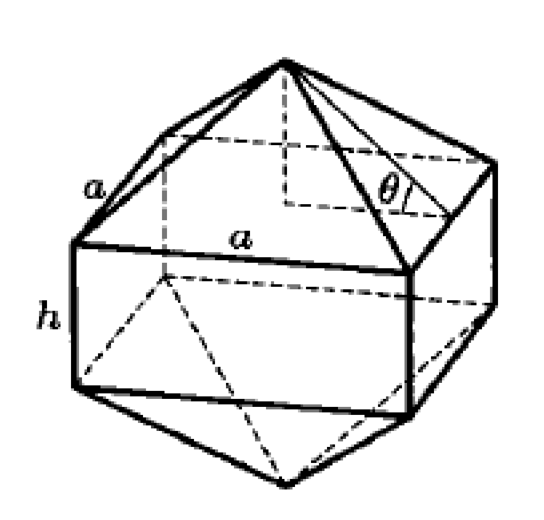
$$V_2 = V(R_2) = \frac{Q\sqrt{Q}}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

由于 V 在区间 I 的两端都等于 0 (在右端点处即是 $H = 0$), 可见 V_2 即是在这个区间上的最大值. 从表达式可见它显然小于 V_0.

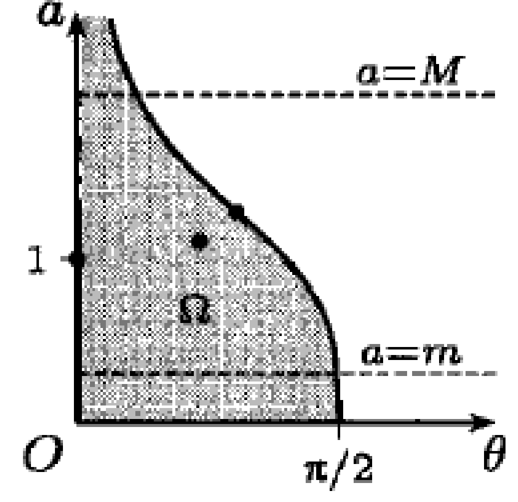
综合以上可见本题所求的条件最大值的答案为 V_0. □

注　由于表面积给定的几何体中, 球的体积最大, 可见 $V_0 > V_2 > V_1$ 确实具有“合理性”, 因为在几何上可以想象, 圆柱体上加一个圆锥体有可能比圆柱体更接近于球形, 而圆锥体则在三种几何体中与球形差别最大.

习题 3691　一长方体的上下两底均为正方形, 分别与具有同样的正方形底面的两个相同的正四角锥体拼接在一起构成一个物体, 其体积 V 取给定值. 当四角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角时, 该物体的总表面积最小?



习题 3691 的附图 1



习题 3691 的附图 2

解　由于本题的解法与习题 3690 甚为相似, 以下只写出主要步骤和结果.

如附图 1 所示, 长方体的上下底为边长 a 的正方形, 高为 h, 正四角锥的侧面与底面的倾角为 θ.

这时的约束条件为

$$V = a^2h + \frac{1}{3}a^3\tan\theta,$$

目标函数为

$$S = 4ah + 2a^2\sec\theta.$$

由于问题的自然限制, 除了上述体积为 V 的等式约束之外, 还要满足不等式 $a > 0$, $h \geqslant 0$ 和 $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. 从等式约束解出 h, 就得到只含两个自变量 a 和 θ 的无条件最值问题. 这时的目标函数为

$$S = \frac{4V}{a} + 2a^2\sec\theta\left(1 - \frac{2}{3}\sin\theta\right),$$

其定义域为附图 2 中的阴影区 (作图时取 $V = 1$), 即

$$\Omega = \{(\theta, a) \mid 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < a \leqslant (3V\cot\theta)^{\frac{1}{3}}\},$$

其中的曲线边界即对应于高 $h=0$.

与习题 3690 不同的是区域 Ω 无界, 且不含 $a=0$ 这一段边界. 为了证明 S 在此区域上有最小值, 先在区域 Ω 中任取一点 P_0, 计算出 $S(P_0)$, 然后从 S 的表达式看出有 $S>\dfrac{2}{3}a^2$ 和 $S>\dfrac{4V}{a}$, 因此即可找到 $0<m<M$, 使得当 $0<a<m$ 或者 $a>M$ 时必定有 $S>S(P_0)$. 于是如附图 2 所示, 函数 S 在水平直线 $a=m$ 和 $a=M$ 所夹的区域 Ω 的有界闭子集上必定达到最小值.

以下只要求 S 的驻点和它在边界上的最小值.

从 $S'_a=0$ 和 $S'_\theta=0$ 即可解得唯一驻点为

$$\theta_0=\arcsin\frac{2}{3},\quad a_0=\sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{5}}}V^{\frac{1}{3}},$$

这时的高和全表面积为

$$h_0=\frac{1}{\sqrt{5}}a_0,\quad S_0=2\sqrt[6]{405}V^{\frac{2}{3}}\approx 5.440V^{\frac{2}{3}}.$$

可以证明 S_0 即是 S 在 Ω 上的最小值, 而 θ_0 就是题中所要求的倾角. 为此只要分别计算 S 在边界 $\theta=0$ 和曲线边界 (即 $h=0$) 上的最小值.

对于 $\theta=0$, 原问题变为在长方体体积 $V=a^2h$ 给定时使其表面积 $S=4ah+2a^2$ 最小. 用平均值不等式即可解得 $a=h=V^{\frac{1}{3}}$, 即正方体, 也就是正六面体, 其表面积为

$$S_1=6V^{\frac{2}{3}}.$$

对于 $h=0$, 即两个正四角锥拼成的物体, 这时有 $S=2\sqrt{a^4+\dfrac{9V^2}{a^2}}$, 用平均值不等式即可求出其全表面积的最小值为

$$S_2=\sqrt[6]{2^4 3^7}V^{\frac{2}{3}}\approx 5.719V^{\frac{2}{3}}.$$

比较 S_0, S_1 和 S_2 可见 S_0 为最小值. 附图 1 即是按照 $S=S_0$ 时的尺寸作出的示意图, 而在附图 2 中取 $V=1$ 作出了实现这三个不同的总表面积值的点 (θ,a). □

注　与习题 3690 类似, 与球形接近的物体在体积相同情况下具有较小的表面积. 可以证明, 上述解中的 S_2 就是体积为 V 的正八面体的表面积. 从 $S_0<S_1<S_2$ 可以想到, 体积为 V 的球的面积会更小. 实际上, 可计算出这个球面积为

$$S_3=\sqrt[3]{36\pi}V^{\frac{2}{3}}\approx 4.836V^{\frac{2}{3}}<S_0.$$

习题 3693 将周长为 $2p$ 的三角形绕其一边旋转, 三角形所扫过的区域构成一旋转体, 求使该旋转体体积最大的那个三角形.

解 1　设三角形边长为 a,b,c, 绕边 a 旋转. 又设边 a 上的高为 h, 则三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}ah=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

由此可写出作为目标函数的旋转体体积的表达式为

$$V=\frac{\pi}{3}ah^2=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a}.$$

在约束条件 $a+b+c=2p$ 下, 由 $(p-b)+(p-c)=a$ 出发可用平均值不等式得到

$$(p-b)(p-c)\leqslant\frac{a^2}{4},$$

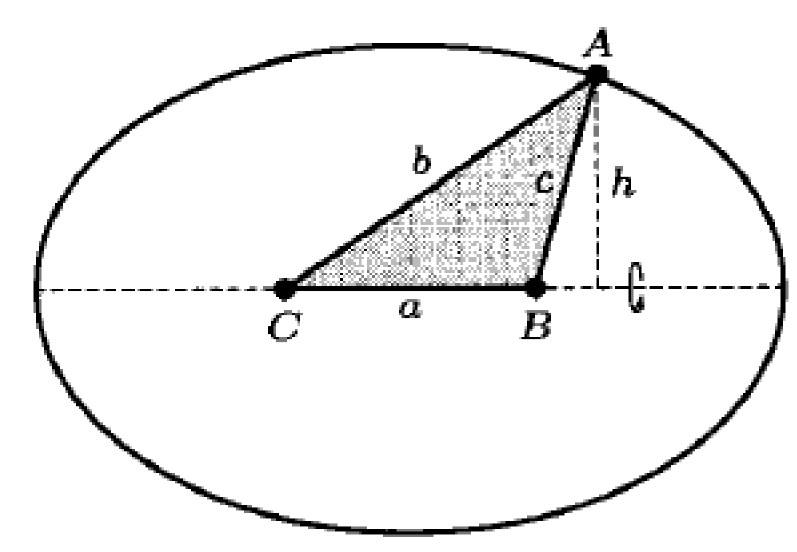
且当 $b=c=p-\frac{a}{2}$ 时成立等号. 然后如下接连用平均值不等式得到

$$\begin{aligned}V&=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a}\leqslant\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{p(p-a)}{a}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{\pi p}{3}\cdot a(p-a)\\&\leqslant\frac{\pi p}{3}\cdot\frac{1}{4}p^2=\frac{\pi}{12}p^3,\end{aligned}$$

且知道当 $a=\frac{p}{2}$, $b=c=p-\frac{a}{2}=\frac{3}{4}p$ 时上述两个不等号 $\leqslant$ 都成为等号, 从而体积达到右边的常数给出的最大值. □

解 2 如附图所示, 以阴影区表示的三角形三边长 a,b,c, 绕边 a 旋转, 则所成的旋转体体积为 $V=\frac{\pi}{3}ah^2$.

当 a 固定时, $b+c=2p-a$ 为定值, 因此顶点 A 的轨迹是以顶点 B 和 C 为焦点的椭圆曲线. 显然当 $b=c=p-\frac{a}{2}$ 时 h 达到最大值. 因此对每个 $a\in(0,p)$, 有不等式



习题 3693 的附图

$$V\leqslant\frac{\pi}{3}a\left[\left(p-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]=\frac{\pi p}{3}a(p-a),$$

以下与解 1 相同, 从略. □

习题 3694–3698 都是讨论嵌入到某个几何体内的长方体的最值问题, 由于其目标函数和约束条件比较简单, 都可以用平均值不等式等初等方法求解. 下面只对其中以表面积为目标函数的一题作介绍.

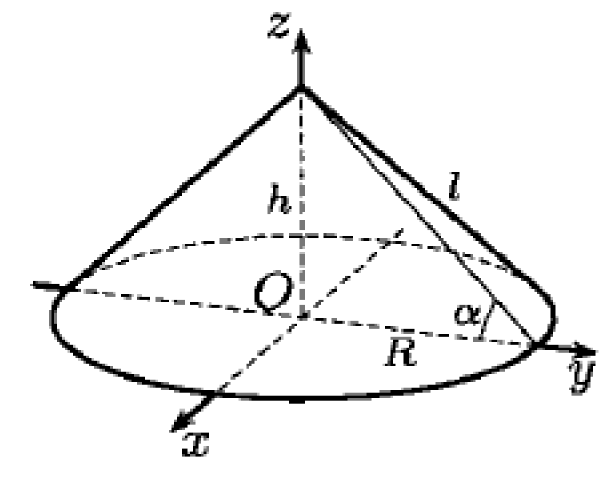
习题 3697 直圆锥的母线 l 与底面成倾角 α, 试在此直圆锥中作出具有最大全表面积的内接长方体.

解 如附图所示, 设直圆锥的中心轴为 Oz 轴, 底圆的中心为原点 O, 则可将圆锥的高和底圆半径表示为

$$h=l\sin\alpha,\quad R=l\cos\alpha.$$

设内接长方体 (图中未画出) 的各边与坐标轴平行, 在第一卦限的圆锥表面处的长方体顶点的坐标为 (x,y,z), 则约束条件为

$$\frac{x^2+y^2}{R^2}=\left(1-\frac{z}{h}\right)^2\ (0\leqslant z\leqslant h).$$



习题 3697 的附图

目标函数为长方体的全表面积

$$S=8xy+4(x+y)z.$$

对上式的第一项中的 xy 用平均值不等式, 对第二项中的 $(x+y)$ 用柯西不等式, 就有

$$S\leqslant4(x^2+y^2)+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}z,$$

还知道当且仅当 $x=y$ 时成立等号.

从约束条件得到 $\sqrt{x^2+y^2}=R\Big(1-\dfrac{z}{h}\Big)$, 将它代人上述不等式中, 就将问题转化为区间 $0\leqslant z\leqslant h$ 上求一元二次函数

$$S(z)=4R^2\Big(1-\frac{z}{h}\Big)\Big[1-\Big(\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{2}}{R}\Big)z\Big]$$

的最大值问题.

上式右边是 z 的二次函数. 通过计算可知当 $\dfrac{h}{R}=\tan\alpha\leqslant\sqrt{2}$ 时, $S(z)$ 在区间 $[0,h]$ 上严格单调递减, 因此表面积于 $z=0$ 达到最大值 $S(0)=4R^2$.

当 $\tan\alpha>\sqrt{2}$ 时, 可计算出使得 $S(z)$ 达到最大值的高度 z 应取为

$$z_0=\frac{h-\sqrt{2}R}{2h-\sqrt{2}R}\cdot h=\frac{\tan\alpha-\sqrt{2}}{2\tan\alpha-\sqrt{2}}\cdot l\sin\alpha.$$

此时长方体的上下底为正方形, 其边长为

$$2x_0=2y_0=\frac{hR}{\sqrt{2}h-R}=\frac{\sqrt{2}z_0}{\tan\alpha-\sqrt{2}},$$

而所达到的全表面积最大值为

$$S(z_0)=\frac{2h^2R}{\sqrt{2}h-R}=\frac{2l^2\sin^2\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha-1}.\quad\square$$

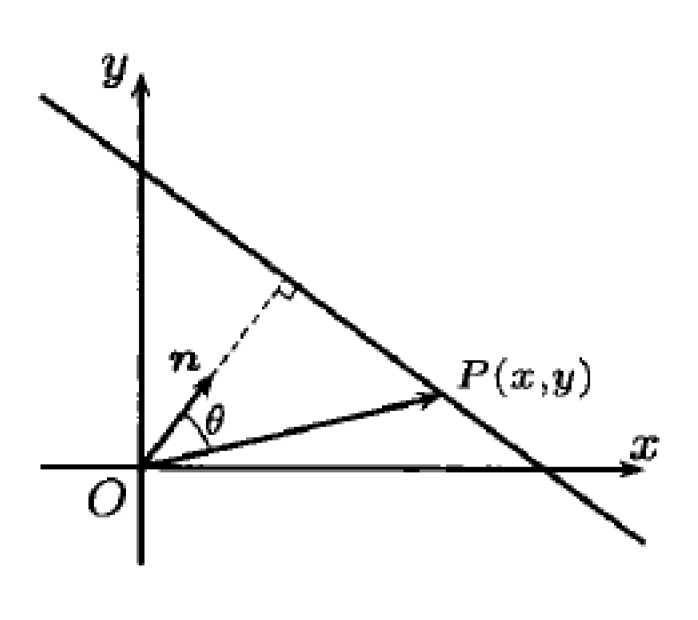
注 在本题的答案中, 当倾角 $\alpha\leqslant\arctan\sqrt{2}\approx 54.7^\circ$ 时, 具有最大全表面积的内接长方体是高度 $z=0$ 的退化长方体. 这个结论类似于 §2.13 的习题 1566, 其中内接于三角形的矩形中具有最大周长的是宽度为 0 的退化矩形.

习题 3699 求点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 至平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上的点的最短距离.

分析 从条件极值角度看, 这就是在约束条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 下求距离平方[①] $d^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 的最小值. 可以直接证明这个最小值存在, 且有唯一的最小值点. 为此只要利用 A,B,C 不全为 0, 例如设 $C\neq 0$, 则可从约束条件解出 z, 代人 u 中, 从而将问题归结为一个二元二次多项式的无条件最小值问题. 利用这时的黑塞矩阵正定, 即可肯定最小值存在, 且最小值点唯一 (参见 §6.7.1 的习题 3624 的注). 在这之后可以用拉格朗日乘子法, 也可以用以下的向量方法求解. $\square$

下面仿照平面上点与直线之间距离的向量计算方法给出本题的一个解法.

解 附图中给出了用向量的标量积计算坐标面 xOy 上的原点到一直线的距离的方法.



习题 3699 的附图

设 $\boldsymbol{n}$ 是与该直线垂直的单位向量, 若直线的方程为 $Ax+By+C=0$, 则

$$\boldsymbol{n}=\pm\Big(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\boldsymbol{i}+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\boldsymbol{j}\Big),$$

从原点到直线上点 $P(x,y)$ 的径向量为 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, 两个向量间的夹角为 θ, 于是原点到直线的最短距离就是

① 在选择目标函数时, 用距离平方 d^2 要比距离 $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ 方便得多.

$$d = |\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{OP}| = \frac{|Ax + By|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

仿照以上方法, 在三维空间中取 $\boldsymbol{n}$ 为平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的单位法向量, 将点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面上点 $P = (x, y, z)$ 的径向量记为 $\overrightarrow{M_0P}$, 则有

$$\boldsymbol{n} = \pm\Big(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\Big),$$

$$\overrightarrow{M_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

于是就可计算出点 M_0 到平面的最短距离为

$$d = |\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0P}| = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad \square$$

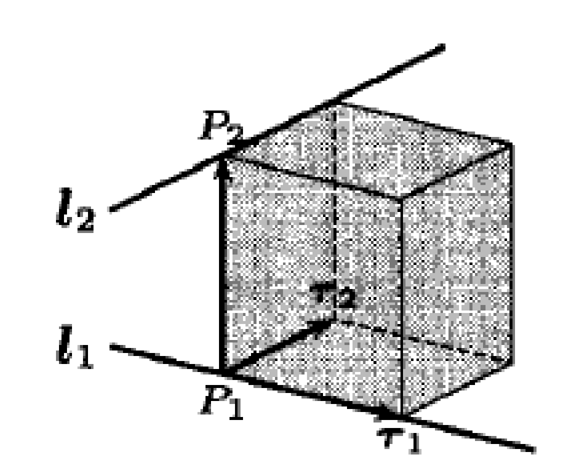
习题 3700 求空间二直线

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

之间的最短距离.

分析 显然只需考虑两条给定的直线为异面直线的情况.

在两条直线上各取一点, 以它们之间的距离 (平方) 为目标函数, 则用分析方法即可证明存在唯一的最小值点, 其最小值即定义为异面直线之间的距离. 由于用拉格朗日乘子法涉及的计算较为繁复, 下面采用空间向量的向量积和混合积来求出上述最短距离. $\square$



习题 3700 的附图

解 1 如附图所示, 设两条异面直线 $\boldsymbol{l}_1$ 和 $\boldsymbol{l}_2$ 的最短距离为直线段 P_1P_2 的长度, 其中点 $P_1 \in \boldsymbol{l}_1$, $P_2 \in \boldsymbol{l}_2$.

引入向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$、直线 $\boldsymbol{l}_1$ 的方向向量 $\boldsymbol{\tau}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和直线 $\boldsymbol{l}_2$ 的方向向量 $\boldsymbol{\tau}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, 则它们的混合积的绝对值就是图中用阴影区表示的平行六面体的体积. 由于向量积 $\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2$ 的模长就是上述平行六面体的底面面积, 而实现最小距离的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\boldsymbol{\tau}_1$ 和 $\boldsymbol{\tau}_2$ 分别正交, 因此将平行六面体的体积除以底面面积就得到最小距离 $\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$.

留下的问题是如何求出点 P_1 和 P_2. 我们即将看到, 为了求出最短距离完全没有必要去计算它们的坐标.

题设条件给出了 $\boldsymbol{l}_1$ 上的点 $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $\boldsymbol{l}_2$ 上的点 $Q_2 = (x_2, y_2, z_2)$. 利用

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{Q_2P_2},$$

而向量 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 平行于 $\boldsymbol{\tau}_1$, $\overrightarrow{Q_2P_2}$ 平行于 $\boldsymbol{\tau}_2$, 因此在混合积的计算时就有

$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = (\overrightarrow{Q_1Q_2}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2),$$

从而得到所要求的两直线间的最短距离为

$$d = \frac{|(\overrightarrow{Q_1Q_2}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)|}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|},$$

其中 $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, $\boldsymbol{\tau}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和 $\boldsymbol{\tau}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ 都由题设条件直接提供. □

解 2 用立体几何和向量代数知识也可如下求解.

先过点 Q_1 作平行于直线 $\boldsymbol{l}_2$ 的直线, 它与直线 $\boldsymbol{l}_1$ 张成一个平面, 记为 Π. 该平面的法向量为 $\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2$. 然后求经过点 Q_2 的直线 $\boldsymbol{l}_2$ 到平面 Π 的距离. 由于该直线平行于平面 Π, 因此这个距离就等于向量 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 在平面 Π 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影, 即它们的标量积. 当然还需要取其绝对值. 这样就得到与前面相同的答案:

$$d = \left|\overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot \boldsymbol{n}\right| = \left|\overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|}\right|. \quad □$$

习题 3702 求有心二次曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 的半轴.

提示 对于椭圆的情况见 §4.5 的习题 2406 的解 9. □

习题 3705 求平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$ (其中 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$) 与椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

相交所成截面的面积.

解 1 由解析几何知道, 本题的截面是中心在原点的椭圆, 只要求出其长短半轴即可得到椭圆的面积. 利用椭圆边界上到中心距离的最大值和最小值就是半长轴和短半轴, 因此可以将本题归结为一个条件最值问题, 即求截面边界上的点到原点距离平方的最值. 这时的最值存在性是有保证的.

为简明起见将方向余弦改记为 l, m, n, 满足 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. 两个约束条件为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad lx + my + nz = 0.$$

目标函数是 $u = x^2 + y^2 + z^2$. 写出由函数 $\varphi_1(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$ 和 $\varphi_2(x, y, z) = lx + mx + nz$ 的偏导数构成的雅可比矩阵:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x}{a^2} & \dfrac{y}{b^2} & \dfrac{z}{b^2} \\ l & m & n \end{pmatrix}.$$

若在满足约束条件的某个点 (x_0, y_0, z_0) 处此矩阵不满秩, 则矩阵的两行线性相关. 由于 (l, m, n) 为单位向量, 因此存在 k, 使得

$$\frac{x_0}{a^2} = kl, \quad \frac{y_0}{b^2} = km, \quad \frac{z_0}{c^2} = kn.$$

然后将这三个表达式分别乘以 x_0, y_0, z_0 并相加得到

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = k(lx_0 + my_0 + nz_0).$$

这时上式左边等于 1, 右边等于 0, 引出矛盾. 这表明雅可比矩阵满秩的条件成立.

作拉格朗日函数

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - \mu(lx + my + nz),$$

则在求偏导后得到方程组

$$L'_x = 2x - \lambda\frac{2x}{a^2} - \mu l = 0, \quad L'_y = 2y - \lambda\frac{2y}{b^2} - \mu m = 0, \quad L'_z = 2z - \lambda\frac{2z}{c^2} - \mu n = 0.$$

在组合 $xL'_x + yL'_y + zL'_z = 0$ 中利用两个约束条件, 就得到

$$\lambda = x^2 + y^2 + z^2.$$

由此可见, 本题只要求出乘子 λ 的最大值和最小值的乘积, 并不需要求出驻点. 为此设法消去 x, y, z 和乘子 μ 如下.

将 $L'_x = L'_y = L'_z = 0$ 和约束 $lx + my + nz = 0$ 看成为四个未知数 x, y, z, μ 的齐次线性代数方程组, 则由于它有非零解, 从而其系数行列式为 0, 略加整理后即得到

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\lambda}{a^2} & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 - \dfrac{\lambda}{b^2} & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{\lambda}{c^2} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

按第一行或第一列展开, 利用 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 即可得到关于乘子 λ 的二次方程

$$\left(\frac{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}{a^2b^2c^2}\right)\lambda^2 - \left[\frac{l^2(b^2 + c^2)}{b^2c^2} + \frac{m^2(c^2 + a^2)}{c^2a^2} + \frac{n^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2}\right]\lambda + 1 = 0.$$

将乘子的最大值和最小值分别记为 λ_1 和 λ_2, 则它们的乘积就是上述二次方程的首项系数的倒数, 因此所求的椭圆截面面积为

$$S = \pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\pi abc}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}. \quad \square$$

注 在此解法中利用乘子 λ 等于驻点到原点距离的平方, 只关心求出该乘子的值. 由问题的几何意义可见, 当截面为圆时, 最大值等于最小值, 圆周上的点都是最值点, 而对于非圆的情况, 最小值点和最大值点也各有两个. 然而这些多值可能性不影响拉格朗日乘子法的应用.

解 2 (投影法) 从平面方程 $lx + my + nz = 0$ (其中 l, m, n 为平面法方向的方向余弦) 和椭球面方程 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 消去 z, 得到

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(lx + my)^2}{n^2c^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{l^2}{n^2c^2}\right)x^2 + 2\frac{lm}{n^2c^2}xy + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{m^2}{n^2c^2}\right)y^2 = 1,$$

它就是截面上的椭圆在坐标面 xOy 上的投影.

将上述方程记为 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$, 即可由 §4.5 的习题 2406 知道上述椭圆所围面积为

$$\frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2b^2} + \dfrac{m^2}{n^2} \cdot \dfrac{1}{c^2a^2} + \dfrac{l^2}{n^2} \cdot \dfrac{1}{b^2c^2}}},$$

然后再除以方向余弦 n 就得到截面上的椭圆面积为①

$$S = \frac{\pi}{n\sqrt{\frac{1}{a^2b^2} + \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{1}{c^2a^2} + \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{1}{b^2c^2}}} = \frac{\pi abc}{\sqrt{n^2c^2 + m^2b^2 + l^2a^2}}. \quad \square$$

习题 3706 根据费马原理, 光在最短时间内从一点传播至另一点.

假定这两点位于交界面为平面的不同的光介质中, 并且光的传播速度在第一种介质中等于 v_1, 而在第二种介质中等于 v_2, 试推出光的折射定律.

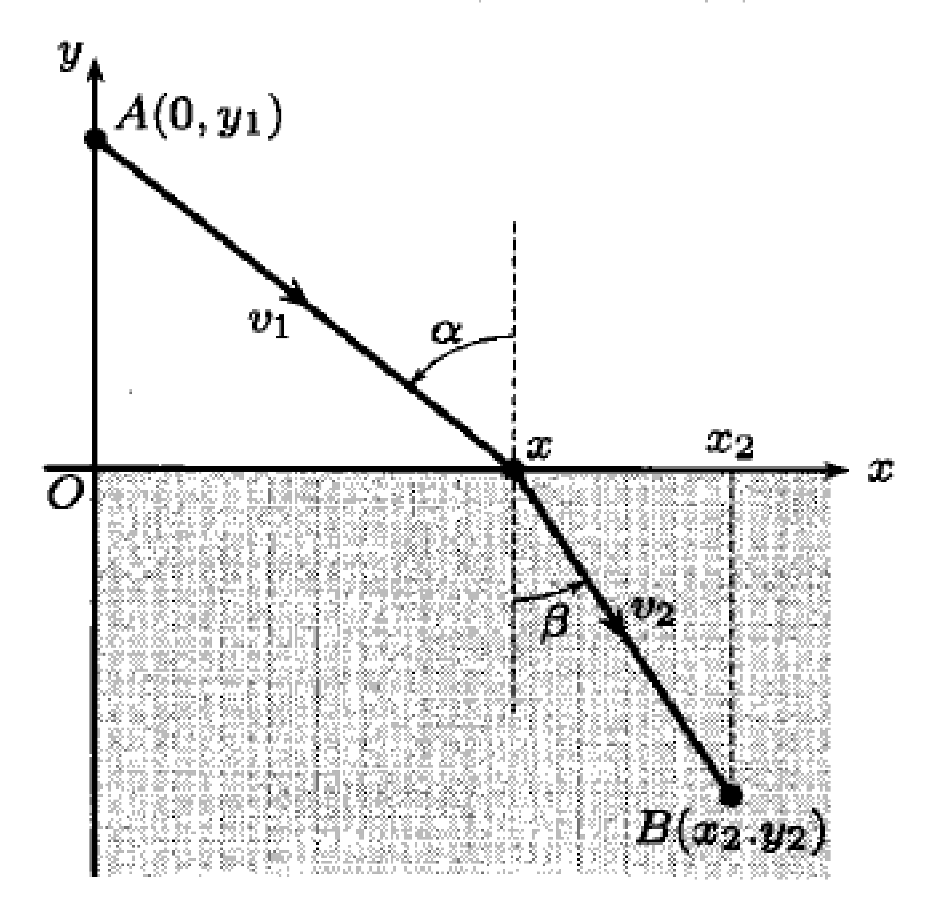
解 本题是一个典型的一元函数最值问题, 没有必要化为条件最值问题求解.

如附图所示, 设有一束光线从点 $A(0, y_1)$ $(y_1 > 0)$ 出发经过界面 $y = 0$ 到达点 $B(x_2, y_2)$ $(x_2 > 0, y_2 < 0)$.

设光在介质 1 $(y > 0)$ 和介质 2 $(y < 0)$ 中的速度分别为 v_1 和 v_2. 以下将光束与界面交点的横坐标 x 取为自变量, 计算光束从 A 到 B 所用时间, 它是 x 的函数. 然后求其最小值, 即可推出在最小值点处的入射角和折射角满足折射定律:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

其中 α 和 β 分别是入射角和折射角.



习题 3706 的附图

取定 x, 可以看出所用时间为

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{v_2}.$$

对 x 求导得到

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + y_1^2}} + \frac{x - x_2}{v_2\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}.$$

要从方程 $t'(x) = 0$ 解出驻点是不方便的, 然而这对于本题的目的来说根本是不必要的.

首先看出 $t'(x)$ 在区间 $[0, x_2]$ 两端反号: $t'(0) < 0$, $t'(x_2) > 0$, 因此从零点存在定理知道存在 $\xi \in (0, x_2)$, 使得 $t'(\xi) = 0$.

写出入射角与折射角的正弦表达式:

$$\sin\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + y_1^2}}, \quad \sin\beta = \frac{x_2 - \xi}{\sqrt{(x_2 - \xi)^2 + y_2^2}},$$

就可以看出有

$$t'(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2} = 0.$$

① 利用后面 §8.4 中的曲面面积公式就可推出: 平面 $lx + my + nz = 0$ 上的可积图形的面积乘以方向余弦 $n = \cos\gamma$ 就得到该图形在坐标面 xOy 上投影图形的面积.

这已经证明了光线在驻点处满足折射定律.

为了证明这个驻点就是最小值点, 可以将 $t'(x)$ 再求导一次得到

$$t''(x)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y_1^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y_1^2}}}{x^2+y_1^2}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}-\dfrac{(x-x_2)^2}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}}{(x_2-x)^2+y_2^2}$$

$$=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{y_1^2}{(x^2+y_1^2)^{3/2}}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{y_2^2}{((x_2-x)^{+}y_2^2)^{3/2}}>0,$$

可见 $t(x)$ 是严格下凸函数 (见 §2.8.3 的命题 2.5). 再利用 $t'(0)<0$ 和 $t'(x_2)>0$ 就可见 $t(x)$ 先严格单调减少再严格单调增加, 因此其唯一的驻点就是最小值点. □

注 为什么光束满足折射定律? 难道光线知道走最快的路线? 对此有兴趣的读者可以看著名的科普读物 [3] 对此的解释和诺贝尔物理奖获得者费曼在 [12] 中的观点.

习题 3707 一折射棱镜的折射角为 α, 折射率为 n. 光线以怎样的入射角射向此棱镜侧面, 其偏向角 (即入射线与出射线之间的角) 最小? 求此最小偏向角.

解 如附图下方所示, 入射光线 l_1 的入射角为 β, 出射光线 c_1 的出射角为 γ, 根据折射定律有

$$\frac{\sin\beta}{\sin\lambda}=n,\quad \frac{\sin\gamma}{\sin\mu}=n.$$

利用 $\lambda+\mu=\alpha$, 就得到偏向角

$$\delta=(\beta-\lambda)+(\gamma-\mu)=\beta+\gamma-\alpha.$$

由此可见 δ 为 β 的一元函数.

习题 3707 的附图

以下只考虑自变量 β 的允许范围为 $[0°,90°]$ 的情况①.

由以上关系式即可得到函数 $\delta(\beta)$ 的显表达式为

$$\begin{aligned}\delta(\beta)&=\beta+\arcsin(n\sin\mu)-\alpha\\&=\beta+\arcsin[n\sin(\alpha-\lambda)]-\alpha\\&=\beta+\arcsin\left\{n\sin\left[\alpha-\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\beta\right)\right]\right\}-\alpha,\end{aligned}$$

它在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上有最小值. 将上式对 β 求导得到

$$\delta'(\beta)=1+\frac{1}{\sqrt{1-n^2\sin^2\mu}}\cdot n\cos\mu\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}\sin^2\beta}}\cdot\frac{1}{n}\cos\beta\right)$$

$$=1-\frac{\cos\mu\cos\beta}{\cos\gamma\cos\lambda}.$$

① 由于折射率 $n>1$, 在出射点处的入射角 μ 不能大于临界角 $\arcsin\frac{1}{n}$, 由此可见棱镜的折射角 α 也不能大于临界角. 若取玻璃的折射率为 1.5, 则 $\alpha<\arcsin\frac{2}{3}\approx 41.810°$. 在附图中的棱镜取 $\alpha=30°$, l_1 的入射角 β 也取为 30°. 在附图上方所取的入射光线 l_2 和出射光线 c_2 则是本题的最优解, 这时 $\beta=\gamma$, 使得偏差角 δ 达到最小.

从 $\delta'(0)=1-\dfrac{\cos\mu}{\sqrt{1-n^2\sin^2\mu}}<0$ 和 $\delta'(\pi/2)=1>0$ 可见函数 $\delta(\beta)$ 不会在区间端点上取到最小值, 从而最小值点必定是驻点.

从 $\delta'(\beta)=0$ 得到的下列关系式

$$\frac{\cos\mu\cos\beta}{\cos\gamma\cos\lambda}=1$$

出发, 并利用折射定律提供的

$$\frac{\sin\beta}{\sin\lambda}=n,\quad \frac{\sin\gamma}{\sin\mu}=n,$$

即可得到

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}&=\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\mu}=\frac{n^2\cos^2\lambda}{n^2\cos^2\mu}=\frac{n^2-n^2\sin^2\gamma}{n^2-n^2\sin^2\mu}=\frac{n^2-\sin^2\beta}{n^2-\sin^2\gamma}\\&=\frac{(n^2-\sin^2\beta)+\cos^2\beta}{(n^2-\sin^2\gamma)+\cos^2\gamma}=1,\end{aligned}$$

其中最后一步利用了 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 时该分数也等于 $\frac{a+c}{b+d}$.

由此可见有 $\beta=\gamma,\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}\alpha$. 于是得到唯一的驻点为

$$\beta_0=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

它就是要求的最小值点. 同时可得到入射角为 β_0 时的最小偏差角为

$$\delta(\beta_0)=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha.\quad\Box$$

注 1 本题若用拉格朗日乘子法则也可以得到相同的驻点, 然而如何证明该驻点就是最小值点则不如研究有界闭区间上的一元函数方便. 此外, 对于棱镜的折射角大于临界角的情况也可以作类似的讨论, 只是这时的入射角 β 的允许范围要变小. 然而若折射角大于临界角加上 90°, 则入射光线不可能穿透棱镜, 求最小偏差角问题没有意义.

注 2 在 [16] 的第二卷第二册的 §41-1 的例 3 中, 将本题的结论用于测定棱镜材料对空气的折射率, 即有

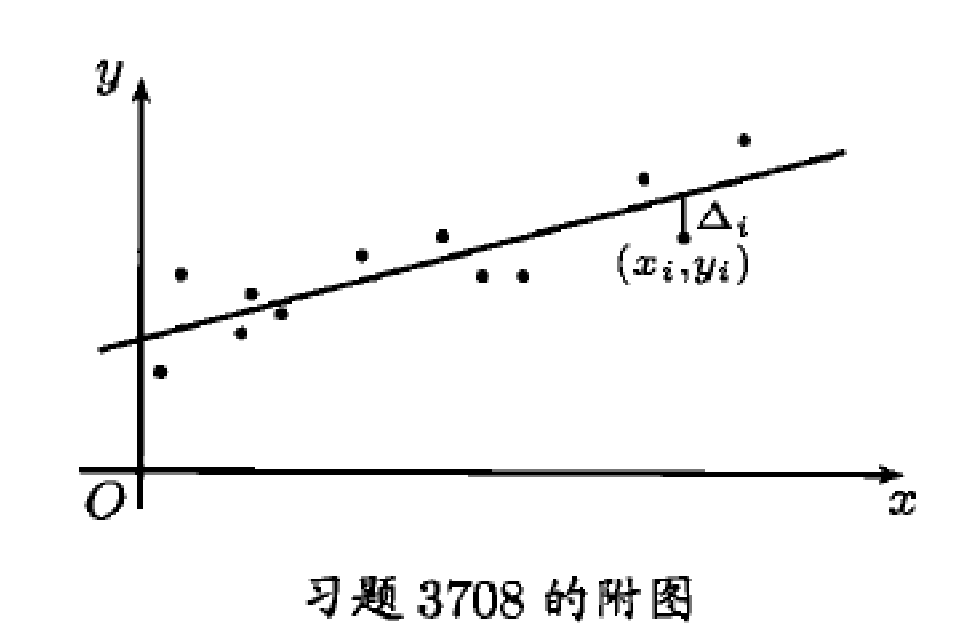
$$n=\frac{\sin\dfrac{\delta+\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

其中利用了当光线对称地通过棱镜 (即 $\beta=\gamma$) 时恰好使得偏差角达到极小, 测量出此时的偏差角 δ, 就可以计算出折射率 n.

习题 3708 (最小二乘法) 变量 x 和 y 满足系数待定的线性方程

$$y=ax+b.$$

经过一系列精度相同的测量, 对于量 x 和 y 得到值 $x_i,y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$. 利用最小二乘法, 求系数 a 和 b 的最可靠数值.



习题 3708 的附图

注 根据最小二乘法的思想, 系数 a 和 b 的最可靠数值所对应的误差的平方和

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

为最小. 这可以按照二元函数的无条件最值问题求解. 在中学数学的现行高中必修教材中已经详细介绍了这个方法 (也称为最小平方法), 将所得的 $y=ax+b$ 称为线性回归方程, 将其图像称为回归直线. 本书从略. 这方面值得推荐阅读的一篇论文见数学译林的第一卷 (1982) 第 4 期 336–346 页, 其中将最小二乘法在近代统计分析中的作用比喻为汽车在现代社会中的作用.

习题 3709 在平面上给定 n 个点 $M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 直线

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

在怎样的位置时, 这些点与此直线的偏差的平方和最小?

解 (概要) 本题虽然在表面上与上一题类似, 但却有新的特点.

由于点 $M_i(x_i,y_i)$ 到直线的距离为 $|x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p|$, 因此目标函数就是

$$D=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)^2.$$

于是问题成为在区域 $p\geqslant 0,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ 上的二元函数的最小值问题. 这虽然是无界区域, 但由于 D 关于 p 是以 np^2 为二次项的二次多项式, 不难证明最小值存在. 求偏导并令 $D'_\alpha=0$, $D'_p=0$, 则后者为

$$\begin{aligned}D'_p&=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)\\&=2np-2\cos\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i-2\sin\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i=0.\end{aligned}$$

若引入记号

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

即在点 M_i $(i=1,\cdots,n)$ 处放置有单位质量的质点系的质心, 则方程 $D'_p=0$ 即可写为

$$\overline{x}\cos\alpha+\overline{y}\sin\alpha=p.$$

这表明所求直线必定通过质心, 因此只需要考虑通过质心 $(\overline{x},\overline{y})$ 的所有直线.

然后若引入 $u_i=x_i-\overline{x}, v_i=y_i-\overline{y}$ $(i=1,\cdots,n)$, 则目标函数简化为一元函数

$$D=\sum_{i=1}^{n}(u_i\cos\alpha+v_i\sin\alpha)^2,$$

以下从略. □

注 本题的答案中有一个特殊情况, 这时经过点 $(\overline{x},\overline{y})$ 的每一条直线都是达到最小值的直线. 一个简单例子就是给定下列四个点:

$$M_1(1,1),\ M_2(1,-1),\ M_3(-1,1),\ M_4(-1,-1).$$

不难直接验证它们到经过原点的每一条直线的距离平方和同时达到最小值 4.

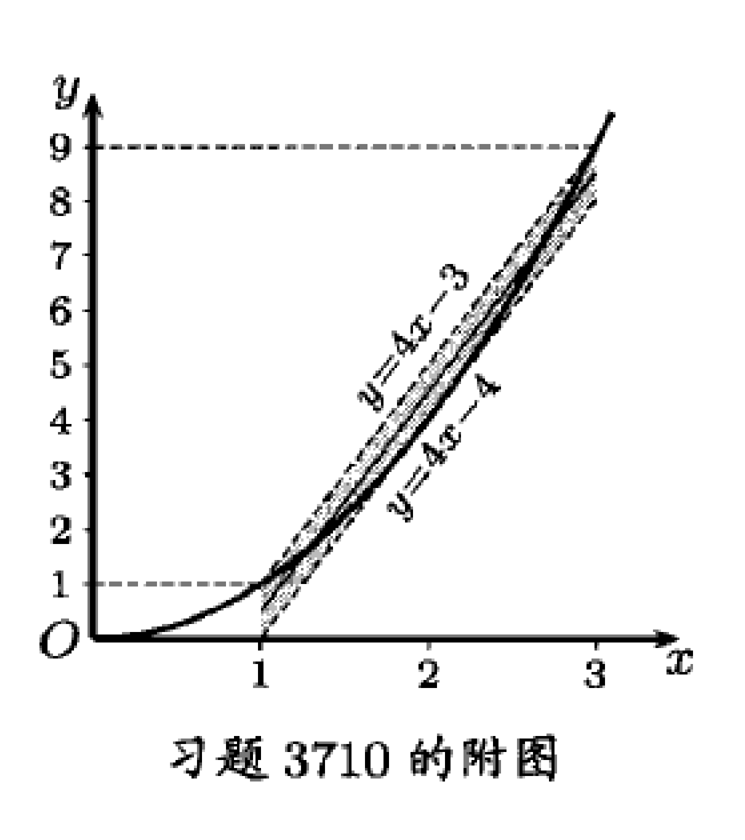
习题 3710 在区间 $[1,3]$ 内用线性函数 $ax+b$ 来近似地代替 x^2, 使得绝对偏差

$$\Delta = \sup|x^2-(ax+b)| \quad (1 \leqslant x \leqslant 3)$$

最小.

解 (概要) 本题的性质属于 §2.11.4 的偏差计算. 如该处的习题 1460 及其注和附图所示, 就可以知道本题的答案是什么. 具体计算如下.

如附图所示, 先求出连接抛物线段 $y=x^2$ $(x \in [1,3])$ 两端的直线, 方程为 $y=4x-3$. 然后作出具有相同斜率并与抛物线相切的直线 $y=4x-4$, 在图上均用虚直线表出. 然后取这两条平行线段的中线, 在附图中用细直线表示, 它就是最佳逼近区间 $[1,3]$ 上的抛物线段 $y=x^2$ 的直线段. 其方程为 $y=4x-\dfrac{7}{2}$. □



习题 3710 的附图

注 所得到的直线 $y=4x-\dfrac{7}{2}$ 在 $[1,3]$ 上与抛物线段 $y=x^2$ 在 $x=1,2,3$ 处有三个正负相间的等值偏差点, 因此如切比雪夫定理 (§2.11.6 中的命题 2.11) 所示, 它就是最佳一致逼近的线性函数. 最小的绝对偏差是 $\dfrac{1}{2}$.

6.7.5 补注

在这个补注中将证明 §6.7.2 中的命题 6.6–6.8, 并补充判定线性约束下的二次型为正定的命题 6.9. 为阅读方便起见, 将复述命题的内容.

命题 6.6 (单个约束条件下的拉格朗日乘子法) 设函数 $f(x,y)$ 和 $\varphi(x,y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内连续可微. 若点 $(a,b) \in D$ 是满足约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的目标函数 $f(x,y)$ 的条件极值点或条件最值点, 且梯度向量 $\operatorname{grad}\varphi=(\varphi_x,\varphi_y)$ 在点 (a,b) 处不是零向量, 则存在 λ_0, 使得在 a,b,λ_0 处, 拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

的偏导数均等于 0:

$$L'_x(a,b,\lambda_0)=0, \quad L'_y(a,b,\lambda_0)=0, \quad L'_\lambda(a,b,\lambda_0)=0.$$

证 用消去法.

利用梯度 $\operatorname{grad}\varphi(a,b)$ 不是零向量的条件, 不妨设 $\varphi_y(a,b)\neq 0$. 按照隐函数存在定理, 在点 (a,b) 的一个邻域内存在唯一的连续可微函数 $y=y(x)$, 满足 $y(a)=b$ 和 $\varphi(x,y(x))\equiv 0$. 由于在这个邻域内约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 与 $y=y(x)$ 等价, 从而只要考虑复合函数 $f(x,y(x))$ 的极值 (或最值) 问题. 这样就消去了变量 y.

将恒等式 $\varphi(x,y(x))\equiv 0$ 对 x 求导得到

$$\varphi'_x+\varphi'_y y'=0. \tag{6.11}$$

隐函数存在定理表明: 点 a 是隐函数 $y(x)$ 的定义域的内点, 因此从点 (a,b) 为

$f(x,y)$ 的条件极值点或条件最值点就可以推出 $x=a$ 是复合函数 $f(x,y(x))$ 的无条件极值点. 用费马定理和链式法则计算得到

$$f'_x(a,b)+f'_y(a,b)y'(a)=0.$$

另一方面, 在 (6.11) 中用 $x=a$ 代入, 得到

$$\varphi'_x(a,b)+\varphi'_y(a,b)y'(a)=0.$$

由此可见向量 $(f'_x(a,b),f'_y(a,b))$ 与梯度向量 $(\varphi'_x(a,b),\varphi'_y(a,b))$ 共线. 由于后者不是零向量, 因此存在 λ_0, 使得在点 (a,b) 处 $(f'_x,f'_y)=\lambda_0(\varphi'_x,\varphi'_y)$, 这就是

$$f'_x(a,b)-\lambda_0\varphi'_x(a,b)=0,\quad f'_y(a,b)-\lambda_0\varphi'_y(a,b)=0,$$

也就是对于 $x=a,y=b,\lambda=\lambda_0$ 成立 $L'_x=L'_y=0$. 余下的 $L'_\lambda=0$ 就是约束条件 $\varphi(x,y)=0$, 对于点 (a,b) 当然满足. □

命题 6.7 (多个约束条件下的拉格朗日乘子法) 设函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $k<n$ 个函数 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,k)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内连续可微. 若点 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 是满足约束条件 $\varphi_1=\cdots=\varphi_k=0$ 下的目标函数 f 的条件极值点或条件最值点, 且雅可比矩阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant n}}$ 在点 P_0 处满秩, 则存在 k 个数 $\lambda_1^0,\cdots,\lambda_k^0$, 它们与 $x_1^0,\cdots,x_n^0$ 一起, 使得 $n+k$ 元的拉格朗日函数

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=f(x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^k\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)$$

在该处的偏导数均等于 0:

$$L'_{x_1}=0,\cdots,L'_{x_n}=0;\ L'_{\lambda_1}=0,\cdots,L'_{\lambda_k}=0.$$

证 仍然用消去法. 写出在点 P_0 处由约束条件中的 k 个函数的偏导数组成的雅可比矩阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant n}}$, 它是一个 $k\times n$ 阶矩阵:

$$\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}\end{pmatrix}\right|_{P_0}.$$

从命题的条件知这个矩阵满秩 (注意 $1\leqslant k<n$), 因此可以用隐函数组存在定理 (见 [11] 的第一卷 208 小节) 于方程组 $\varphi_1=\cdots=\varphi_k=0$, 由此推知在点 P_0 的一个邻域中存在唯一的隐函数组, 即使得 $x_1,\cdots,x_n$ 中的 k 个变量成为另外 $n-k$ 个变量的函数. 该隐函数组是从 $\mathbb{R}^{n-k}$ 中的一个邻域到 $\mathbb{R}^k$ 的映射, 满足 k 个约束条件构成的方程组.

将上述隐函数组代入约束条件中得到关于 $n-k$ 个变量的 k 个恒等式, 然后利用一阶全微分的形式不变性得到以下 k 个等式 (当然在点 P_0 处也成立):

$$\begin{cases}\mathrm{d}\varphi_1=\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\cdots+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathrm{d}\varphi_k=\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\cdots+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n=0.\end{cases}\tag{6.12}$$

另一方面, 由于 P_0 为目标函数 f 的条件极值点, 将上述隐函数组代入 f 中, 就使得 f 从 n 个自变量的函数变成为 $n-k$ 个自变量的函数, 同时问题从条件极值变成为无条件极值 (这就是消去法的目的). 用费马定理知道这个函数在极值点处对于这 $n-k$ 个自变量的偏导数等于 0, 也就是 $\mathrm{d}f=0$. 利用一阶微分的形式不变性, 就可以不区分在 $x_1,\cdots,x_n$ 中的自变量和因变量而得到

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n=0. \tag{6.13}$$

考察向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n)$. 从前述的雅可比矩阵满秩和 (6.12) 可见 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 与 k 个线性无关向量 $\mathrm{grad}\,\varphi_1(P_0),\cdots,\mathrm{grad}\,\varphi_k(P_0)$ 正交. 将它们张成的 k 维子空间记为

$$M=\mathrm{Span}\{\mathrm{grad}\,\varphi_1(P_0),\cdots,\mathrm{grad}\,\varphi_k(P_0)\},$$

则 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\perp M$, 也就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\in M^{\perp}$, 记号 $M^{\perp}$ 是 M 的正交补子空间.

条件 (6.13) 表明向量 $\mathrm{grad}\,f(P_0)$ 与所有这样的 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 正交. 由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的全体组成 $M^{\perp}$, 而 $(M^{\perp})^{\perp}=M$, 因此 $\mathrm{grad}\,f(P_0)\in M$, 即是 $\mathrm{grad}\,\varphi_1(P_0),\cdots,\mathrm{grad}\,\varphi_k(P_0)$ 的线性组合, 其系数就是所要求的拉格朗日乘子. 这就是 $L'_{x_1}=0,\cdots,L'_{x_n}=0$. □

命题 6.8 设 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_k^{(0)})$ 是命题 6.7 中得到的驻点和乘子, 函数 f 和 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 在点 $P_0(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 的一个邻域内二阶连续可微. 若关于 $\mathrm{d}x_i\ (i=1,\cdots,n)$ 的二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\lambda}^{(0)})\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j \tag{6.14}$$

在满足线性约束条件

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n=0\ \ (i=1,\cdots,k) \tag{6.15}$$

时为正定 (负定), 则点 P_0 为条件极小值点 (极大值点). 又若 (6.14) 在满足条件 (6.15) 时为不定号的二次型, 则 P_0 不是极值点.

证 由于在条件极值点处, 目标函数 f 的所有一阶偏导数一般不同时等于 0, 因此增量 Δf 一般不是自变量增量 $\mathrm{d}x_i\ (i=1,\cdots,n)$ 的二次型. 利用拉格朗日函数在 $x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_k^{(0)}$ 处的所有一阶偏导数等于 0, 因此可以得到以下表达式:

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}^0)=L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}^0)-L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)\\&=\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j+o(r^2)\ (r\to 0),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 满足线性约束条件 (6.15), $r=\|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\|$. 由此即可得到所要的结论. □

由命题 6.8 可见, 问题归结为线性约束下的二次型的定号问题. 这方面可参考 [2] 的第五章中对此问题的专门讨论, 其中包括下列定理及其原始文献.

命题 6.9 (芬斯勒定理) 设 $\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的二次型, $\boldsymbol{x}$ 满足线性约束条件 $G\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其中 G 为 $k\times n$ 阶矩阵 $(1\leqslant k<n)$, 则该二次型为正定的充分必要条件是当 λ 充分大时矩阵 $Q+\lambda G^TG$ 为正定阵.

证 **充分性** 若有某个 $\lambda > 0$, 使得矩阵 $Q + \lambda G^T G$ 为正定阵, 则当 $G\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, 就有

$$\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T (Q + \lambda G^T G)\boldsymbol{x} > 0,$$

因此二次型 $\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 满足线性约束条件 $G\boldsymbol{x} = 0$ 时为正定.

必要性 不妨设矩阵 G 的秩为 k. 这时 $G^T G$ 为 n 阶的半正定对称阵, 且有 k 个正特征值. 于是有正交阵 U, 使得在正交变换 $\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}$ 下实现对角化:

$$\boldsymbol{x}^T G^T G \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T U^T G^T G U \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_2^T \Lambda \boldsymbol{y}_2, \tag{6.16}$$

其中 $\boldsymbol{y}_2 = (y_{n-k+1}, \cdots, y_n)$ 是向量 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ 的后 k 个分量组成的 k 维向量, 矩阵 $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ 是 k 阶对角阵, 其中 $\lambda_i > 0\ (i = 1, \cdots, k)$.

以下又将向量 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ 的前 $n-k$ 个分量 $y_1, \cdots, y_{n-k}$ 组成的 $n-k$ 维向量记为 $\boldsymbol{y}_1$. 于是在以上正交变换下二次型 $\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}$ 变为

$$\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1^T & \boldsymbol{y}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ D^T & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

由 (6.16) 可见, $G\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 等价于 $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 因此在满足此约束条件下的二次型 $\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}$ 为正定等价于 (6.17) 右边的分块矩阵中的 C 为 $n-k$ 阶的正定阵.

现在写出命题中所关心的二次型

$$\boldsymbol{x}^T (Q + \lambda G^T G)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1^T & \boldsymbol{y}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ D^T & E + \lambda\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

问题是要证明当 $\lambda > 0$ 充分大时, (6.18) 右边的二次型为正定.

利用分块矩阵运算作下列合同变换得到

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -D^T C^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ D^T & E + \lambda\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -C^{-1}D \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E + \lambda\Lambda - D^T C^{-1} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -C^{-1}D \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \lambda\Lambda + E - D^T C^{-1} D \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中的 I_1 和 I_2 分别为 $n-k$ 阶和 k 阶的单位阵.

由于 C 为正定阵, 而 $\lambda\Lambda + E - D^T C^{-1} D$ 的各阶顺序主子式当 $\lambda > 0$ 充分大时均大于 0, 因此也是正定阵, 从而就推出 (6.18) 为正定二次型. □

例题 试将命题 6.9 用于 §6.7.2 的习题 3654.

解 如该题的解所示, 在 $x_0 = y_0 = \dfrac{1}{2}$ 处, 二次型 (6.8) 为 $2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 约束条件 (6.9) 为 $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$. 于是在命题 6.9 中的 $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $G = (1\ 1)$. 这时有

$$-Q + \lambda G^T G = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

由于上述对称阵的顺序主子式为 λ 和 $2\lambda - 1$, 可见当 λ 充分大时, $-Q + \lambda G^T G$ 为正定阵. 由命题 6.9 可知在约束条件 (6.9) 下的二次型 (6.8) 为负定, 从而点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 为条件极大值点. □

第七章 含参变量的积分

内容简介 前三节为含参变量积分的基本理论, 后两节为欧拉积分和傅里叶积分, 可看成是含参变量积分的应用.

§7.1 含参变量的常义积分 (习题 3711–3740)

内容简介 按习题内容分为含参变量的常义积分的基本性质和应用两个小节.

7.1.1 含参变量的常义积分的性质 (习题 3711–3722)

这一小节的习题都与含参变量常义积分的基本性质有关, 其中包括求极限、连续性、可微性和可积性, 但并不只是现成定理的简单应用. 此外还有不少习题的结论表明, 在这些定理的条件不满足情况下, 它们的结论可能不成立, 但也可能仍然成立.

习题 3712 研究函数

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的正连续函数.

解 1 用含参变量常义积分的连续性定理即可知 $F(y)$ 在 $y\neq 0$ 时连续, 因此只要讨论在点 $y=0$ 处的情况. 这时有 $F(0)=0$, 下面讨论 $y\to+0$ 时的情况.

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是正连续函数, 因此存在最小值 $m>0$, 于是当 $y>0$ 时可有如下的估计:

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \geqslant m\int_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=m\arctan\frac{x}{y}\bigg|_{x=0}^{x=1}=m\arctan\frac{1}{y}.$$

令 $y\to+0$ 有 $\varliminf\limits_{y\to+0} F(y)\geqslant \dfrac{m\pi}{2}>0$. 由 $F(0)=0$ 可见 $F(y)$ 于点 $y=0$ 处不连续. □

注 本题的结论容易理解, 由于作为二元函数的被积函数 $\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续, 造成了 $F(y)$ 在 $y=0$ 处不连续. 上述解法很简短, 但其中利用了正连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有正的最小值. 这是否是本题的关键之处? 此外, 函数 $F(y)$ 在点 $y=0$ 附近的性态究竟如何? 在下一个解法中去掉 $f(x)$ 为正的条件, 并将 $F(\pm 0)$ 计算出来. 从中可以看出本题的积分所具有的特殊性质.

解 2 将题设中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上正连续的条件减弱为在 $[0,1]$ 上连续[①], 且存在极限 $f(+0)$. 在此条件下可以通过估计 $|F(y)-F(y_0)|$ 而证明函数 $F(y)$ 于 $y\neq 0$ 时均连续 (细节从略). 余下的主要问题仍然是讨论 F 在点 $y=0$ 处的性态.

---

① 连续性条件还可以减弱为可积, 只是证明过程稍长一点. 从略

下面计算 $F(+0)$. 任意取定 $\delta\in(0,1)$, 将定义 $F(y)$ 的积分分拆如下:

$$F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^\delta\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x.$$

这时右边的第一个积分的极限可用积分第一中值定理计算如下:

$$\int_0^\delta\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^\delta\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=f(\xi)\arctan\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=\delta}$$
$$=f(\xi)\arctan\frac{\delta}{y}\to f(+0)\frac{\pi}{2}\ \ (y\to+0).$$

而第二个积分的极限可利用函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界而计算如下:

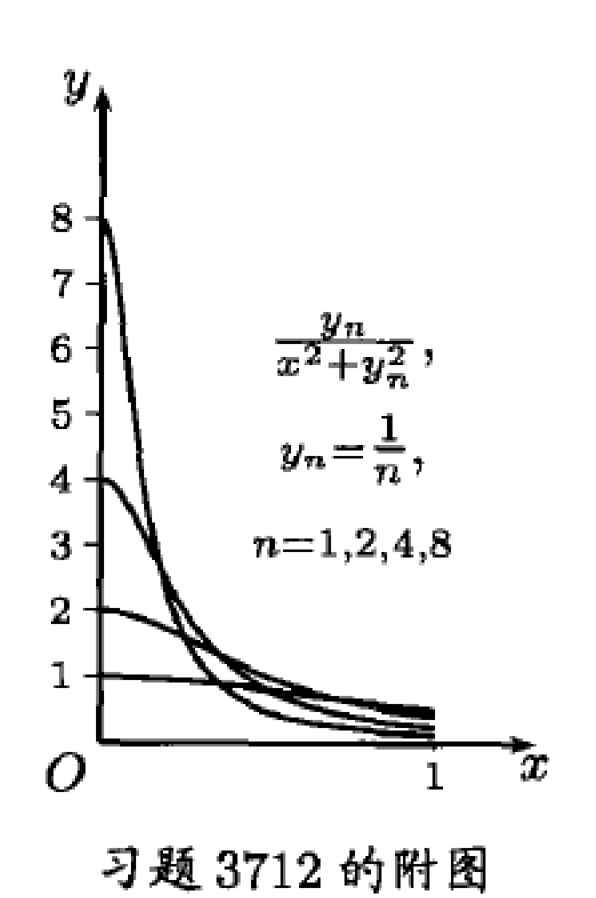
$$\left|\int_\delta^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\cdot\frac{y}{\delta^2+y^2}\to 0\ \ (y\to+0).$$

综合以上就得到 $F(+0)=f(+0)\frac{\pi}{2}$. 由于 $F(y)$ 为奇函数, 因此又有 $F(-0)=-f(+0)\frac{\pi}{2}$. 于是当 $f(x)$ 满足 $f(+0)=0$ 时 $F(y)$ 于 $y=0$ 处连续, 否则 $F(y)$ 于该点有第一类不连续点. □

注 由解 2 可见, 函数 $F(y)$ 在点 $y=0$ 附近的性态只取决于函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的右侧性态. 从计算过程可见, 问题的关键在于当 $y\to+0$ 时, 积分

$$\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

不仅趋于 $\frac{\pi}{2}$, 而且其主要部分集中在区间 $[0,\delta]$ 上, 其中 $\delta>0$ 可取为任意小的正数. 在附图中对于 $y=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ 作出了区间 $[0,1]$ 上的被积函数 $\frac{y}{x^2+y^2}$ 的图像.



习题 3712 的附图

有兴趣的读者可参考 [32] 的 §16.3.1, 其中对被称为核函数的函数族作了简要的介绍, 并列出了有关的参考文献. 本题的 $\frac{y}{x^2+y^2}$ 就是以 y 为连续参数的核函数.

习题 3713(d) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

解 1 将参数 n 的倒数 $\frac{1}{n}$ 连续化, 只需要计算含参变量 y 的积分

$$F(y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}\ \ (0<y\leqslant 1)$$

当 $y\to+0$ 时的极限. 由于被积函数当 $y\to+0$ 时的极限为 $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, 因此作为二元函数的被积函数在延拓至 $y=0$ 后就成为在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数, 从而积分 $F(y)$ 于 $y=0$ 处右侧连续, 于是就有

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}$$
$$=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=[\ln t-\ln(1+t)]\Big|_1^{\mathrm{e}}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.\ \ □$$

解 2 本题可看成函数序列的积分与 $n\to\infty$ 是否可交换顺序的问题. 这类问题在 §5.8 已见过. 由于被积函数关于 n 单调, 因此只要应用 §5.8.2 的命题 5.14 的推论, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

以下同解 1. □

注 由解 2 可见, 在 §5.8 中用级数计算定积分的问题, 可以看成为以 n 为离散参数的含参变量积分的极限问题.

习题 3713(e) 求 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

提示 困难在于本题的积分难以直接计算出来, 又不便用含参变量积分的现成定理. 然而只要利用若尔当不等式 $\sin\theta\geqslant\dfrac{2\theta}{\pi}$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ (见 §2.7.2 的习题 1290), 就可见在 $R\geqslant 0$ 和 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时成立夹逼不等式

$$0\leqslant\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{2R\theta}{\pi}}.$$

以下只要积分并取极限即可得到答案为 0. □

习题 3714.1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)\quad(A<a<x<B).$$

解 1 由于连续函数必有原函数, 于是有函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$. 用牛顿–莱布尼茨公式即可得到

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\,\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(t+h)-F(t)]\Big|_a^x\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)-F(a+h)+F(a)]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=f(x)-f(a).\end{aligned}$$ □

解 2 利用变量代换可将题中的商式改写如下:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\,\mathrm{d}t=\frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t+h)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{a+h}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

令 $h\to 0$ 即得所求. □

注 若 f 连续可微, 则应用极限与积分交换顺序的定理更为自然:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^x\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,\mathrm{d}t=\int_a^x\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right]\mathrm{d}t=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a).$$

因此本题表明只要 f 连续已可得到相同结论.

习题 3714.2 设 (1) 在 $[-1,1]$ 上 $\varphi_n(x) \geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$; (2) 对于 $0<\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1$, 当 $n\to\infty$ 时 $\varphi_n(x)\rightrightarrows 0$; (3) 当 $n\to\infty$ 时 $\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\to 1$. 证明: 若 $f(x)\in C[-1,1]$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

提示 这里的函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 就是在前面的习题 3712 的解 2 的注中提到的核函数 (族), 证明的方法与该题的解 2 相同. 读者可参考 [32] 的 §16.3.1. □

习题 3720 设 $F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|\,\mathrm{d}y$, 其中 $a<b$, $f(x)$ 为可微函数, 求 $F''(x)$.

解 当 $x\leqslant a$ 时

$$F(x) = -x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y + \int_a^b f(y)y\,\mathrm{d}y,$$

因此当 $x<a$ 时 $F'(x)=-\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$. 当 $x\geqslant b$ 时则有

$$F(x)=\int_a^b f(y)(x-y)\,\mathrm{d}y = x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y-\int_a^b yf(y)\,\mathrm{d}y,$$

因此当 $x>b$ 时 $F'(x)=\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$.

当 $a<x<b$ 时有

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(y)(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_x^b f(y)(y-x)\,\mathrm{d}y \\ &= x\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y - \int_a^x f(y)y\,\mathrm{d}y + \int_x^b f(y)y\,\mathrm{d}y - x\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

因此可求出 $a<x<b$ 时的

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y + xf(x) - f(x)x - f(x)x - \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y + xf(x) \\ &= \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

由以上结果还可见有 $F'(a-0)=F'(a+0)=-\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ 和 $F'(b-0)=F'(b+0)=\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$. 由于 F 于点 a 和 b 处连续, 因此从导数极限定理 (参见 §2.6.4 的习题 1258.1) 可知 F 在点 a,b 处也可导.

综合以上就得到一阶导数 $F'(x)$ 的完整表达式为

$$F'(x)=\begin{cases} -\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y, & x\leqslant a,\\ \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y, & a<x<b,\\ \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y, & x\geqslant b.\end{cases}$$

在此基础上再计算二阶导数. 可看出当 $x<a$ 时 $F''(x)=0$, $a<x<b$ 时 $F''(x)=2f(x)$, $x>b$ 时 $F''(x)=0$. 再用导数极限定理可知, 当且仅当 $f(a)=0$ 时存在 $F''(a)=0$, 又当且仅当 $f(b)=0$ 时存在 $F''(b)=0$. □

注 由此可见, 题设中关于 f 可微的条件是多余的, 上述解法中只要求 f 连续即可.

习题 3722 证明公式

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{d}y \ \ (n=1,2,\cdots). \tag{1}$$

利用公式 (1) 获得以下估计:

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n+1},\ \ x\in(-\infty,+\infty).$$

提示 用数学归纳法和分部积分法即可证明 (1), 注意其中 $\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}^n\cos y}{\mathrm{d}y^n}$. □

7.1.2 含参变量的常义积分的应用 (习题 3723–3740)

习题 3723 在区间 $1\leqslant x\leqslant 3$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$, 使得

$$\int_1^3(a+bx-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\min.$$

分析 本题是一个最值问题, 其目标函数 $F(a,b)=\int_1^3(a+bx-x^2)^2\,\mathrm{d}x$ 可积出为 a,b 的二次多项式, 且当 $a^2+b^2\to+\infty$ 时趋于无穷大, 因此存在最小值. 利用含参变量积分的概念求 F_a' 和 F_b' 较为方便. 此外, 还可以将本题与 §6.7.4 的习题 3710 作比较. 可以看出, 虽然同样是用线性函数 $ax+b$ 去逼近区间 $[1,3]$ 上的函数 x^2, 但由于反映逼近要求的目标函数取得不同, 所得的结果是不一样的. □

习题 3725 求完全椭圆积分①

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ \ (0<k<1)$$

的导数, 并把它们用函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 表示出来.

证明: $E(k)$ 满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

解 1 按照对含参变量常义积分的求导法则, 就有

$$E'(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{k}E(k)-\frac{1}{k}F(k).$$

① 在 §4.6 的习题 2453 的注中, 在联系到椭圆弧长计算时已介绍了第二类完全椭圆积分 $E(k)$. 它与第一类完全椭圆积分 $F(k)$ 都属于最常用的非初等函数, 同时都用含参变量的常义积分作为其定义. 关于椭圆积分的材料, 在数学分析教科书中除 [11] 之外, 还可参考 [27] 的卷 II 的 §8.7, 其中分别举出了两类完全椭圆积分的应用实例, 即单摆周期和椭圆周长.

然而要将 $F'(k)$ 用 $E(k)$ 和 $F(k)$ 表出则没有这样容易. 实际上从上式有 $F(k)=E(k)-kE'(k)$, 求导并假设习题中要求证明的微分方程关系已经成立, 则就可得到

$$\begin{aligned}F'(k)&=E'(k)-E'(k)-kE''(k)=E'(k)+\frac{k}{1-k^2}E(k)\\&=\frac{1}{k}E(k)-\frac{1}{k}F(k)+\frac{k}{1-k^2}E(k)\\&=\frac{1}{k(1-k^2)}E(k)-\frac{1}{k}F(k).\end{aligned}$$

可见余下的问题只要证明 $E(k)$ 满足题中提出的微分方程.

这里采用将 $E(k)$ 作幂级数展开并逐项求导的方法 (参见 §5.5.4 的应用 (2)). 为此在 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 的幂级数展开式中 (见 §5.5.2 的表格 (5.15)) 用 $x=-k^2\sin^2\varphi$ 代入得到

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=1-\frac{k^2}{2}\sin^2\varphi-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\cdot k^{2n}\sin^{2n}\varphi\ \ (0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}).$$

由于上式右边的级数除第一项之外均为同号, 因此用 §5.8.2 的命题 5.14 即可对于 φ 在 $[0,\pi/2]$ 上逐项积分 (并利用 §4.2.6 的公式 (4.9)), 得到在 $0\leqslant k<1$ 上的幂级数展开式:

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\Big\{1-\frac{1}{4}k^2-\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big]^2\cdot\frac{1}{2n-1}k^{2n}\Big\}.$$

然后分别计算得到

$$\begin{aligned}\frac{1-k^2}{k}E'(k)&=\frac{\pi}{2}(1-k^2)\Big\{-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\Big]^2\cdot\frac{2n+2}{2n+1}k^{2n}\Big\}\\&=\frac{\pi}{2}\Big\{-\frac{1}{2}+\frac{5}{16}k^2+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big]^2\cdot\frac{4n+1}{(2n-1)(2n+2)}k^{2n}\Big\},\\(1-k^2)E''(k)&=\frac{\pi}{2}(1-k^2)\Big\{-\frac{1}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big]^2\cdot 2nk^{2n-2}\Big\}\\&=\frac{\pi}{2}\Big\{-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}k^2-\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big]^2\cdot\frac{1}{2n+2}k^{2n}\Big\}.\end{aligned}$$

最后将上述三式相加就得到所要的等式:

$$E(k)+\frac{1-k^2}{k}E'(k)+(1-k^2)E''(k)=0.\quad\square$$

解 2　只写出本题中的微分方程的传统证明方法. 这时的主要工具是下列恒等式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\Big)=\frac{\Delta}{k^2}-\frac{1-k^2}{k^2\Delta^3},$$

其中 $\Delta=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. 此恒等式可直接验证如下:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\Big)&=\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta}+\frac{k^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3}\\&=\frac{1}{\Delta^3}(1-2\sin^2\varphi+k^2\sin^4\varphi)\\&=\frac{1}{k^2\Delta^3}[\Delta^4-(1-k^2)]=\frac{\Delta}{k^2}-\frac{1-k^2}{k^2\Delta^3}.\end{aligned}$$

然后将上述恒等式两边对于 φ 从 0 积分到 $\frac{\pi}{2}$, 并加整理, 就得到后面需要的等式:

$$\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\Delta^3}.$$

最后利用在积分号下对 k 求导, 并从 $\Delta=\sqrt{1-k^2\sin\varphi}$ 计算得到

$$\frac{\partial\Delta}{\partial k}=\frac{1}{k}\Big(\Delta-\frac{1}{\Delta}\Big),\quad \frac{\partial^2\Delta}{\partial k^2}=\frac{1}{k^2}\Big(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\Delta^3}\Big),$$

即有

$$\begin{aligned}E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}&=\Big(\frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\Delta}-\frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\Delta^3}\Big)\\&\quad+\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\,\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\Delta}\Big)+\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{k^2(1-k^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\,\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\Delta^3}=0.\quad\square\end{aligned}$$

习题 3726 证明: 阶数 n 为整数的贝塞尔函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

满足贝塞尔方程

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

解 由积分号下对参变量 x 求导得到

$$J_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\quad J_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

注意到 $J_n''(x)$ 和 $J_n(x)$ 的被积函数都有因子 $\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$, 而 $J_n'(x)$ 的被积函数有因子 $\sin(n\varphi-x\sin\varphi)$, 因此把 $x^2J_n''+(x^2-n^2)J_n$ 用分部积分法来推出 $-xJ_n'$ 是一条可行的途径. 首先有

$$-x^2\sin^2\varphi+(x^2-n^2)=x^2\cos^2\varphi-n^2=(x\cos\varphi+n)(x\cos\varphi-n),$$

且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(n\varphi-x\sin\varphi)=n-x\cos\varphi,$$

于是即可计算得到

$$\begin{aligned}&x^2J_n''(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x\cos\varphi+n)\,\mathrm{d}[\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]\\&=-\frac{1}{\pi}\big[\sin(n\varphi-x\sin\varphi)(x\cos\varphi+n)\big]\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\varphi-x\sin\varphi)(-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\\&=-xJ_n'(x),\end{aligned}$$

移项即得所求证的微分方程. $\square$

习题 3727 设

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续, 证明: 当 $0<\alpha<a$ 时有

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,\mathrm{d}x.$$

解 本题需要注意: 题中的积分有奇点 $x=\alpha$, 并非含参变量的常义积分. 同时, 奇点的位置随着参变量 α 而变化, 因此也不能直接用含参变量广义积分在积分号下的求导方法. 按照《习题集》中对本题的提示作代换 $x=\alpha t$, 可得到有固定奇点 $t=1$ 的含参变量广义积分

$$I(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}},$$

其中 $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ 绝对可积且与参变量 α 无关, 而 $\varphi(\alpha t)$ 连续可微, 因此可求导得到

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{t\varphi'(\alpha t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}.$$

然后再回复到原来的变量 x, 得到

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}\\&=\frac{1}{2\alpha}\left[-2\sqrt{\alpha-x}\cdot\varphi(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}\\&=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}(\alpha-x+x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,\mathrm{d}x.\quad\square\end{aligned}$$

注 本题见 [11] 第二卷的 511 小节的例题 14). 此外还可以注意到该书第三卷的 617 小节的例题 22), 其中利用本题的结论解出了阿贝尔积分方程, 即给定连续可微的 $\varphi(x)$, 满足条件 $\varphi(0)=0$, 求 $f(y)$, 使得满足以下等式:

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{f(y)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x-y}}.$$

它的答案是

$$f(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^y\frac{\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{y-x}}.$$

习题 3728 (一个二阶微分方程的格林函数) 设

$$u(x)=\int_0^1K(x,y)v(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中

$$K(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & x\leqslant y,\\ y(1-x), & x>y\end{cases}$$

且 $v(y)$ 是连续的, 证明: 函数 $u(x)$ 满足方程

$$u''(x)=-v(x)\ \ (0\leqslant x\leqslant 1).$$

解 将 $u(x)$ 的积分表达式按 K 的分段定义拆开为两个积分, 即得到

$$u(x)=\int_0^x y(1-x)v(y)\,\mathrm{d}y+\int_x^1 x(1-y)v(y)\,\mathrm{d}y.$$

由此可见 $u(0)=u(1)=0$. 将上式对 x 求导得到

$$u'(x) = -\int_0^x yv(y)\,\mathrm{d}y + x(1-x)v(x) + \int_x^1 (1-y)v(y)\,\mathrm{d}y - x(1-x)v(x)$$
$$= -\int_0^1 yv(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 v(y)\,\mathrm{d}y,$$

于是再求导一次就得到 $u''(x) = -v(x)$. □

注 这里的格林函数是将某些类型的微分方程的边值问题转化为积分方程的一种方法. 本题中的 $K(x,y)$ 就是二阶常微分方程 $u''(x) = -v(x)$ 满足边界条件 $u(0) = u(1) = 0$ 的格林函数. 这方面的进一步内容可参见 [4, 6] 的有关章节.

习题 3732 应用对参数的微分法, 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$.

提示 以 a 或 b 为参数求导均可. 此外, 本题还可归结为下一题的泊松积分. □

习题 3733 (泊松积分) 应用对参数的微分法, 计算积分 $\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\,\mathrm{d}x$.

解 由 $|2a\cos x| \leqslant a^2 + \cos^2 x \leqslant a^2 + 1$ 可见, 当 $|a| \neq 1$ 时泊松积分为含参变量的常义积分. 利用积分等式

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\ln|a| + \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}x,$$

可见在 $|a| < 1$ 和 $|a| > 1$ 的两个泊松积分中, 只要计算出其中一个即可得到另一个.

记积分为 $I(a)$, 则 $I(0) = 0$. 当 $0 < |a| < 1$ 时通过积分号下对参变量求导得到

$$I'(a) = \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x + 2a}{1-2a\cos x+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{a} - \frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x+a^2}$$
$$= \frac{\pi}{a} - \frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)\cos x}$$
$$= \frac{\pi}{a} - \frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2}} = 0,$$

其中最后一步利用了 §4.2.1 的习题 2238(b) 的解 2 中计算得到的积分 (其中 $0 < |\varepsilon| < 1$)

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

于是当 $0 \leqslant |a| < 1$ 时 $I(a) = 0$. 从前面的关系式可由此推出当 $|a| > 1$ 时 $I(a) = 2\pi\ln|a|$. 对于 $|a| = 1$ 可利用 §4.4.1 的习题 2353(a) (欧拉积分) 得到 $I(\pm 1) = 0$. □

注 本题的泊松积分在前面已见到过. 在 §4.1.1 的习题 2192 给出了用黎曼和的极限的计算方法, §5.8.1 的习题 3049 的是用级数的逐项积分方法. 本题的解是第三种计算方法. 它们均见于 [11] 的第二卷中. 在该书的 314 小节的例题 14) 中给出了利用函数方程的第四种计算方法. (参见数学译林 第 22 卷 (2003) 第 4 期 278–281 页的内容.)

习题 3737 应用积分号下的积分法, 计算积分 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x \ (a > 0, b > 0)$.

解 1 将被积函数记为 $f(x)$. 它在 $x = 0, 1$ 处无定义, 但可看出 $f(+0) = 0$, 又可用洛必达法则得到 $f(1-0) = b - a$, 因此可将 $f(x)$ 连续延拓为 $[0,1]$ 上的连续函数, 从而本题为含参变量的常义积分.

以下不妨设 $0 < a < b$. 于是可将被积函数写为如下的积分:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\,\mathrm{d}y.$$

然后就可以用积分号下求积分的方法[1] 计算如下:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_a^b x^y\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

显然这个结果对于 $0 < a < b$ 之外的其他情况也都成立. □

解 2 本题也可以用积分号下求导数的方法来计算. 将 b 看成为参变量, a 固定, 积分记为 $I(b)$, 则就有

$$I'(b) = \int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b+1}.$$

然后利用 $I(a) = 0$ 即可得到

$$I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}. \quad \square.$$

解 3 (概要) 作代换 $t = \ln x$ 即可化为后面 §7.3.1 的习题 3789 中的弗鲁拉尼积分而得解. □

习题 3740 证明公式:

$$\int_0^x tJ_0(t)\,\mathrm{d}t = xJ_1(x),$$

其中 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 为阶数是 0 与 1 的贝塞尔函数 (参阅习题 3726).

解 只需要证明 $[xJ_1(x)]' = xJ_0(x)$. 由习题 3726 已知

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

于是即可计算公式右边的导数如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\pi x J_1(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\pi x\cos(\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^\pi \cos(\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + x\int_0^\pi \sin\varphi\sin(\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^\pi \cos(\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + x\int_0^\pi \cos[\varphi - (\varphi - x\sin\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi - x\int_0^\pi \cos\varphi\cos(\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \pi x J_0(x) + \int_0^\pi \cos(\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}(\varphi - x\sin\varphi)$$
$$= \pi x J_0(x) + \sin(\varphi - x\sin\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \pi x J_0(x). \quad \square$$

[1] 学过重积分的读者可看出这是两个二次积分的顺序交换, 成功的关键就在于其中之一容易计算.

§7.2 含参变量的广义积分. 积分的一致收敛性 (习题 3741–3783)

内容简介 与函数项级数的和函数的性质研究相似, 对于含参变量的广义积分也需要引入一致收敛的工具. 本节的前两小节相当于函数项级数中的 §5.4.1–§5.4.3, 第三小节则讨论含参变量广义积分的极限与连续.

7.2.1 含参变量的广义积分的收敛域 (习题 3741–3750)

这只是广义积分的敛散性的判定, 因此与 §4.4 的习题 2358–2383 中带有参数的部分习题没有差别. 由于《习题集》中将第五章无穷级数的内容安排在广义积分之后, 除了 §4.4.2 的习题 2368 与 2378 之外, 当时几乎没有使用过级数工具. 下面对此作一些补充.

只以含有唯一奇点 $+\infty$ 的广义积分为例来说明这个方法. 为此列出下列命题.

命题 7.1 对于广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 取满足条件 $a_0 = a$ 且严格单调递增趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$, 则该广义积分与无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.1}$$

之间在敛散性方面有下列关系:

(1) 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是对于满足上述条件的每一个数列 $\{a_n\}$, 相应的无穷级数 (7.1) 总是收敛的;

(2) 若被积函数 $f(x)$ 保号 (或当 x 充分大时保号), 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 (发散) 的充分必要条件是存在满足上述条件的某一个数列 $\{a_n\}$, 其相应的无穷级数 (7.1) 收敛 (发散).

证 (概要) 主要的根据有两点: (a) 从定义知道, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性是用函数 $F(A) = \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 当 $A \to +\infty$ 时的敛散性来定义的; (b) 无穷级数的敛散性是用其部分和数列的敛散性来定义的.

对于 (1), 只需要用函数极限理论中关于自变量 $x \to +\infty$ 的海涅归结原理即可 (在微积分教科书中至少有关于 $x \to a$ 的这个原理). 对于 (2), 则需要利用上述函数 $F(A)$ 单调, 而级数 (7.1) 的部分和数列这时也单调 (参见 §1.2.6 的习题 90 的证明). □

注 由 (1) 的逆否命题知道, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散的充要条件是存在满足上述条件的一个数列 $\{a_n\}$, 使得其相应的级数 (7.1) 发散.

同样可知, 若存在满足上述条件的一个数列 $\{a_n\}$, 其相应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 不可能绝对收敛.

对于被积函数不保号的情况, 仅仅某一个 $\{a_n\}$ 对应的级数 (7.1) 收敛是不足以保证相应的广义积分收敛的. 例如, 对于明显发散的广义积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{d}x,$$

取 $a_0 = 0, a_1 = 2\pi, a_2 = 4\pi, \cdots, a_n = 2n\pi, \cdots$, 则 (7.1) 就是每一项等于 0 的收敛级数.

习题 3747 利用与级数比较的方法研究积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 对于 $a = 0$ 的情况, 由于 $\frac{\cos x}{x} \sim \frac{1}{x}\ (x \to 0)$, 因此广义积分 $\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散. 根据有多个奇点的广义积分的收敛定义, 可见本题的广义积分发散.

对于 $a < 0$ 的情况, 则要看点 $x = -a$ 附近的被积函数的性态. 这时有两种情况.

若 $\cos a = 0$, 即对某个整数 n 有 $a = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$, 则用洛必达法则可得到 $\lim\limits_{x \to -a} \frac{\cos x}{x+a} = \sin a$, 可见 $x = -a$ 不是奇点. 这时的讨论与下面关于 $a > 0$ 的情况类似, 积分是收敛的.

若 $\cos a \neq 0$, 则这时的广义积分除了奇点 $+\infty$ 之外, 还有一个有限奇点 $x = -a$. 由于有 $\frac{\cos x}{x+a} \sim \frac{\cos a}{x-(-a)}\ (x \to -a)$, 因此广义积分发散.

对于 $a > 0$ 的情况, 可以用分部积分法得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x+a}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{7.2}$$

由此可见, 由于上式右边的广义积分的被积函数 $\left|\frac{\sin x}{(x+a)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+a)^2}$, 因此绝对收敛, 从而推出左边的广义积分也收敛. □

注 对 $a > 0$ 的情况, 除了 (7.2) 的分部积分法之外, 本题还可以用狄利克雷判别法, 或者积分第二中值定理.

在习题 3747 的上述解法中对于 $a = 0, a < 0$ 和 $a > 0$ 三种情况的讨论都没有用级数为工具, 因此与《习题集》原来的题意不一致. 从命题 7.1 之 (1) 可见, 以上三种情况的敛散性结论都可以用级数工具得到, 但要复杂得多. 下面的习题 3748 的情况则恰好相反, 这时用级数工具的解法特别有效, 而其它的敛散性判别法都难以使用.

习题 3748 利用与级数比较的方法研究积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^n \sin^2 x}$ 的敛散性.

解 将积分的被积函数记为 $f(x)$, 则有 $f(n\pi) = n\pi$. 这表明 $f(x)$ 的图像在 $x = n\pi$ 时到达第一象限的角平分线 $y = x$, 因此有 $\overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} f(x) = +\infty$ (参见本题的附图).

由于被积函数常正, 从命题 7.1 之 (2) 可见, 只需要找到满足条件的一个数列 $\{a_n\}$, 使其对应的级数 (7.1) 收敛或发散即可.

为此取 $a_0 = 0$, $a_1 = \pi, \cdots, a_k = k\pi, \cdots$, 然后将与该数列对应的级数 (7.1) 的通项记为 A_k. 这时对于积分 A_k 可得到如下的夹逼估计:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{(k-1)\pi\,\mathrm{d}x}{1 + (k\pi)^n \sin^2 x} \leqslant A_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^n \sin^2 x} \leqslant \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{k\pi\,\mathrm{d}x}{1 + [(k-1)\pi]^n \sin^2 x},$$

然后利用平移代换将两边的积分区间变为 $[0,\pi]$, 又利用 $\sin x$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 为偶函数, 于是可得到 A_k 的进一步估计如下:

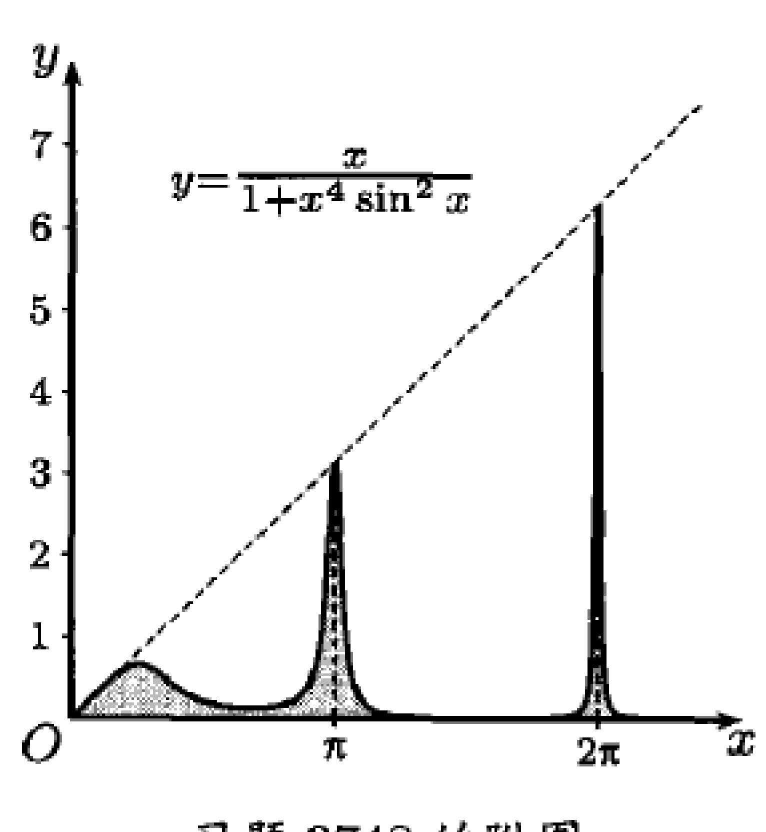
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(k-1)\pi\,\mathrm{d}x}{1+(k\pi)^n\sin^2 x}\leqslant A_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2k\pi\,\mathrm{d}x}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x}. \quad (7.3)$$

由于上式两边的积分的形式相似, 因此可以先估计以 p 为大参数的下列积分①:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+p^2\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1+(1+p^2)\tan^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\arctan(\sqrt{1+p^2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+p^2}}=O^*\Big(\frac{1}{p}\Big)\ \ (p\to+\infty).$$



习题 3748 的附图

然后将此结果用于 (7.3) 两边的积分, 从而得到无穷级数 (7.1) 的通项 A_k 的渐近性态为

$$A_k=O^*\Big(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}}\Big).$$

根据同号级数收敛性的比较判别法 II (见 §5.1 的表格), 可知本题的广义积分于 $\frac{n}{2}-1>1$, 即 $n>4$ 时收敛, 而于 $n\leqslant 4$ 时发散. □

注 在附图中作出了 $n=4$ 时的函数 $y=\frac{x}{1+x^4\sin^2 x}$ 的图像, 其下方与 Ox 轴之间的阴影区面积就是广义积分的值 ($n=4$ 时这个面积值为 $+\infty$). 无穷级数为本题的积分敛散性提供了有效的工具.

此外, $n>4$ 时本题为 §4.4.3 的习题 2384.1 提供了更为有力的例子, 即在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数 $f(x)$ 可以使得积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 同时还具有性质 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=+\infty$. 从命题 4.13 可见, 这时的 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

习题 3749 利用与级数比较的方法研究积分 $\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 的收敛性.

提示 本题的积分有无穷多个奇点, 可仿照习题 3748 的解法讨论. □

习题 3750 利用与级数比较的方法研究积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 将积分分拆如下:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x,$$

则右边第一个积分可从 $\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\sim\frac{1}{x^{n-1}}$ $(x\to+0)$ 看出当 $n-1<1$, 即 $n<2$ 时收敛, 否则发散.

---

① 这个积分计算使得对 (7.3) 的两边的估计变得很容易, 但并非是本质的. 实际上只要分别用 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的不等式 $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$ (见 §2.7.2 的习题 1290) 于 (7.3) 的两边即可导出本题的敛散性结论.

对上式右边的第二个积分用分部积分法，得到

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\bigg|_1^{+\infty} - n\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)}\,\mathrm{d}x,$$

可见当 $n+1>0$ 时，上式右边的第一项为有限数，而第二项的广义积分绝对收敛，因此等式左边的积分收敛.

在 $n+1\leqslant 0$ 时，对正整数 k，取正数 a_k, a_{k+1} 满足 $a_k+a_k^2=k\pi$，$a_{k+1}+a_{k+1}^2=(k+1)\pi$，然后估计积分

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x\right| = \int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{|\sin(x+x^2)|(1+2x)}{x^n(1+2x)}\,\mathrm{d}x.$$

由于右边积分的被积函数分母的导数在 $n+1\leqslant 0$ 时小于 0:

$$[x^n(1+2x)]' = nx^{n-1}+2(n+1)x^n = x^{n-1}[n+2(n+1)x] < 0 \ \ (x\geqslant 1),$$

因此可利用 $1<a_k<a_{k+1}$ 得到

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x\right| &= \int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{|\sin(x+x^2)|(1+2x)}{x^n(1+2x)}\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \frac{1}{a_k^n(1+2a_k)}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}\sin(x+x^2)\,\mathrm{d}(x+x^2)\right|\\ &\geqslant \frac{1}{3}\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,\mathrm{d}t\right| = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

由于上述估计对每一个正整数 k 成立，因此用广义积分的柯西收敛准则就知道积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ 发散.

综合以上知道，当 $-1<n<2$ 时本题的积分收敛，否则发散. □

注 就奇点 $+\infty$ 来说，可以证明当 $n+1>0$ 时的积分为条件收敛，而当 $n+1\leqslant 0$ 时，对每个正整数 k 在区间 $[a_k, a_{k+1}]$ 上的积分的绝对值大于常数 2/3，因此本题也没有必要用与级数比较的方法来进行讨论.

7.2.2 含参变量的广义积分的一致收敛性 (习题 3751–3771)

这里首先要介绍常用的一致收敛判别法. 除了最为基础的柯西一致收敛准则之外，使用最多的是魏尔斯特拉斯的强函数 (也称为优函数) 判别法. 此外，以下两个判别法也是重要的. 为简明起见只叙述关于无限奇点 $+\infty$ 情况的条件和结论. (它们是 §4.4.2 的命题 4.11 和 4.12 在一致收敛性方面的推广.)

命题 7.2 (阿贝尔一致收敛判别法) 设广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 (y_1,y_2) 内一致收敛，函数 $\varphi(x,y)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 和 $y\in(y_1,y_2)$ 时一致有界，且关于 x 单调，则积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 (y_1,y_2) 内一致收敛.

命题 7.3 (狄利克雷一致收敛判别法) 设积分 $\displaystyle\int_a^{c} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $c\geqslant a$ 和 $y\in(y_1,y_2)$ 时一致有界，函数 $\varphi(x,y)$ 关于 x 单调，且当 $x\to+\infty$ 时关于 $y\in(y_1,y_2)$ 一致收敛于 0，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 (y_1,y_2) 内一致收敛.

注 与命题 4.11 和 4.12 之后的几点补充相似, 上述两个判别法也是充分必要条件, 同时也可改写为对有限奇点的命题.

习题 3751 用肯定的方式陈述, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在给定区间 (y_1,y_2) 内不一致收敛表示什么?

解 先写出积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在给定区间 (y_1,y_2) 内一致收敛的定义为:

"对每一个 $\varepsilon>0$, 存在 $B=B(\varepsilon)$, 使得对每一个 $b\geqslant B$ 和每一个 $y\in(y_1,y_2)$ 成立

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon."$$

应用对偶法则 (参看 [32] 的 §1.4), 即将上述定义中的"每一个"换为"存在", 而将"存在"换为"每一个", 又将最后一式换为其反面, 就可得到积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在给定区间 (y_1,y_2) 内不一致收敛的定义为:

"存在 $\varepsilon_0>0$, 对每一个 B, 存在 $b\geqslant B$, 又存在 $y_0\in(y_1,y_2)$, 使得成立

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0." \quad \square$$

注 同类习题见于 §1.2.5 的习题 87, §1.7.1 的习题 668, §1.9 的习题 787 等.

习题 3752 证明: 若 1) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 2) 函数 $\varphi(x,y)$ 有界, 且关于 x 是单调的, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x$$

一致收敛 (在相应区间内).

注 这只是阿贝尔一致收敛判别法 (即命题 7.2) 的特例, 其中 f 与 y 无关. 其证明方法可参考该判别法在教科书中的证法. $\square$

习题 3753 证明: 一致收敛的积分

$$I=\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x \quad (0<y<1)$$

不存在其积分为收敛且与参数无关的强函数.

解 用反证法. 若存在与参数无关的强函数 $\varphi(x)$, 则从不等式

$$0\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\leqslant\varphi(x) \quad (0<y<1, 1\leqslant x<+\infty)$$

可见, 只要对每个 x 取参数 $y=\dfrac{1}{x}$, 就得到 $\varphi(x)\geqslant 1$, 而处处大于等于 1 的函数在 $[1,+\infty)$ 上的积分显然是发散的.

下面证明本题的含参变量的广义积分关于 $y\in(0,1)$ 是一致收敛的.

由于被积函数处处大于 0, 因此只要对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 找到 $M>1$, 使得对所有的 $y\in(0,1)$ 同时成立

$$\int_M^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{7.4}$$

作平移代换 $x-\dfrac{1}{y}=t$, 则得到

$$\int_M^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}t.$$

由此可见, 对于充分小的 $y\in(0,1)$, 积分下限小于 0. 这时可作如下估计:

$$\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}t=y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)\leqslant y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=y\sqrt{\pi}\tag{7.5}$$

(其中利用了习题 3776.1 的答案), 因此当 $0<y<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ 时, 无论取什么 $M>1$, 不等式 (7.4) 总是成立的.

对于 $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\leqslant y<1$, 则从 (7.5) 的推导可见, 不妨先取 $M_0>1$, 使得满足

$$\int_{M_0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u<\varepsilon,$$

然后只要取

$$M>M_0+\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon},$$

就有 $M-\dfrac{1}{y}\geqslant M-\dfrac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}>M_0$. 又利用 $y<1$, 则可得到

$$\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}t=y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u<\int_{M_0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u<\varepsilon.$$

综合以上可见本题的积分关于 $0<y<1$ 为一致收敛. □

习题 3755.1 证明: 狄利克雷积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(a) 在不含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛, (b) 在每一个包含数值 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上非一致收敛.

解 1 (a) 不妨只讨论 $0<a<b$ 的情况. 这时对 $M>0$ 的下式左边的积分作变量代换 $t=\alpha x$, 就有

$$\int_M^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_M^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\,\mathrm{d}(\alpha x)=\int_{\alpha M}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

由于狄利克雷积分收敛 (见 §4.4.2 的习题 2378), 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 b_0, 当 $b>b_0$ 时成立

$$\left|\int_b^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

综合以上, 可见只要取 $M_0=\dfrac{b_0}{a}$, 则当 $M>M_0$ 时, 对于所有的 $\alpha\in[a,b]$ 就有 $\alpha M>aM_0=b_0$, 从而成立

$$\left|\int_M^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

因此带有参数 $\alpha\in[a,b]$ 的狄利克雷积分一致收敛.

(b) 不妨证明稍微强一点的结论: 即狄利克雷积分对于参变量 $\alpha\in(0,b]$ $(b>0)$ 不一致收敛, 从而对于包含 $(0,b]$ 的任何参变量区间都不一致收敛.

用反证法. 若 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 对于 $\alpha\in(0,b]$ 一致收敛, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $M_0>0$, 使得当 $M>M_0$ 时, 对一切 $\alpha\in(0,b]$ 同时成立

$$\left|\int_M^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

在上述积分中作代换 $\alpha x=t$, 然后令 $\alpha\to 0$, 就得到 (其中利用 §5.4.5 的例题 3)

$$\lim_{\alpha\to 0}\left|\int_M^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x\right|=\lim_{\alpha\to 0}\left|\int_{M\alpha}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}x\right|=\frac{\pi}{2}\leqslant\varepsilon,$$

这与 ε 可取任意小相矛盾. □

解 2 (a) 用狄利克雷一致收敛判别法. 一方面, 对于 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 有

$$\left|\int_M^{M'}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x\right|=\frac{|\cos\alpha M-\cos\alpha M'|}{\alpha}\leqslant\frac{2}{a},$$

另一方面, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, 且与参变量 α 无关, 因此即知道一致收敛的结论成立.

(b) 将积分记为 $I(\alpha)$, 则有 $I(0)=0$. 对于 $\alpha>0$, 作变量代换 $\alpha x=t$ 就得到

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

因此对于 $b>0$, 函数 $I(\alpha)$ 在区间 $[0,b]$ 的左端点不连续, 从而用含参变量广义积分的连续性定理知道, 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,b]$ 上不一致收敛. 这也就同时推出积分在 $(0,b]$ 上不一致收敛. □

注 初学者易犯的一个常见错误是对于 $\alpha>0$ 作上述代换 $\alpha x=t$ 之后, 从等式

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

的右边积分与参变量 α 无关, 就认为左边的积分对所有的 $\alpha>0$ 一致收敛. 这也说明含参变量积分的一致收敛或不一致收敛的结论, 在作了与参变量有关的变量代换之后, 有可能发生变化.

习题 3755.3 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}$$

在区间 $1<\alpha<+\infty$ 上不一致收敛.

解 用反证法. 设本题的积分在 $\alpha\in(1,+\infty)$ 上一致收敛, 则根据一致收敛的柯西准则, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 M, 使得当 $b'>b>M$ 时对一切 $\alpha>1$ 成立不等式

$$\int_b^{b'}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

利用左边为含参变量 α 的常义积分, 令 $\alpha\to 1$, 就得到

$$\int_b^{b'}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon,$$

而这与积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=+\infty$ 相矛盾. □

注 本题的内容可以推广为一种方法 (或一个命题), 即对于含参变量 α 的广义积分来说, 若该积分在点 $\alpha=\alpha_0$ 处发散, 则在以该点为端点的开区间 (以及包含该点的任何区间) 上一定是非一致收敛的. 这里只要求被积函数连续即可.

习题 3760(a) 研究积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\,dx$ 在区间 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上的一致收敛性.

解 1 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ 收敛, 而 $e^{-\alpha x}$ 对于 x 单调, 且从 $0\leqslant e^{-\alpha x}\leqslant 1$ 知道它关于 $x\in[0,+\infty)$ 和 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致有界, 因此用阿贝尔一致收敛判别法 (命题 7.2) 就可推出积分关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛. □

解 2 由于对任意的 $0\leqslant b<b'$ 有

$$\left|\int_b^{b'}\sin x\,dx\right|=|\cos bx-\cos b'x|\leqslant 2,$$

而 $\frac{e^{-\alpha x}}{x}$ 关于 x 单调, 且从 $0<\frac{e^{-\alpha x}}{x}<\frac{1}{x}$ 可见, 当 $x\to+\infty$ 时, 它关于参变量 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛于 0, 因此用狄利克雷一致收敛判别法 (即命题 7.3) 就可推出积分关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛. □

习题 3768 研究积分 $\int_0^1\sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^n}$ 在区间 $0<n<2$ 上的一致收敛性.

提示 注意当 $n=2$ 时

$$\int_0^1\sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}=-\cos\frac{1}{x}\Big|_{+0}^1=-\cos 1+\lim_{x\to+0}\cos\frac{1}{x}$$

的极限不存在, 因此广义积分发散. 以下可仿照习题 3755.3 的解法证明本题的积分在 $0<n<2$ 上不一致收敛. □

习题 3769 研究积分 $\int_0^2\frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$ 在区间 $|\alpha|<\frac{1}{2}$ 上的一致收敛性.

提示 $x=1,2$ 为奇点, $x=0$ 在 $-\frac{1}{2}<\alpha<0$ 时也是奇点. 可将 $[0,2]$ 分拆为几个区间, 每个区间上的积分最多只有一个奇点, 然后分别用强函数判别法. □

7.2.3 含参变量的广义积分的极限与连续 (习题 3772–3783)

本小节的习题实际上已经是一致收敛性的应用, 但其中有不少习题可以用较简单的方法求解.

习题 3772 在下式

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

中把极限移到积分号内合理吗?

解 一方面可直接计算得到在 $\alpha>0$ 时有

$$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx=-e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

另一方面则有

$$\int_0^{+\infty}\left(\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx=0,$$

因此将求极限与积分交换顺序是不合理的. □

注 由含参变量广义积分的连续性定理可推出, 对任何 $a>0$, 含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx$ 在区间 $[0,a]$ 或者 $(0,a]$ 上都是不一致收敛的.

在《习题集》中的习题 3754(b) 就是证明本题的积分在 $[0,b]$ 上不一致收敛, 然而在连续性定理中的一致收敛只是充分性条件, 因此这不能作为本题的极限不可移到积分号下的根据.

习题 3774.1 证明: 若 $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上绝对可积, 则存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

解 本题的条件只需要 $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积就足够了. 这时在有界区间 $[a,A]$ 上可用牛顿–莱布尼茨公式得到 $\int_a^A f'(x)\,dx=f(A)-f(a)$, 然后令 $A\to+\infty$, 由于其左边的极限存在即可推出存在 $f(+\infty)$. □

习题 3774.2 证明: 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上绝对可积, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0.$$

解 (本题是 §5.4.5 的黎曼引理 (即命题 5.9) 的推广, 其中 n 可改为连续参数.) 对给定的 $\varepsilon>0$, 由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上绝对可积, 存在 M, 使得成立

$$\int_M^{+\infty}|f(x)|\,dx<\varepsilon.$$

于是有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx\right|&\leqslant\left|\int_0^{M}f(x)\sin nx\,dx\right|+\int_M^{+\infty}|f(x)|\,dx\\&<\left|\int_0^{M}f(x)\sin nx\,dx\right|+\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 对右边第一项用黎曼引理, 知道其极限为 0, 因此就从上式得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx\right|\leqslant\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 可取任意小, 因此得到所求的结论. □

习题 3775 (控制收敛定理) 证明: 若 (1) 在每一个有限区间 (a,b) 内 $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$ $(y\to y_0)$; (2) $|f(x,y)|\leqslant F(x)$, 其中 $\int_a^{+\infty}F(x)\,dx<+\infty$, 则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\,dx.$$

解 由条件 (1) 可见上式右边积分号下的极限可简单地记为 $f(x,y_0)$. 从条件 (2) 可见积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\,dx$ 绝对收敛. 对于参变量 y 的范围不妨设为点 y_0 的一个邻域 $O_\delta(y_0)$. 由条件 (2) 可见, 对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得成立

$$\int_M^{+\infty}|F(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由此可知, 当 $y\in O_\delta(y_0)$ 时同时成立

$$\int_M^{+\infty} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x < \frac{1}{3}\varepsilon \text{ 及 } \int_M^{+\infty} |f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

然后即可估计如下:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_a^{M} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{M} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\quad + \int_M^{+\infty} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x + \int_M^{+\infty} |f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^M |f(x,y)-f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\varepsilon.\end{aligned}$$

利用 $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$, 存在 $0<\eta<\delta$, 使得当 $|y-y_0|<\eta$ 时, 上式右边的第一项也小于 $\frac{1}{3}\varepsilon$, 从而左边的积分在这时小于 ε, 这就是所要求证的结论. □

注 若假设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times O_\delta(y_0)$ 上二元连续, 则就与一般教科书中的含参变量广义积分的极限定理或连续性定理没有差别了. 这时题设的一致收敛条件是多余的, 代替它的是用含参变量常义积分的极限或连续性定理.

习题 3776.1 (欧拉–泊松积分) 利用积分号与极限号互换, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]\mathrm{d}x.$$

解 记函数序列 $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 则 (仿照 §1.2.3 的习题 69 之解 2) 用平均值不等式就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_n(x)} &= 1\cdot\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \left[\frac{1+n\left(\dfrac{n+x^2}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{f_{n+1}(x)},\end{aligned}$$

因此函数列 $\{f_n(x)\}$ 单调递减收敛于 e^{-x^2}. 用 §5.8.2 的命题 5.14 之推论, 就有

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x.$$

在右边的积分中令 $x=\sqrt{n}\tan\theta$, 然后用沃利斯公式就得到所求的答案:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\tan^2\theta)^{-n}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2(n-1)}\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (n\to\infty).\end{aligned}$$ □

注 由于本题的积分在概率统计中的重要地位, 因此常称为概率积分, 此外还称为高斯积分等. 这个积分有多种计算方法. 下面列举文献中常见的几种主要方法.

(a) 将习题 3775 (控制收敛定理) 中的 y 改为 $1/n$, $y\to y_0$ 改为 $n\to\infty$, 则也成立相应的结论. 这时该题中的条件 (1) 由 §5.4.2 的习题 2760(a) 提供, 而条件 (2) 可从 $f_n(x)\leqslant f_1(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 得到, 其余计算与上述解法相同.

(b) 先证明一个简单不等式 $1-x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \geqslant 0)$, 然后用夹逼方法, 见 [11] 第二卷第 492 小节之 2°.

(c) 在 [32] 的例题 12.3.7 中的方法来自于美国数学月刊 第 63 卷 (1956), 35–37 页.

(d) 在数学译林 第 24 卷 (2005) 的第 1 期的 92–94 页又刊登了一个新的证明, 但本质上与上面的几种方法差别不大.

(e) 在 [11] 第二卷 522 小节之 3° 中的方法即是在 §7.3.2 中的习题 3803.

(f) 公认为最简单的计算方法是用二重广义积分的方法, 见 §8.9 的习题 4175.

习题 3776.2 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界, 证明:

$$\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = f(0).$$

解 (概要) 若本题的积分上限改为 1, 则从 §7.1.1 的习题 3712 的解 2 就得到①

$$\lim_{y\to+0}\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

因此这两题在本质上没有多少差别, 只是在这里要证明

$$\lim_{y\to+0}\int_1^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

(其中积分下限改为任意的 $\delta>0$ 都成立). 由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界, 直接计算即可. 若要将习题 3712 的解 2 改写成本题的解也是不难的. □

习题 3777.1 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}$.

提示 将积分分拆如下:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1} + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}.$$

然后利用右边每一个积分的被积函数关于 n 单调, 因此可以用 §5.8.2 的命题 5.14 之推论 (它对于常义积分和各种类型的广义积分都是有效的) 分别求两个积分的极限. □

习题 3777.2 证明: 积分 $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\,\mathrm{d}x$ 是参变量 α 的连续函数.

提示 对积分作平移代换 $x-\alpha=t$ 即可求出 $F(\alpha)$ 的表达式. □

习题 3781 研究函数 $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 在 $0<\alpha<2$ 内的连续性.

解 由于被积函数在积分区间 $[0,\pi]$ 上关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为偶函数, 因此 (§4.2.5 的命题 4.9 可推广到广义积分) 就有

$$F(\alpha)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

再将上式右边的积分作分拆, 得到

① 且可看出除非 $f(0)=0$, 本题的极限 $y\to 0$ 应当修改为 $y\to+0$.

$$\frac{1}{2}F(\alpha)=\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x. \tag{7.6}$$

由于右边第二个常义积分是 α 的连续函数, 因此只要讨论右边的第一个积分.

由于连续性是函数的局部性质, 因此只要任取点 $\alpha_0\in(0,2)$, 证明上述积分在该点连续即可. 取 $\delta>0$ 充分小, 使得 $[\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta]\subset(0,2)$, 则在 $x\in[0,1]$ 和 $\alpha\in[\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta]$ 时就有

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0+\delta-1}}.$$

由于 $\alpha_0+\delta-1<1$, 因此积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha_0+\delta-1}}$ 收敛. 于是用上式右边的函数为强函数就知道 (7.6) 右边的第一个积分在 $\alpha\in[\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta]$ 上一致收敛, 从而于点 α_0 连续. □

注　积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 仅当 $\alpha\in(1,2)$ 时为广义积分, 否则为常义积分, 为简明起见以上解法中不对此作区分.

习题 3782 研究函数 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 在 $0<\alpha<1$ 内的连续性.

提示　本题的含参变量积分有无限多个奇点, 这时一致收敛性的定义本身都需要另行考虑, 更谈不上使用平时只对单个奇点提供的一致收敛性判别法或连续性定理等工具. 然而通过将 $F(\alpha)$ 改写为下列无穷级数的表达式后可以克服这个困难 [5]:

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}\int_0^\pi\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sin^\alpha x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\int_0^\pi\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sin^\alpha x}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

以下的讨论从略. □

§7.3 广义积分号下的微分法和积分法 (习题 3784–3840)

内容简介 本节将一般性的计算题归入第一小节, 将几个著名的含参变量的广义积分的习题集中在一起作为第二小节, 又将一些应用题列为第三小节.

在以下的表格中列出几个重要的广义积分, 其中除第一个之外, 均将在第二小节中作出证明. 表格中的这些积分在今后的许多习题计算中均可直接引用.

3789 弗鲁拉尼积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,b>0),$$

其中 $f(x)$ 连续, 积分 $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 对任何 $A>0$ 收敛;

3803 欧拉–泊松积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

3812.1 狄利克雷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$;

3825 拉普拉斯积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|a|}$; (7.7)

3826 拉普拉斯积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|a|}\operatorname{sgn}a$;

3830 菲涅尔积分

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

下面列出在积分号下求导和求积的主要命题.

命题 7.4 (积分号下求导定理) 若 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f'_y(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty$, $y_1<y<y_2$ 内连续, 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\displaystyle\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 (y_1,y_2) 上一致收敛, 则在 $y\in(y_1,y_2)$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\ \text{(莱布尼茨法则)}.$$

命题 7.5 (积分顺序交换的第一定理) 若 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$ 内连续, 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y\in[c,d]$ 上一致收敛, 则有

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

命题 7.6 (积分顺序交换的第二定理) 若 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y<+\infty$ 内连续, 且满足以下三个条件:

(1) 以 y 为参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y\in[c,+\infty)$ 内的任意有限区间上一致收敛;

(2) 以 x 为参变量的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 内的任意有限区间上一致收敛;

(3) 在 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y$ 之中至少有一个收敛;

则有

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

对于 f 为非负连续函数的情况, 比命题 7.6 的应用要方便得多的是下列推论.

推论 若 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上非负连续, 且以下两个含参变量积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \ \ 和\ \ \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

分别在 $x\geqslant a$ 和 $y\geqslant c$ 时连续, 则有

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

7.3.1 含参变量的广义积分的计算 (习题 3784–3802, 3804–3811, 3812.2–3824, 3827–3829, 3831–3834)

习题 3784 利用公式 $\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}\ (n>0)$ 计算积分

$$I=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,\mathrm{d}x\ \ (m\ 为正整数).$$

解 本题的参数 n 的变化范围为 $(0,+\infty)$. 利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}x^{n-1}=x^{n-1}\ln x,$$

可见若求导与积分可交换顺序, 也就是可以在积分号下求导, 则只要在所给的公式两边对 n 求导, 即可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial n}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n^2}. \tag{7.8}$$

用数学归纳法可以证明, 如果左边对 n 的任意次求导均可以与积分运算交换而在积分号下进行, 则就可以对每一个正整数 m 得到

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}n^m}\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

于是余下的问题就是验证上述运算的合理性.

由于可求导为函数的局部性质, 因此只要对任意一点 $n_0>0$ 来讨论. 取 $\delta>0$ 充分小, 使得邻域 $O_\delta(n_0)\subset(0,+\infty)$, 则当参变量 $n\in O_\delta(n_0)$ 时, 在下列不等式

$$|x^{n-1}\ln x|\leqslant|x^{n_0-\delta-1}\ln x|=-x^{n_0-\delta-1}\ln x\ \ (x\in(0,1])$$

中, 右边的函数在 $(0,1]$ 上可积, 因此可用作为强函数, 从而保证了 (7.8) 在 $m=1$ 时的合理性. 对于 $m>1$ 时的证明是类似的, 从略. □

注　这里要强调的是, 在积分号下求导数定理 (即命题 7.4) 中, 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f_y'(x,y)\,\mathrm{d}x$$

能够成立的关键条件是上式右边的含参变量积分的一致收敛性. 这一点与函数项级数的逐项求导定理是相同的 (参看 §5.4.4 的习题 2792 的注以及 §5.4.5 的 1(3) 中的说明).

此外, 从 §4.2.6 的习题 2286 及其注, 可见本题的积分也可以用递推方法来计算.

习题 3785 利用公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}\ (a>0)$$

计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^{n+1}}\ (n\ 为正整数).$$

提示　本题的积分与习题 3784 类似, 除了用题中提出的对含参变量积分的微分法之外, 还可用分部积分法导出递推公式后求出答案. 此外, 用代换 $x=\sqrt{a}\tan\theta$ 的计算方法可能更为便捷 (参见 §7.2.3 的习题 3776.1 的计算的最后部分). □

习题 3786 证明: 狄利克雷积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

当 $\alpha\neq 0$ 时有导数, 但是不能利用莱布尼茨法则来求它.

解　作代换 $\alpha x = y$, 利用 $I(1)=\frac{\pi}{2}$ (见 §5.4.5 的例题 3 或表格 (7.7) 的第三个积分), 并考虑到 $I(\alpha)$ 是奇函数, 就得到

$$I(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \alpha>0,\\ 0, & \alpha=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \alpha<0,\end{cases}$$

也就是 $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$. 由此可见当 $\alpha\neq 0$ 时有 $I'(\alpha)=0$. 然而若用莱布尼茨法则, 即积分号下求导, 则所得的积分

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)\right]\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$$

对每一个 α 都是发散的. □

注　与此相似的是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的和函数, 它于 x 不等于 2π 的整数倍的所有点处可导, 但不能通过逐项求导得到 (见 §5.4.5 的例题 1). 这说明一致收敛性只是保证含参变量的广义积分 (或函数项级数的和函数) 可导以及莱布尼茨法则成立的充分性条件. 同时这也表明, 能否在积分号下求导的关键是看 $\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)\,\mathrm{d}x$ 的性质如何.

习题 3788 从等式

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}\,dy$$

出发, 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx\ \ (a>0,b>0).$$

解 1　不妨设 $0<a<b$. 将所给的等式代入上述积分并交换积分顺序就得到

$$\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}\,dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dx. \tag{7.9}$$

由于上式右边的内层积分在 $0<a<y<b$ 时为

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dx=-\frac{1}{y}e^{-xy}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{y},$$

因此即可计算得到 (7.9) 的积分值为 $\ln\dfrac{b}{a}$.

余下的问题就是 (7.9) 中的顺序交换是否合理. 为此只要验证命题 7.5 中的条件, 即含参变量 y 的广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dx$ 在 $y\in[a,b]$ 上是一致收敛的. 由于在 $y\in[a,b]$ 时有 $e^{-xy}\leqslant e^{-ay}$ 成立, 因此用 e^{-ay} 为强函数即可. □

注　在写出本题的上述解时, 与前面的习题 3784 的解一样, 我们将一致收敛条件的验证放到最后. 这是因为在很多类似的问题中, 我们往往先尝试积分号下求导或求积的方法是否能够奏效. 只有当这样的方法能够成功时才需要去检验条件是否满足. 因此这两题的解法中都按照这样的思路来写.

解 2 (概要)　本题的积分也是下一个习题 3789 的弗鲁拉尼积分的特例, 因此可以直接用该题中的公式, 或者用该题中的方法求解. □

习题 3789 (弗鲁拉尼积分) 证明公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}\ \ (a>0,b>0),$$

式中 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 对 $A>0$ 存在积分 $\int_A^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\,dx$.

解　取 $\delta>0$, 则以下运算中的积分均存在, 于是有

$$\begin{aligned}\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx&=\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\,dx-\int_\delta^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\,dx\\&=\int_{a\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{b\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt\\&=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\,dt=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}\,dt=f(\xi)\ln\frac{b}{a},\end{aligned}$$

其中 ξ 在 $a\delta$ 和 $b\delta$ 之间. 令 $\delta\to+0$, 由于 $f(x)$ 于点 $x=0$ 处右连续, 因此就得到所求的公式. □

注　弗鲁拉尼积分的介绍见 [11] 第二卷的 495 小节[①], 其中除本题的情况之外, 还有以下两种情况:

① 较为详细介绍弗鲁拉尼积分的历史及其有关文献和发展的论文有: Juan Arias-de-Reyna, On the theorem of Frullani, Proceedings of AMS, v. 109, no.1 (1990) 165–175.

(1) 若将本题中积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\ (A>0)$ 有意义的条件改为存在 $f(+\infty)$, 则公式为

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}\ \ (a>0,b>0);$$

(2) 在情况 (1) 的条件修改之后, 若又将本题的 $f(x)$ 的连续性条件削弱为在 $(0,+\infty)$ 上连续, 但存在积分 $\int_0^A\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\ (A>0)$, 则公式为

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(+\infty)\cdot\ln\frac{a}{b}\ \ (a>0,b>0).$$

以上两种情况的证明与习题 3789 中的证明是类似的. 取 $\Delta>\delta>0$, 对于情况 (1), 从积分 $\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 开始; 对于情况 (2), 则从积分 $\int_0^\Delta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 开始.

习题 3792 利用弗鲁拉尼公式计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0,b>0).$$

解 1 令 $f(x)=\arctan x$, 则有 $f(+\infty)=\frac{\pi}{2}$, 用上题的注中的情况 (1) 就知道答案为 $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. □

解 2 将所要求的积分改写为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan bx\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan ax\right)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

则可取 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x$, 并在区间 $[A,+\infty)\ (A>0)$ 上将 $\frac{f(x)}{x}$ 与可积函数 $\frac{1}{x^2}$ 作比较, 从洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1,$$

可见满足习题 3789 中的条件, 因此答案为 $f(0)\ln\frac{a}{b}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. □

解 3 利用

$$\arctan ax-\arctan bx=\int_b^a\frac{x\,\mathrm{d}y}{1+x^2y^2},$$

即可用积分号下求积分的方法计算如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^a\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}=\int_b^a\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y^2}\\&=\int_b^a\left(\frac{1}{y}\arctan xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\pi}{2}\int_b^a\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

余下的是验证含参变量 y 的广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y^2}$ 关于 $y\in[a,b]$ (或 $y\in[b,a]$) 的一致收敛性 (即用命题 7.5). 为此用 $\frac{1}{1+a^2x^2}$ 为强函数即可. □

习题 3794 利用对参数的微分法计算积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \ (\alpha>0,\beta>0).$$

解 1 (概要) 将积分看成为 α 的函数, 记为 $I(\alpha)$, 而将 $\beta>0$ 作为固定的参数, 则可验证命题 7.4 的条件满足, 从而可在积分号下对 α 求导得到

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2\right]dx\\&=-2\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)\cdot e^{-\alpha x}\,dx\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(\alpha+\beta)x}-e^{-2\alpha x}}{x}\,dx,\end{aligned}$$

然后即可用弗鲁拉尼积分公式 (或习题 3788 的答案) 得到 $I'(\alpha)$ 的表达式. 再利用 $I(\beta)=0$, 即可求出 $I(\alpha)$. □

解 2 用分部积分法就有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx&=-\frac{(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x})^2}{x}\Big|_0^{+\infty}\\&\quad+2\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)\cdot(-\alpha e^{-\alpha x}+\beta e^{-\beta x})\,dx\\&=2\alpha\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(\alpha+\beta)x}-e^{-2\alpha x}}{x}\,dx+2\beta\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(\alpha+\beta)x}-e^{-2\beta x}}{x}\,dx.\end{aligned}$$

对最后的两个积分分别用弗鲁拉尼积分提供的公式就得到答案为 $2\alpha\ln\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}+2\beta\ln\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}$. □

习题 3800 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,dx$.

解 若 $\beta=0$, 则积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{x^2}\,dx$ 发散. 因此只需讨论 $\beta\neq 0$. 这时用比较判别法即可知广义积分收敛. 为简明起见, 先限制 $\alpha\geqslant 0$, $\beta>0$. 以下分几种情况.

(1) 对于 $\beta>0$, $\alpha=0$, 则可作代换 $x=\beta t$ 得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x^2}{\beta^2+x^2}\,dx=\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\beta t)^2}{1+t^2}\,dt=\frac{2\ln\beta}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}+\frac{2}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$

上式右边的第一项为 $\dfrac{\pi\ln\beta}{\beta}$, 对第二项则可将其中的积分分拆为在区间 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上的两个积分, 并对其后一个积分作代换 $t=1/\tau$, 然后将 τ 改记为 t, 这样就得到:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt&=\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt\\&=\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt+\int_1^0\frac{-\ln\tau}{1+\frac{1}{\tau^2}}\left(-\frac{1}{\tau^2}\right)d\tau\\&=\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt=0.\end{aligned}$$

(参见 §4.4.1 的习题 2344 的解 2 及其注.) 于是积分值为 $\dfrac{\pi\ln\beta}{\beta}$.

(2) 以下讨论 $\beta>0$ 和 $\alpha>0$ 的情况. 将积分看成为 α 的函数, 记为 $I(\alpha)$, 而将 $\beta>0$ 作为固定的参数, 则可用命题 7.4 证明 $I(\alpha)$ 可在积分号下求导. 为此先观察积分号下求导得到的积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}\,\mathrm{d}x,$$

可见对任何 $\alpha_0>0$, 只要取 $0<\alpha_1<\alpha_0<\alpha_2$, 就可以用强函数 $\dfrac{2\alpha_2}{(\alpha_1^2+x^2)(\beta^2+x^2)}$ 证明上述积分在 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 上一致收敛. 由于 α_0 的任意性, 即得到

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\,\mathrm{d}x}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}\\&=\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{\alpha^2+x^2}-\frac{1}{\beta^2+x^2}\Big)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\Big(\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{x}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\arctan\frac{x}{\beta}\Big)\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\Big)=\frac{\pi}{\beta(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

注意到在以上推导过程中要求 $\alpha\neq\beta$, 然而由于 $I'(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 因此最后的结果对于 $\alpha=\beta$ 仍然有效.

由 $\alpha>0$ 时的 $I'(\alpha)$ 的上述表达式即可积分得到

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta)+C(\beta),$$

其中待定常数 $C(\beta)$ 需要通过计算 $I(\beta)$ 来确定. 作代换 $x=\beta\tan\theta$ 就有

$$\begin{aligned}I(\beta)&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\beta^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\beta^2\sec^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}-\frac{2}{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}-\frac{2}{\beta}\cdot\Big(-\frac{\pi}{2}\ln 2\Big)=\frac{\pi}{\beta}\ln(2\beta).\end{aligned}$$

其中最后一个积分可以作代换变成 §4.4.1 的习题 2353(a) (欧拉积分).

由此可见 $C(\beta)=0$, 于是当 $\beta>0$ 和 $\alpha>0$ 时, $I(\alpha)=\dfrac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta)$.

综合以上讨论, 并去掉 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 的限制, 就得到答案: $\beta=0$ 时积分发散, $\beta\neq 0$ 时积分值为 $\dfrac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)$. □

注 由以上结果可见, $I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 连续. 若先建立这个事实, 就可利用 $I(0)$ 的值求 $I(\alpha)$, 从而不必计算 $I(\beta)$. 然而由于积分在 $\alpha=0$ 时多了一个奇点 $x=0$, 在连续性讨论中需要将积分分拆为 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上的两个积分后分别讨论 (或用他法).

习题 3807 利用欧拉–泊松积分求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 1 将积分记为 $I(a)$. 利用强函数方法可以验证在 $a>0$ 时在积分号下对参变量 a 求导的条件满足 (细节从略), 于是就有

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\cdot\left(-\frac{2a}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

对上式右边的积分作代换 $x=\dfrac{a}{t}$, 于是就有

$$I'(a)=-2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}\,\mathrm{d}t=-2I(a),$$

这样就得到在 $a>0$ 时的表达式 $I(a)=C\mathrm{e}^{-2a}$, 其中 C 待定.

由于欧拉–泊松积分提供了 $I(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, 因此若 $I(a)$ 于点 $a=0$ 处右连续, 则就可确定 $C=I(0)$, 从而得到

$$I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2a}.$$

然而 $f(x,a)=\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}$ 在 $x>0,a=0$ 时等于 e^{-x^2}, 当 $x\to+0$ 时极限为 1, 而在 $a>0,x=0$ 时只能连续延拓为 0, 因此二元函数 $f(x,a)$ 不可能连续延拓到点 $x=0,a=0$ 处. 这样就不能用普通的连续性定理来证明 $I(a)$ 于点 $a=0$ 处右侧连续.

为此我们将直接证明①

$$\lim_{a\to+0}I(a)=I(0).$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$ 将 $|I(a)-I(0)|$ 分拆估计如下:

$$\begin{aligned}|I(a)-I(0)|&=\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}}-1)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant 2\int_0^{\delta}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\left|\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}}-1)\,\mathrm{d}x\right|,\end{aligned}$$

其中设所取的 $\delta>0$ 已使得右边第一项小于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$. 然后可看出右边第二项的积分于 $a=0$ 时等于 0, 且关于 $a\in[0,+\infty)$ 一致收敛, 因此是 a 的连续函数, 从而存在 $\eta>0$, 使得当 $0<a<\eta$ 时, 该积分的绝对值也小于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$. 这样就证明了 $I(a)$ 于 $a=0$ 处右侧连续. □

解 2 根据 §4.4.1 的习题 2355, 当 $a>0,b>0$ 时有

$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)\mathrm{d}x,$$

其中假定等式左端的积分有意义. 于是本题的积分可计算如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x&=\mathrm{e}^{2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+4a)}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$ □

解 3 与其用习题 2355 的公式, 不如学习其中的方法. 为此先作代换 $x=\dfrac{a}{t}$, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}\cdot\frac{a}{t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

① 这曾被某高校用为考研题.

将最后一个积分中的指数函数改写为

$$e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} = e^{-2a} \cdot e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2},$$

然后对该积分作变量代换 $u = x - \frac{a}{x}$. 当 x 从 0 递增至 $+\infty$ 时, u 从 $-\infty$ 递增至 $+\infty$, $du = (1 + \frac{a}{x^2})\,dx$, 于是得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx = \frac{e^{-2a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{e^{-2a}}{2}\cdot\sqrt{\pi}. \quad \square$$

习题 3808 利用欧拉–泊松积分, 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx \ (\alpha > 0, \beta > 0)$.

提示 用分部积分法计算即可. □

习题 3809 利用欧拉–泊松积分, 求积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx \ (a > 0)$.

解 将积分看成为参变量 b 的函数, 记为 $I(b)$, 固定 $a > 0$.

由于积分 $I(b)$ 的被积函数有强函数 e^{-ax^2}, 因此 $I(b)$ 对 b 在任意区间上一致收敛, 从而是 b 的连续函数. 当 $b = 0$ 时可利用欧拉–泊松积分求得

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

若积分 $I(b)$ 对 b 求导可以在积分号下进行, 则就有

$$\begin{aligned} I'(b) &= \int_0^{+\infty}\left(e^{-ax^2}\cos bx\right)'_b dx \\ &= \int_0^{+\infty}\left(-xe^{-ax^2}\sin bx\right)dx \\ &= \frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}I(b). \end{aligned}$$

这是一阶常微分方程. 将等式 $I'(b) + \frac{b}{2a}I(b) = 0$ 乘以 $e^{\frac{b^2}{4a}}$, 就得到

$$e^{\frac{b^2}{4a}}[I'(b) + \frac{b}{2a}I(b)] = \frac{d}{db}[e^{\frac{b^2}{4a}}I(b)] = 0,$$

因此就可得到 $I(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$, 其中 C 待定. 用 $b = 0$ 代入可见 $C = I(0)$. 利用前面已经求出的 $I(0)$, 即得到 $I(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

余下的问题是前述计算 $I'(b)$ 的合理性. 由于对积分 $\int_0^{+\infty}\left(-xe^{-ax^2}\sin bx\right)dx$ 只要用 xe^{-ax^2} 为强函数就可知道此积分对于 b 在任何区间上一致收敛, 从而根据积分号下求导的定理 (即命题 7.4) 知道, 这个积分等于 $I'(b)$. □

注 初学者在解本题时的一个常见错误是只验证积分 $I(b)$ 的一致收敛性, 并从 $I'(b) = -\frac{b}{2a}I(b)$ 认为不必检验命题 7.4 的主要条件了, 这是将因果颠倒的错误.

习题 3812.2 积分正弦被定义为

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

函数 $y = \mathrm{Si}(x)$ 的图像大致具有怎样的形状?

提示　这是奇函数, 其 $x \geqslant 0$ 的部分见 §4.11 的习题 2545 的附图及其说明. □

习题 3813 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \cos\beta x}{x^2}\,\mathrm{d}x\ (\alpha > 0)$.

解　用分部积分法并利用表格 (7.7) 中的几个著名积分, 即有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \cos\beta x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \cos\beta x)\Big|_0^{+\infty}\\ &\quad + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}(-2\alpha x\mathrm{e}^{-\alpha x^2} + \beta\sin\beta x)\,\mathrm{d}x\\ &= -2\alpha\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x + \beta\int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\sqrt{\alpha\pi} + \frac{\pi}{2}|\beta|. \quad \square\end{aligned}$$

习题 3818 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 \mathrm{d}x$.

解　记积分为 $I(\alpha)$, 则由于它是 α 的奇函数, 又可以用变量代换 $t = \alpha x$ 将其简化, 从而有 $I(\alpha) = I(1)\alpha^2\operatorname{sgn}\alpha = I(1)\alpha|\alpha|$, 于是只要计算 $I(1)$. 利用恒等式 $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$, 即可用分部积分法计算如下:

$$\begin{aligned}I(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}\sin^3 x\Big|_{+0}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\Big(\frac{3}{4}\cos x - \frac{3}{4}\cos 3x\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{3}{8x}(\cos x - \cos 3x)\Big|_{+0}^{+\infty} + \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}(-\sin x + 3\sin 3x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{8}\Big(-\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + 3\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x}\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

于是得到 $I(\alpha) = \dfrac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$. □

注　对于形状为 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^m x}{x^n}\,\mathrm{d}x$ 的广义积分, 其中 m, n 为正整数, 在该积分收敛的前提下, 都可以用类似的方法计算.

习题 3822 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (k \geqslant 0, \alpha > 0, \beta > 0)$.

解 (概要)　此题有多种解法, 这里推荐的方法是先用积化和差公式

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

且不妨设 $\alpha \geqslant \beta$, 并记 $a = \alpha - \beta < b = \alpha + \beta$, 于是就有

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x}{x} = \int_a^b \sin tx\,\mathrm{d}t,$$

从而所要求的积分就变成为

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{x}\, \mathrm{d}x \int_a^b \sin tx\, \mathrm{d}t.$$

然后用命题 7.5 交换积分顺序, 并利用 §7.3.2 的习题 3812.1 中的解 2 的结果. □

习题 3828 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x.$

解 1 (概要) 将积分分拆如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{[(1+x^2)-x^2]\cos ax}{(1+x^2)^2}, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, \mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos ax}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

上述最后一式的第一个积分为表格 (7.7) 中的拉普拉斯积分, 第二个积分可以通过分部积分归结为拉普拉斯积分. □

解 2 (概要) 将积分记为 $I(a)$, 则可以用命题 7.4 在积分号下求导得到 $I'(a)$, 并通过分部积分将它归结为拉普拉斯积分, 然后再积分得到 $I(a)$. □

解 3 (概要) 不妨先设 $a > 0$. 利用拉普拉斯积分可以得到含有一个新的参变量 $b > 0$ 的如下积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} \frac{\cos abt}{t^2+1}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-ab},$$

将其两边对 b 求导 (其中在积分号下求导需要验证命题 7.4 的条件满足), 即得到

$$-2b\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2b^2}\mathrm{e}^{-ab} - \frac{a\pi}{2b}\mathrm{e}^{-ab}.$$

最后用 $b = 1$ 代入即得到 $a > 0$ 时的积分值等于 $\dfrac{\pi}{4}(1+a)\mathrm{e}^{-a}$. 由于原积分为 a 的偶函数, 因此答案为 $\dfrac{\pi}{4}(1+|a|)\mathrm{e}^{-|a|}$. □

习题 3829 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2+2bx+c}\, \mathrm{d}x \ \ (a > 0, ac - b^2 > 0).$

提示 引用表格 (7.7) 中的两个拉普拉斯积分的结果就可以计算习题 3829 及 (可转化为) 以下形状的两类积分 (在收敛的前提下):

$$\int_0^{+\infty} R(x)\cos \alpha x\, \mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} R(x)\sin \alpha x\, \mathrm{d}x,$$

其中 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理分式函数, 且其分母 $Q(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上没有实根. 为此只要对 $R(x)$ 作部分分式分解即可 (参见 §3.2.1 的命题 3.2). □

7.3.2 几个著名广义积分的计算 (习题 3803, 3812.1, 3825–3826, 3830)

本小节的几个积分不仅都有多方面的应用, 而且在它们的计算中也经常出现经典的定理 (指本节开始列出的命题 7.4–7.6) 难以直接应用的情况, 从而需要配合其他技巧

才能解决. 其中比较重要的方法是: (1) 引入收敛因子, (2) 将积分区间从无限改为有限, 然后再取极限.

习题 3803 (欧拉–泊松积分) 从公式

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y$$

出发, 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 若公式右边的积分顺序可交换, 则就有

$$I^2=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x. \tag{7.10}$$

上式右边的积分可直接计算如下:

$$\begin{aligned}I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{2(1+y^2)}\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

从而就得到 $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

余下的问题是证明 (7.10) 的合理性. 由于本题的被积函数非负连续, 因此只要验证命题 7.6 的推论中的条件是否成立.

直接计算得到

$$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

可见在 $x=0$ 处不连续, 因此这个积分不可能关于 $x\in[0,A]$ $(A>0)$ 一致收敛.

为避开点 $x=0$, 取 $x_0>0$, 则上述计算表明积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y$ 在 $x\geqslant x_0$ 时连续, 同时又可计算得到

$$\int_{x_0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(1+y^2)}\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\Bigg|_{x=x_0}^{x=+\infty}=\frac{1}{2(1+y^2)}\mathrm{e}^{-x_0^2(1+y^2)},$$

它在 $y\geqslant 0$ 时连续. 这样就可用命题 7.6 的推论知道以下积分顺序交换的等式成立:

$$\int_{x_0}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{x_0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x, \tag{7.11}$$

然后令 $x_0\to+0$, 这时上式左边的积分就趋于 (7.10) 左边的积分, 而右边就产生了极限能否通过积分号的问题.

由于本题的被积函数非负, 于是 $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x$ 是 x_0 的单调函数. 将 §5.8.2 的命题 5.14 的推论通过海涅归结原理推广到连续参数情况, 就可见 (7.11) 式右边当 $x_0\to+0$ 时的极限就是 (7.10) 的右边的积分. 于是公式 (7.10) 的合理性得到了证明 (这里也可以用习题 3775 的控制收敛定理). □

注 I 即是概率积分, 关于它的各种计算方法的综述见 §7.2.3 的习题 3776.1 的注.

习题 3812.1 (狄利克雷积分) 从积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x\ \ (\alpha\geqslant 0)$$

出发, 计算积分

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

解 1 由于积分 $D(\beta)$ 关于 β 为奇函数, 以下不妨设 $\beta>0$.

与 §7.2.2 的习题 3760(a) 相似, 可证明积分 $I(\alpha)$ 在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 上一致收敛, 因此在这个区间上连续.

若 $\alpha>0$ 时对于 $I(\alpha)$ 的求导可在积分号下进行, 即可得到

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\right)'_\alpha\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

(最后一个积分的计算见 §4.4.1 的习题 2346 的解 2). 为验证这个运算的合理性, 按照命题 7.4, 对点 $\alpha_0>0$, 用 $\exp(-\frac{\alpha_0}{2}x)$ 为强函数, 即知上式右边的积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[\frac{\alpha_0}{2},+\infty)$ 上一致收敛, 因此 $I(\alpha)$ 于点 α_0 处的求导可通过积分号. 由于 $\alpha_0>0$ 可任取, 因此在 $\alpha>0$ 的范围内的上述运算是有根据的.

于是在 $\alpha>0$ 时可从 $I'(\alpha)$ 的表达式积分得到

$$I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+C,$$

其中 C 待定.

从 $I(\alpha)$ 的积分表达式可以估计得到

$$|I(\alpha)|\leqslant\int_0^{+\infty}\beta\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\alpha},$$

因此有 $I(+\infty)=0$. 这样就可确定待定常数 $C=\frac{\pi}{2}$.

于是在 $\alpha>0$ 时有 $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\alpha}{\beta}$. 由于 $I(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 因此最后就得到了狄利克雷积分的值当 $\beta>0$ 时为

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x=I(0)=\frac{\pi}{2}\ \ (\beta>0).$$

由此又知道当 $\beta<0$ 时 $D(\beta)=-\frac{\pi}{2}$. 由于显然有 $D(0)=0$, 因此可综合为

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.\quad\square$$

注 在本节的习题 3786 中已经看到, 对狄利克雷积分的求导不能通过积分号. 与本题比较, 可见在 $I(\alpha)$ 的积分号下的因子 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 起了关键作用. 我们将这样的因子称为"收敛因子". 本题的目的是求 $I(0)$. 为此将这个问题嵌入到求 $\alpha\geqslant 0$ 时的 $I(\alpha)$ 的更广泛的问题中, 其中的主要方法就是引入收敛因子.

解 2 引入上述收敛因子后也还有其他解法.

考虑二元函数

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x\ \ (\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0),$$

则在固定 $\alpha>0$ 且参变量 $\beta\in[0,\beta_0]$ $(\beta_0>0)$ 时上述积分可以用 $\beta_0\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 为强函数, 从而知道 $J(\alpha,\beta)$ 当 $\alpha>0$ 时关于 $\beta\geqslant 0$ 连续.

若 $J(\alpha,\beta)$ 对 β 求导可通过积分号, 则有

$$J'_\beta(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

其中的积分计算见 §4.4.1 的习题 2346. 由于作为参变量 β 的上述积分可以用 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 为强函数, 上述求导计算是合理的.

利用 $J(\alpha,\beta)$ 于 $\alpha>0$ 时关于 $\beta\geqslant 0$ 连续, 且有 $J(\alpha,0)=0$, 因此就可积分得到

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{\beta}\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{d}\beta=\arctan\frac{\beta}{\alpha}.$$

现在改变观点, 将 $J(\alpha,\beta)$ 的积分表达式看成为参变量 $\alpha\geqslant 0$ 的函数, 而固定 $\beta>0$. 于是如解 1 一样知道 $J(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 时连续, 因此就有

$$D(\beta)=J(0,\beta)=\lim_{\alpha\to+0}J(\alpha,\beta)=\lim_{\alpha\to+0}\arctan\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{2}\ \ (\beta>0).$$

以下与解 1 最后部分相同, 从略. □

解 3 (概要)　只考虑 $\beta=1$ 时的 $D(1)$ 的计算.

利用

$$\frac{1}{x}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y,$$

于是可作如下计算:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{2},$$

问题只在于上述计算过程中的积分顺序交换这一步是否合理. 可以看出命题 7.6 的条件不能全部满足, 因此需要将 x 的积分范围改为 $[a,A]$, 其中 $0<a<A<+\infty$. 这样就有可能改用命题 7.5 来实现积分顺序交换, 然后再取极限 $a\to+0$ 和 $A\to+\infty$. 详见 [11] 的第二卷 524 小节的例题 11). □

注　在 §5.4.5 的例题 3 中已经给出了积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的一种计算方法.

以下的习题 3825 和 3826 中的积分即是著名的拉普拉斯积分, 它们在许多问题中有应用. 拉普拉斯积分有多种证明方法. 在习题 3825 中先给出按照《习题集》的提示的解 1, 然后再给出另一种解法, 并在其后的注中对另外两种解法作简要的介绍.

习题 3825 (拉普拉斯积分) 利用公式

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\,\mathrm{d}y,$$

计算积分

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

解 1 将题中所给的公式代入积分 L 中, 若可以交换积分顺序, 就有

$$L=\int_0^{+\infty}\cos ax\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}\cos ax\,\mathrm{d}x. \tag{7.12}$$

利用前面的习题 3809 的答案, 上式右边的内层积分即可求得, 于是就可以计算如下:

$$L=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4y}}\Big)\,\mathrm{d}y \text{ (作代换 } y=t^2)$$

$$=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(t^2+\frac{a^2}{4t^2}\right)}\,\mathrm{d}t \text{ (用习题 3807 的答案)}$$

$$=\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-|a|}=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|a|}.$$

余下的问题是验证 (7.12) 中的积分顺序交换的合理性.

这里出现与习题 3803 (欧拉–泊松积分) 中类似的困难 (又可参见 §7.2.2 的习题 3755.3 及其注). 由于以 y 为参变量的广义积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\cos ax\,\mathrm{d}x$$

在 $y=0$ 时发散, 因此这个积分不可能在 $[0,A]$ $(A>0)$ 上一致收敛. 这表明 (7.12) 的合理性不可能用标准的积分顺序交换定理 (即命题 7.6) 得到①.

由于本题的被积函数不保号, 这比习题 3803 要难一点. 下面采取引入收敛因子的方法. 其目的就是避开参变量 $y=0$ 引起的上述困难.

首先建立以下等式:

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\delta(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

为此只要对右边的积分用阿贝尔一致收敛判别法, 即从积分 L 收敛, 而 $\mathrm{e}^{-\delta(x^2+1)}$ 关于 x 单调, 且关于 $\delta\geqslant 0$, $x\geqslant 0$ 一致有界, 即可知道上式右边的积分关于 $\delta\geqslant 0$ 一致收敛, 因此取极限 $\delta\to+0$ 可以通过积分号.

然后仿照本题提示的方法, 利用公式

$$\frac{\mathrm{e}^{-\delta(x^2+1)}}{1+x^2}=\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\,\mathrm{d}y,$$

就有

$$L=\lim_{\delta\to+0}\int_0^{+\infty}\cos ax\,\mathrm{d}x\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(x^2+1)}\,\mathrm{d}y.$$

这时容易建立积分顺序交换的等式 (其中 $\delta>0$):

$$\int_0^{+\infty}\cos ax\,\mathrm{d}x\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(x^2+1)}\,\mathrm{d}y=\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}\cos ax\,\mathrm{d}x.$$

为此只要验证命题 7.6 中所要求的以下三个条件.

(1) 以 y 为参变量的积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(x^2+1)}\cos ax\,\mathrm{d}x$ 可用 $\mathrm{e}^{-\delta(x^2+1)}$ 为强函数, 因此关于 $y\geqslant\delta$ (>0) 一致收敛;

(2) 以 x 为参变量的积分 $\displaystyle\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(x^2+1)}\cos ax\,\mathrm{d}y$ 可用 e^{-y} 为强函数, 因此关于 $x\geqslant 0$ 一致收敛;

① 在 [11] 的第二卷 522 小节的 4° 中的证明在这一步也是有问题的.

(3) 被积函数取绝对值后的积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_\delta^{+\infty} |\mathrm{e}^{-y(x^2+1)} \cos ax| \,\mathrm{d}y$ 的收敛性可由下列积分的收敛而得到保证:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_\delta^{+\infty} \mathrm{e}^{-y(x^2+1)} \,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{e}^{-\delta(x^2+1)} \,\mathrm{d}x.$$

综合以上就得到

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\delta\to+0} \int_\delta^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yx^2} \cos ax \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yx^2} \cos ax \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

上式最后的积分就是 (7.12) 的右边的积分. 这样就证明了该式成立. □

解 2 将积分记为 $L(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$, 则可用强函数 $\frac{1}{x^2+1}$ 证明它关于参变量 a 在任何范围内的一致收敛性, 从而是 a 的连续函数, 且还有 $L(0) = \frac{\pi}{2}$.

因 $L(a)$ 为偶函数, 下面先讨论 $a > 0$. 这时用积分号下求导的定理可以证明成立

$$L'(a) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+1} \,\mathrm{d}x.$$

为此只要对每一个 $a_0 > 0$ 取一个小邻域, 然后用狄利克雷一致收敛判别法证明上式右边的积分在这个邻域内一致收敛即可 (细节请读者补充).

由 $L'(a)$ 的表达式容易看出右边的积分不可能在积分号下再对 a 求导, 因为 $\frac{x}{x^2+1}$ 当 $x \to +\infty$ 时趋于 0 已经很缓慢了. 将其中的缓慢部分分离出来, 即有

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x^2+1)},$$

于是可利用狄利克雷积分将 $L'(a)$ 改写为

$$\begin{aligned} L'(a) &= -\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x^2+1)}\right] \sin ax \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+1)} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

将上式再对 a 求导, 且可证明上式右边的积分对 a 求导可以通过积分号 (细节请读者补充), 从而得到

$$L''(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = L(a).$$

这是常系数的二阶线性常微分方程, 其通解的形式为

$$L(a) = C_1 \mathrm{e}^a + C_2 \mathrm{e}^{-a}.$$

由 $|L(a)| \leqslant L(0) = \frac{\pi}{2}$ 可见 $C_1 = 0$, 然后再利用 $I(a)$ 于 $a = 0$ 处连续, 可见 $C_2 = L(0)$, 于是得到 $L(a) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a}$ $(a \geqslant 0)$. 由于 $L(a)$ 为偶函数, 因此 $L(a) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|a|}$. □

注 在 [11] 的第二卷 524 小节的例题 9) 和 10) 中提出了计算拉普拉斯积分计算的另外两种方法, 其主要思路是将习题中的 $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y(1+x^2)} \,\mathrm{d}y$ 改用

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin y \,\mathrm{d}y \quad 和 \quad \frac{x}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} \sin xy \,\mathrm{d}y,$$

即可将拉普拉斯积分的计算又转化为积分顺序交换, 但也都不能用现成的定理 (指命题 7.6) 来解决. 于是就像解 1 中采用了收敛因子的方法一样, 都需要采取其他技巧的配合来克服困难.

习题 3826 (拉普拉斯积分) 计算积分

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

解 从习题 3825 的解 2 可知当 $a>0$ 时 $L_1 = -L'(a)$, 因此可得到 $L_1 = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a}$. 利用 L_1 为 a 的奇函数, 且在 $a=0$ 时有 $L_1 = 0$ ($L(a)$ 在 $a=0$ 时不可导), 因此可综合成

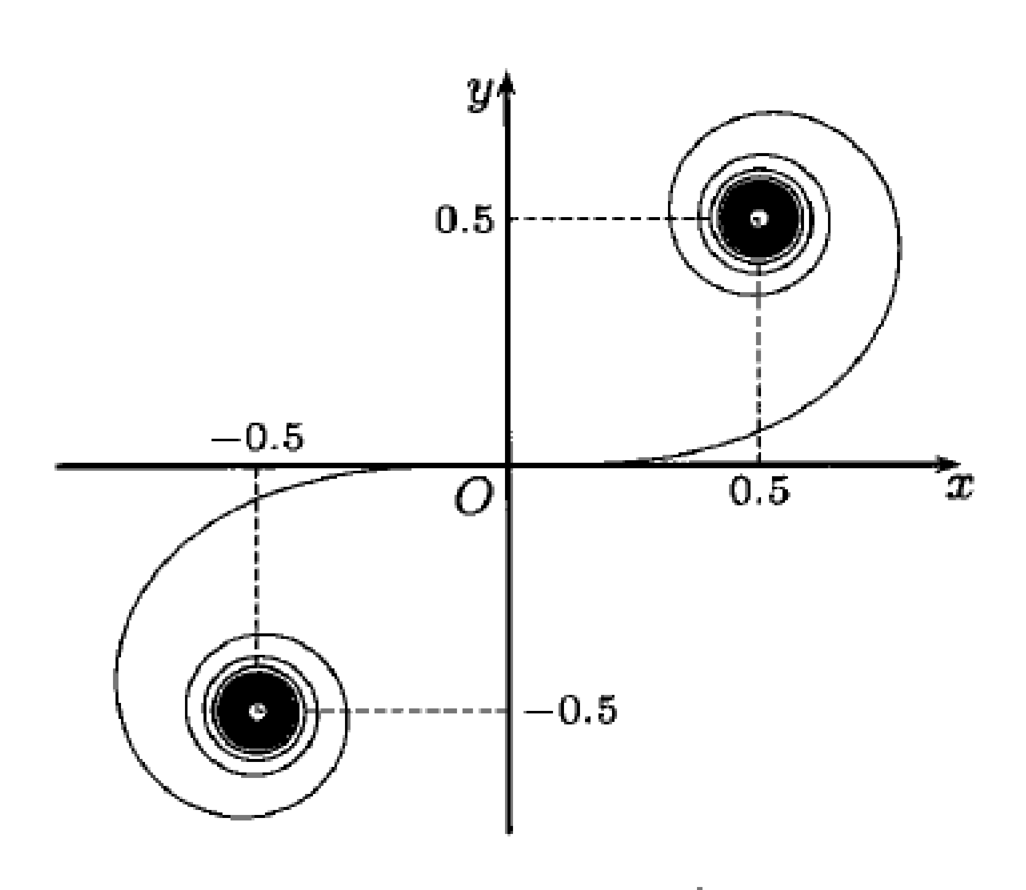
$$L_1 = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|a|}\cdot \operatorname{sgn} a. \quad \square$$

下面是一个有多方面应用的有趣例子 [28, p.1047]. 由方程

$$x(t) = \int_0^t \cos\frac{\pi s^2}{2}\,\mathrm{d}s,$$
$$y(t) = \int_0^t \sin\frac{\pi s^2}{2}\,\mathrm{d}s$$

定义的参数曲线称为考纽螺线.

如附图所示, 当参数 $t\to\pm\infty$ 时, 螺线分别趋于点 $(\pm0.5, \pm0.5)$. 这归结为习题 3830 中的积分计算.



习题 3830 的附图

习题 3830 (菲涅尔积分) 利用公式

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2}\,\mathrm{d}y \quad (x>0)$$

计算积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

解 由于所用的方法对两个积分是相似的, 只写出第一个积分的计算过程. 将它记为 I, 将其中的 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 用题中提供的公式代入. 若下列积分顺序交换成立, 即有

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy^2}\sin x\,\mathrm{d}x, \tag{7.13}$$

则就可以将右边的积分计算如下得到①

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

① 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 的计算可以用 §3.2.1 的习题 1884 提供的不定积分, 也可以用该题的解 2 中的配对法直接计算得到. 这里可以参考 §4.4.1 的习题 2341 的两个解法.

然而等式 (7.13) 的合理性论证又有困难. 从含参变量 y 的广义积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2} \sin x \,\mathrm{d}x$$

在 $y=0$ 时发散即可看出应用命题 7.6 所需要的条件不可能全部满足.

采用引入收敛因子的方法, 即考虑含参变量 $\alpha \geqslant 0$ 的广义积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x.$$

由于 $\alpha = 0$ 时的广义积分收敛, 而 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 单调且有界, 根据阿贝尔一致收敛判别法, 可见积分 $I(\alpha)$ 对于 $\alpha \geqslant 0$ 一致收敛, 因此在 $\alpha \in [0, +\infty)$ 上连续.

以下我们将对于 $\alpha > 0$ 求出 $I(\alpha)$ 的表达式, 然后取极限得到所要的 $I = I(0) = \lim\limits_{\alpha \to +0} I(\alpha)$.

从积分 $I(\alpha)$ 的被积表达式可见, 难以用积分号下对 α 求导的方法来计算 $I'(\alpha)$. 令 $0 < a < b$[①]. 对于 $\alpha > 0$, 定义含参变量的常义积分:

$$I_{a,b}(\alpha) = \int_a^b \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x.$$

然后利用习题提供的关于 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的公式代入 $I_{a,b}(\alpha)$ 中得到

$$I_{a,b}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \mathrm{d}x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(y^2+\alpha)} \sin x \,\mathrm{d}y.$$

由于在 $x \in [a,b]$ 时有 $|\mathrm{e}^{-x(y^2+\alpha)} \sin x| \leqslant \mathrm{e}^{-ay^2}$ 成立, 因此上式里层的广义积分在 $x \in [a,b]$ 上一致收敛, 这样就可以用命题 7.5 交换积分顺序得到

$$I_{a,b}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_a^b \mathrm{e}^{-x(y^2+\alpha)} \sin x \,\mathrm{d}x.$$

由于其中的里层积分可计算得到为 (参看 §3.1.6 的习题 1828 与 1829):

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-x(y^2+\alpha)} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-x(y^2+\alpha)}}{1+(y^2+\alpha)^2} [-\cos x - (y^2+\alpha)\sin x]\Big|_{x=a}^{x=b},$$

因此就得到 $I_{a,b}(\alpha) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, 其中

$$I_1 = \frac{-\cos b \cdot \mathrm{e}^{-b\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-by^2}}{1+(y^2+\alpha)^2} \,\mathrm{d}y,$$

$$I_2 = \frac{-\sin b \cdot \mathrm{e}^{-b\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{(y^2+\alpha)\,\mathrm{e}^{-by^2}}{1+(y^2+\alpha)^2} \,\mathrm{d}y,$$

$$I_3 = \frac{\cos a \cdot \mathrm{e}^{-a\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ay^2}}{1+(y^2+\alpha)^2} \,\mathrm{d}y,$$

$$I_4 = \frac{\sin a \cdot \mathrm{e}^{-a\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{(y^2+\alpha)\,\mathrm{e}^{-ay^2}}{1+(y^2+\alpha)^2} \,\mathrm{d}y.$$

现在分别讨论这 4 个积分. 它们表面上似乎复杂, 实际上都很容易处理.

---

① 若不引入有限数 a, b, 则在引入收敛因子后, 下面的两个无界区间上的积分顺序交换仍然不可能应用现成的命题 7.6. 引入 a, b 使得其中一个积分为有限区间上的积分, 问题变得容易多了. 然后令 $a \to +0$, $b \to +\infty$.

利用 I_1 和 I_2 在积分号外有因子 $\mathrm{e}^{-b\alpha}$, 而两个积分都关于 b 有界, 就可看出有 $I_1 \to 0, I_2 \to 0\ (b \to +\infty)$.

对于 I_3 和 I_4 则要取极限 $a \to +0$. 将其中的两个积分看成为含参变量 a 的广义积分, 则只要在它们的被积函数中取 $a = 0$ 就得到强函数, 可见这两个广义积分关于参变量 $a \in [0,1]$ 为一致收敛, 从而当 $a \to +0$ 时可以在积分号下取极限. 这样就得到 $I_4 \to 0\ (a \to +0)$, 同时又可综合以上讨论得到

$$I(\alpha) = \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} I_{a,b}(\alpha) = \lim_{a\to+0} I_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+(y^2+\alpha)^2}.$$

这样就求出了 $\alpha > 0$ 时的 $I(\alpha)$ 的积分表达式. 用强函数方法可见极限 $\alpha \to +0$ 可以通过积分号, 而前面已知 $I(\alpha)$ 在点 $\alpha = 0$ 处右连续, 这样就得到

$$\begin{aligned} I = I(0) &= \lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+(y^2+\alpha)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

注 在不少教科书中对于菲涅尔积分的计算只写出引入收敛因子, 而对于此后的积分顺序交换过程的合理性未作交代. 本书的上述证明引自 [15] 的 §114 的例题 6.

此外, 在 [21] 的例 197 中对菲涅尔积分采用广义二重积分的方法进行了计算, 但仍较复杂, 可供参考.

7.3.3 含参变量的广义积分的一些应用 (习题 3835–3840)

习题 3835 (含 7 个小题) 和 3836 都是拉普拉斯变换的具体计算题. 如习题 3835 所示, 这种变换将函数 $f(t)$ 通过积分变成为参变量 p 的函数 $F(p)$. 由于在这种变换下, 关于未知函数 $f(t)$ 的常微分方程变成关于 $F(p)$ 的代数方程, 从而拉普拉斯变换成为求解常微分方程的重要计算工具之一. 此外它在求解偏微分方程中也有应用. 有兴趣的读者可参考 [20] 的第二章和 [4] 的 §4.10.

习题 3835 对于下列函数 $f(t)$,

(a) $f(t) = t^n$ (n 为正整数); (b) $f(t) = \sqrt{t}$; (c) $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$;

(d) $f(t) = t\mathrm{e}^{-\alpha t}$; (e) $f(t) = \cos t$; (f) $f(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$; (g) $f(t) = \sin\alpha\sqrt{t}$,

求拉普拉斯变换

$$F(p) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t \quad (p > 0).$$

解 这里的积分计算都可以从前面的广义积分或含参变量广义积分的习题得到. 以下只选解其中的几个题.

(a) $f(t) = t^n$ (n 为正整数).

引用 §4.4.1 的习题 2348 的答案即可计算如下:

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{p^{n+1}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\,\mathrm{d}x=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

注 对于 $n>-1$ 为一般实数的情况, t^n 的拉普拉斯变换即导致伽玛函数 (见 §7.4).

(b) $f(t)=\sqrt{t}$.

引用欧拉–泊松积分即可计算如下:

$$\begin{aligned}F(p)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px^2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{p\sqrt{p}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u^2\,\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{p\sqrt{p}}\Big(-\frac{1}{2}u\mathrm{e}^{-u^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\Big)=\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}.\end{aligned}$$

(f) $f(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

引用 §7.3.1 的习题 3788 的答案即可计算如下:

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-pt}-\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t=\ln\frac{p+1}{p}.$$

(g) $f(t)=\sin\alpha\sqrt{t}$.

引用 §7.3.1 的习题 3809 的答案即可计算如下:

$$\begin{aligned}F(p)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\alpha\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-pu^2}\sin\alpha u\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{p}(\mathrm{e}^{-pu^2}\sin\alpha u)\Big|_0^{+\infty}+\frac{\alpha}{p}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pu^2}\cos\alpha u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p}}.\ \square\end{aligned}$$

习题 3836 (利普希茨积分) 证明公式

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}J_0(bt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(a>0),$$

其中 $J_0(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ 为 0 阶贝塞尔函数 (参阅习题 3726).

解 (本题就是计算 $J_0(bt)$ 的拉普拉斯变换.)

记积分为 I. 将 $J_0(bt)$ 的积分表达式代入, 然后交换积分顺序即可得到

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos(bt\sin\varphi)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于右边的里层积分可以用 e^{-at} 为强函数, 因此关于 $\varphi\in[0,\pi]$ 一致收敛, 从而根据命题 7.5 可知上述积分顺序交换是合理的.

利用 §4.4.1 的习题 2346, 即可将上式右边的里层积分积出, 然后不难继续计算下去得到

$$I = \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{a^2 + b^2\sin^2\varphi} = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{a^2 + b^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a^2+b^2) - b^2\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{(a^2+b^2)\sec^2\varphi - b^2}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan\varphi)}{a^2 + (a^2+b^2)\tan^2\varphi}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\tan\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad \square$$

习题 3837 (含 4 个小题) 是关于魏尔斯特拉斯变换的计算题. 它们也都容易从已知的积分得到, 从略.

习题 3838 切比雪夫–埃尔米特多项式由公式

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2}) \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

定义, 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

注　本题的计算不难. 这里只指出本题的意义. 题中所要证明的事实与 §4.2.6 的习题 2288, 2300 以及 §5.6 的三角函数系 (5.20) 的正交性相似, 都是在特定的函数空间中的正交函数系的正交性. 本题的 $\{H_n(x)\}$ 是在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上以 e^{-x^2} 为权函数的正交多项式系. 关于正交函数系的材料可参考 [6] 的第一卷第二章, 其标题为“任意函数的级数展开”. 本题的函数系见该书的 §2.9.4.

习题 3839 计算积分 (它在概率论中有重要应用):

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2}\right]}\,\mathrm{d}\xi \ \ (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0).$$

解　这里 x 是参变量, ξ 是积分变量. 将被积函数的指数表达式配方如下:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\sigma_1^2(\xi - x)^2 + \sigma_2^2\xi^2\right]\right\}\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2 - 2\sigma_1^2 x\xi + \sigma_1^2 x^2\right]\right\}\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left(\xi - \frac{\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 x^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right]\right\}\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\xi - \frac{\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\right]\mathrm{d}\xi.$$

然后再在积分中作代换

$$y=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}\Big(\xi-\frac{\sigma_1^2x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\Big),$$

就可以利用欧拉–泊松积分得到

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot\frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot\frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\cdot\sqrt{\pi}\\&=\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.\quad\square\end{aligned}$$

注 在概率统计中将密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\quad(\sigma>0)$$

的随机变量称为具有正态分布, 其中 m 为数学期望, σ 为标准差.

可以证明, 两个正态分布的随机变量之和仍然具有正态分布 [10].

本题只是这个一般性结论的一个特例, 即数学期望均为 0 的两个相互独立的正态分布的随机变量之和仍具有正态分布. 如计算结果所示, 当原来的两个随机变量的标准差分别为 σ_1 和 σ_2 时, 它们之和的随机变量的标准差为 $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

习题 3840 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且绝对可积, 证明: 积分

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi$$

满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

及初始条件

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x).$$

解 从函数 $u(x,t)$ 的表达式和 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积的条件可见, $u(x,t)$ 在 $t>0$ 和 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时有意义.

由 §6.2.4 的习题 3309 已知, 热传导方程有基本解 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ (其中 b 为参数), 而它就是本题给出的含参变量 t,x 的广义积分 $u(x,t)$ 的"核", 因此只要将 $u(x,t)$ 对 t 的求偏导数和对 x 求一阶和二阶偏导数时能够通过积分号, 则 $u(x,t)$ 就满足热传导方程.

先看对 t 求偏导. 在积分号下将被积函数对 t 求偏导得到的积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\Big[f(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\Big]\,\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi.\tag{7.14}$$

对于点 $t_0>0$, 取 $0<t_1<t_0<t_2$, 又固定 x, 则有

$$\left|f(\xi)\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right| \leqslant \left|f(\xi)\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t_1^2}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t_2}}\right|.$$

由于当 x 固定时有

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t_1^2}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t_2}}=0,$$

因此存在 $M>0$, 使得积分 (7.14) 的被积函数以 $M|f(\xi)|$ 为强函数, 从而由 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积的条件知道该积分关于 $t\in[t_1,t_2]$ 一致收敛. 这样就根据命题 7.4 得到对任何 x 和 $t>0$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= -\frac{1}{4a\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

同样可以证明对任意 x 和 $t>0$ 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right]\mathrm{d}\xi.$$

因此根据习题 3309 就得到 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

最后一步是证明: 在 $t\to+0$ 的意义上所给定的 $u(x,t)$ 满足初始条件 $f(x)$.

利用欧拉–泊松积分就可看出习题 3309 的基本解具有以下性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi=1.$$

固定 x, 则问题归结为估计

$$|u(x,t)-f(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)-f(x)|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi.$$

利用 f 在点 x 连续, 对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|\eta|<\delta$ 时, 有 $|f(x+\eta)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, 然后将上述右边的积分分拆为三个积分进行估计:

$$|u(x,t)-f(x)|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^{x+\delta}+\int_{x+\delta}^{+\infty}\right)|f(\xi)-f(x)|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi. \tag{7.15}$$

对于上式右边的第二个积分作代换 $\xi-x=\eta$, 就有

$$\begin{aligned}\int_{x-\delta}^{x+\delta}|f(\xi)-f(x)|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi &= \int_{-\delta}^{+\delta}|f(x+\eta)-f(x)|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\eta \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\eta=\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

对 (7.15) 右边的第三个积分可估计如下:

$$\begin{aligned}
&\int_{x+\delta}^{+\infty}|f(\xi)-f(x)|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi\\
\leqslant&\int_{x+\delta}^{+\infty}|f(\xi)|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi+|f(x)|\int_{x+\delta}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi\\
\leqslant&\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi+\frac{|f(x)|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

由于以上两项当 $t\to+0$ 时分别趋于 0, 因此存在 $t_0>0$, 使得当 $0<t<t_0$ 时上述两项之和小于 $\frac{\varepsilon}{3}$.

对 (7.15) 右边的第一个积分可作代换 $\eta=-\eta'$, 这时得到的积分与上面的第三个积分的估计相似, 且可看出当 $0<t<t_0$ 时它也小于 $\frac{\varepsilon}{3}$. 综合以上就证明了

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x).\quad\square$$

注 在以上证明中的关键是了解基本解所具有的特性. 联系到核函数方法 (见 [32] 的 §16.3.1), 可以知道

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}$$

就是以 $t>0$ 为连续参数的非负核函数, 它满足作为核函数的两个最基本的要求, 即在 $(-\infty,+\infty)$ 上对 ξ 的积分等于 1, 同时随着 $t\to+0$, 这个积分越来越集中于原点附近的一个小区间上. 如 [32] 中指出, 这个核函数在 $t\to+0$ 时的极限为狄拉克的 δ 函数, 也就是广义函数.

§7.4 欧拉积分 (习题 3841–3880)

内容简介 本节是关于两类欧拉积分的习题, 按照其难度分为两小节.

两类欧拉积分, 即贝塔函数和伽玛函数, 是最常用的非初等函数, 它们一般均用含参变量的广义积分来定义. 在《习题集》的第八章中有大量的习题需要用两类欧拉积分进行计算.

下面列出两类欧拉积分的定义和基本性质.

第一类欧拉积分即是贝塔函数

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \tag{7.16}$$

其定义域为 $x>0, y>0$. 可以证明 $\mathrm{B}(x,y)$ 在其定义域内无限次连续可微, 且可在积分号下逐次求导. 用代换 $\tau=1-t$ 即可证明贝塔函数具有对称性, 即 $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$.

令 $t=\cos^2\varphi$, 则就从 (7.16) 得到贝塔函数的三角积分形式:

$$\mathrm{B}(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \tag{7.17}$$

若在 (7.16) 中作代换 $t=\dfrac{1}{1+u}$, 即 $u=\dfrac{1-t}{t}$, 则可得到贝塔函数的无限区间上的积分形式

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u. \tag{7.18}$$

贝塔函数的以上三种形式 (7.15), (7.16) 和 (7.17) 都是在应用中的常见积分. 由于其中的参变量 x, y 可以取任意正实数, 因此有广泛的应用.

第二类欧拉积分是伽玛函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \tag{7.19}$$

其定义域为 $x>0$. 可以证明伽玛函数在其定义域内无限次连续可微, 且可在积分号下逐次求导得到

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}(\ln t)^n\,\mathrm{d}t.$$

如 §5.9.3 的习题 3105 所示, 伽玛函数还可以用无穷乘积来定义. 这时的定义域为除去负整数和 0 之外的一切实数. 在 §5.9.4 的命题 5.16 中证明了当 $x>0$ 时两种定义等价.

下面将伽玛函数的几个基本性质以命题的形式列出.

命题 7.7 伽玛函数满足递推公式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

注 用分部积分法即可证明这个递推公式.

如在习题 3105 处已经指出, 从直接计算得到的 $\Gamma(1)=1$ 出发就有 $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(3)=2!$, $\Gamma(4)=3!$ 等等. 用数学归纳法可以证明成立 $\Gamma(n+1)=n!$. 因此伽玛函数是离散情况的阶乘的连续化推广.

若将这个递推公式写为 $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, 就可将伽玛函数的定义域以递推的方式推广到所有不是负整数的 $x<0$ 处. 由于习题 3105 已经证明用无穷乘积定义时也成立这个递推公式, 因此这样的延拓与无穷乘积定义仍是一致的.

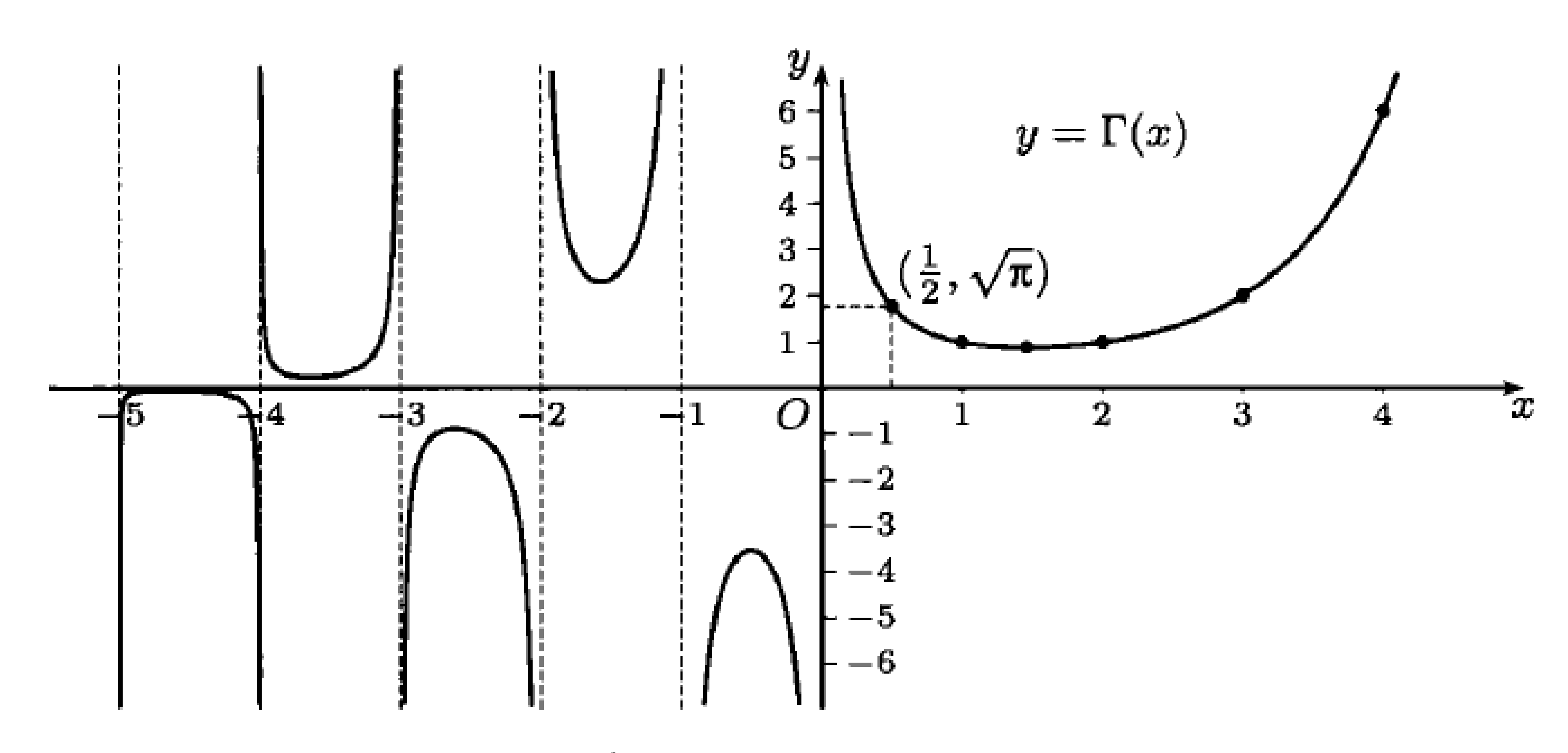
在下面的附图中作出了伽玛函数在定义域延拓后的图像, 其中 $x<0$ 的部分是由上述递推公式得到的. 在图上除了标出 $x=1,2,3,4$ 处的曲线上的点之外, 还标出了计算中经常要用到的 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\approx 1.772$ 和下面即将提到的最小值点.

从积分表达式 (7.19) 容易直接看出 $\Gamma(+0)=+\infty$, $\Gamma(+\infty)=+\infty$.

利用二阶导数

$$\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t>0,$$

可见当 $x>0$ 时伽玛函数为严格凸函数. 由此又可推出其导函数 $\Gamma'(x)$ 于 $x>0$ 时为从 $-\infty$ 严格递增到 $+\infty$ 的单调函数, 因此伽玛函数在 $x>0$ 内存在唯一的最小值点和最小值. 可求出 $x_{\min}\approx 1.4616$, 最小值约为 0.886.



Γ 函数在区间 $-5<x<4.1$ 上的图像

联系两类欧拉积分的最重要公式就是下一个命题中的狄利克雷公式.

命题 7.8 (狄利克雷公式) 两类欧拉积分之间成立恒等式

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{7.20}$$

利用贝塔函数的三角积分表达式 (7.17), 就得到 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\pi$, 然后就可从狄利克雷公式得到前面已经提到的

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{7.21}$$

这相当于用公式 (7.20) 对 §7.3 中的 (习题 3803) 欧拉–泊松积分给出了一个新的证明:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由于贝塔函数的许多性质都可以通过狄利克雷公式 (7.20) 得到, 因此下面主要列出伽玛函数的其他几个主要性质.

命题 7.9 (余元公式) $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ $(0<x<1)$.

注 对于伽玛函数的积分定义, 余元公式只在 $0<x<1$ 上成立, 但在用递推公式将伽玛函数的定义域从 $x>0$ 延拓到在所有的非负整数和 0 之外的实数范围后, 余元公式对非整数的 x 均成立. 此外, 用 $x=\dfrac{1}{2}$ 代入余元公式中, 又可得到 $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=\sqrt{\pi}$.

命题 7.10 (勒让德加倍公式) $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$.

注 上述加倍公式的重要性可从下列事实看出. 在 [11] 的第二卷 532 小节中证明, 设函数 $f(x)$ 及其导数在 $x>0$ 时皆连续, $f(x)$ 无零点, 且满足

$$f(x+1)=xf(x),\quad f(x)f(x+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}f(2x),$$

则 $f(x)\equiv\Gamma(x)$.

命题 7.11 $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凸函数.

在右边的附图中作出了 $(0,+\infty)$ 上的 $\Gamma(x)$ 和 $\ln\Gamma(x)$ 的图像, 它们都是严格凸函数. 命题 7.11 的重要性可从下列定理看出.

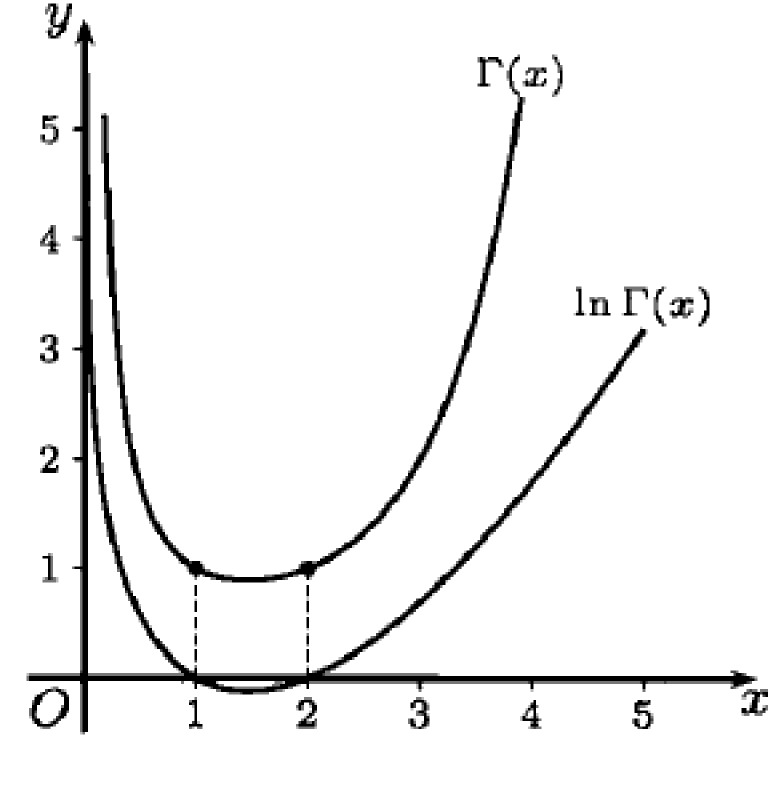
命题 7.12 (波尔–摩尔路波定理) 若在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足以下三个条件:

(1) $f(x)>0$ 且 $f(1)=1$;

(2) $f(x+1)=xf(x)$;

(3) $\ln f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数;

则 $f(x)\equiv\Gamma(x)$.



$\Gamma(x)$ 和 $\ln\Gamma(x)$ 的图像

以上关于伽玛函数的基本性质的证明, 均可在 [7, 11, 32, 33] 等有关欧拉积分的章节中找到.

7.4.1 与欧拉积分有关的积分题 I (习题 3841–3861)

这一小节的习题除了开始的两题是讨论伽玛函数和贝塔函数的可导性之外, 一般都可以通过简单运算化为欧拉积分.

习题 3843 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 记积分为 I. 利用欧拉积分可计算如下:

$$I=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}\Big(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\Big)=\frac{\Big[\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)\Big]^2}{\Gamma(3)}=\frac{\Big[\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big]^2}{2!}=\frac{\pi}{8}.$$

这里所用到的工具包括贝塔函数的定义、狄利克雷公式 (7.20)、伽玛函数的递推公式和公式 (7.21). (本题也不难直接计算求积.) □

习题 3845 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 记积分为 I. 利用贝塔函数的无限区间积分形式 (7.18), 即可计算如下:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}\Big(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\Big)$$
$$=\frac{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\quad\square$$

注 这里用了命题 7.9 的余元公式, 但也可以用命题 7.10 的勒让德加倍公式得到. 此外本题作代换 $x=t^4$ 可化为有理函数的广义积分后求积, 但计算复杂得多.

习题 3848 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

解 记积分为 I. 根据贝塔函数的三角积分形式 (7.17) 就有

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{B}\Big(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\Big)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\Big(\frac{7}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big)}{\Gamma(6)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{\Big[\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big)\Big]^2}{5!}$$
$$=\frac{1}{96}\Big[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big]^2=\frac{3\pi}{512}.\quad\square$$

注 本题也可以用熟知的公式 (4.9) 来计算, 但公式 (7.17) 中的 x,y 可以是任意的正实数, 因此适用范围要比 (4.9) 大得多.

习题 3851 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\ (n>0)$ 的存在域, 并用欧拉积分表示该积分.

解 记积分为 I. 作代换 $x^n=t$, 得到

$$I=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

由于此积分有奇点 $t=0$ 和 $t=+\infty$, 其被积函数 $f(t)$ 在两个奇点处的性态分别为

$$f(t)\sim\frac{1}{t^{1-\frac{m}{n}}}\ \ (t\to+0),\quad f(t)\sim\frac{1}{t^{2-\frac{m}{n}}}\ \ (t\to+\infty),$$

即可知道当 $0<m<n$ 时积分收敛.

根据贝塔函数的无限区间上的积分形式 (7.18), 狄利克雷公式和余元公式即可计算得到

$$I=\frac{1}{n}\mathrm{B}\Big(1-\frac{m}{n},\frac{m}{n}\Big)$$
$$=\frac{1}{n}\Gamma\Big(1-\frac{m}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.\quad\square$$

注 当 $m=1<n$ 时, 即得到公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

它包含了较常见的 $n=3,4,6$ 等广义积分为其特例, 与它们相应的不定积分计算见 §3.2.1 的习题 1881, 1884, 1886.

习题 3852 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$ 的存在域, 并用欧拉积分表示该积分.

解 记积分为 I. 由广义积分的收敛性判别法可见当 $0<m<n$ 时积分收敛. 利用贝塔函数的无限区间积分形式 (7.18) 就知道本题的积分等于

$$I=\mathrm{B}(n-m,m)=\frac{\Gamma(n-m)\Gamma(m)}{\Gamma(n)}.\quad\square$$

习题 3853 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,\mathrm{d}x\ (a>0,b>0,n>0)$ 的存在域, 并用欧拉积分表示该积分.

提示 作代换 $bx^n=at$ 使得分母为 $a^p(1+t)^p$. □

习题 3854 求积分 $\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,\mathrm{d}x\ (0<a<b,c>0)$ 的存在域, 并用欧拉积分表示该积分.

解 1 记积分为 I. a 和 b 可能为奇点. 按照广义积分收敛的比较判别法可见积分的存在域为 $m>-1,\ n>-1$. 先作代换 $x=a+(b-a)t$, 则得到

$$I=\frac{1}{b-a}\int_0^1\frac{t^m(1-t)^n}{(t+\lambda)^{m+n+2}}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\lambda=\dfrac{a+c}{b-a}$. 然后再作线性分式代换 $\dfrac{t}{t+\lambda}=\dfrac{\tau}{1+\lambda}$, 它使得当 t 从 0 到 1 时, τ 也从 0 到 1. 计算得到 $\dfrac{1-t}{t+\lambda}=\dfrac{1-\tau}{\lambda}$, $\dfrac{\lambda\,\mathrm{d}t}{(t+\lambda)^2}=\dfrac{\mathrm{d}\tau}{1+\lambda}$, 于是有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{b-a}\int_0^1\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right)^m\left(\frac{1-\tau}{\lambda}\right)^n\frac{\mathrm{d}\tau}{\lambda(1+\lambda)}\\&=\frac{1}{(b-a)(1+\lambda)^{m+1}\lambda^{n+1}}\mathrm{B}(m+1,n+1)\\&=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}\mathrm{B}(m+1,n+1).\quad\square\end{aligned}$$

解 2 (概要) 一开始与解 1 相同, 先得到 $I=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_0^1\frac{t^m(1-t)^n}{(t+\lambda)^{m+n+2}}\,\mathrm{d}t$, 然后作代换

$$t=\frac{\lambda}{\lambda+(1+\lambda)u},$$

当 t 从 0 到 1 时, u 从 $+\infty$ 到 0. 以下计算可化为贝塔函数的形式 (7.18), 从略. □

注 在以上求解中假设了 $a+c\neq0$ 和 $b+c\neq0$, 否则在第一步化为 $[0,1]$ 上的积分后计算更为简单.

习题 3858 求积分 $\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}\,\mathrm{d}x\ (0<|k|<1)$ 的存在域, 并用欧拉积分表示该积分.

提示 用三角函数积分的万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$ (参见 §3.4.3) 即可化为 $[0,+\infty)$ 上的积分, 然后再作代换化为贝塔函数的无限区间积分形式 (7.18). □

7.4.2 与欧拉积分有关的积分题 II (习题 3862–3880)

这里的多数习题要比上一小节的习题难一点, 例如除了用欧拉积分的定义和性质之外, 还可能需要含参变量积分在积分号下的求导和求积运算或其他技巧. 此外, 最后两题是求曲线弧长和曲线所围面积的应用题.

习题 3862 求积分 $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x\,dx\ (a>0)$ 的存在域, 并用欧拉积分表示该积分.

解 记积分为 I, 可从其表达式确定当 $p>-1$ 时积分收敛. 作代换 $ax=t$, 则就可利用伽玛函数的导数表达式得到

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{a}\right)^p e^{-t}\ln\left(\frac{t}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\,dt\\&=\frac{1}{a^{p+1}}\int_0^{+\infty}t^p e^{-t}\ln t\,dt-\frac{\ln a}{a^{p+1}}\int_0^{+\infty}t^p e^{-t}\,dt\\&=\frac{1}{a^{p+1}}\Gamma'(p+1)-\frac{\ln a}{a^{p+1}}\Gamma(p+1)\\&=\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right].\quad\square\end{aligned}$$

习题 3864(b) 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$.

解 对于积分 $I(m)=\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^3}\,dx$ 用广义积分的敛散性判别法可见当 $-1<m<2$ 时积分收敛, 否则发散.

对积分 $I(m)$ 作代换 $x^3=u$, 并利用贝塔函数的无限区间积分形式 (7.18), 得到

$$\begin{aligned}I(m)&=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{m-2}{3}}}{1+u}\,du\\&=\frac{1}{3}B\left(1-\frac{m+1}{3},\frac{m+1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}\Gamma\left(1-\frac{m+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi(m+1)}{3}},\end{aligned}$$

其中最后一步用了余元公式.

用强函数判别法即可证明在区间 $-1<m<2$ 内对含参变量积分 $I(m)$ 求导可以通过积分号 (请读者补充), 从而得到

$$I'(m)=\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\,dx,$$

因此本题的积分等于 $I'(1)$.

利用前面已经得到的 $I(m)$ 的表达式即可计算得到

$$I'(1)=-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2\pi^2}{27}.\quad\square$$

习题 3865 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,\mathrm{d}x$ 的存在域, 并用欧拉积分表示该积分.

提示 先判定当 $0<p<1,\ 0<q<1$ 时积分存在, 然后利用

$$\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\int_q^p x^{y-1}\,\mathrm{d}y,$$

将原来的积分化为积分号下求积, 即积分顺序的交换问题求解. □

习题 3866 求积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,\mathrm{d}x$ 的存在域, 并用欧拉积分表示该积分.

提示 记积分为 I, 则有

$$I=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-1}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{-p}(1-x)^{-1}\,\mathrm{d}x,$$

因此可以将 I 看成为

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}[\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon)],$$

然后用狄利克雷公式计算即可. □

习题 3868 (拉比积分) 求积分 $\displaystyle\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$.

解 从命题 7.9 的余元公式 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ $(0<x<1)$ 出发, 取对数, 在 $[0,1]$ 上积分, 就可得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\ln\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)\mathrm{d}x\\&=\ln\pi-\int_0^1\ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

然后对左边第二个积分作代换 $1-x=t$, 并将变换后的积分中的积分变量 t 又改记为 x, 于是左边的两项相等. 又对于最后一式中的积分作代换 $\pi x=s$, 然后利用对称性和 §4.4.1 的习题 2353(a) (欧拉积分) 的答案, 就得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin s\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin s\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=\ln\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$ □

习题 3869 (拉比积分) 求积分 $\displaystyle\int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$.

提示 将积分对 a 求导并利用 $a=0$ 时的上题的答案. □

习题 3874 (欧拉乘积) 证明等式:

$$\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty}x^{m-1}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

解 记等式左边为 I. 用代换 $x^n=t$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t$, 于是有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}x^{m-1}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{m}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)\ \ (m=1,\cdots,n).\end{aligned}$$

这样就可以将要求证的等式的左边变为

$$I=\frac{1}{n^n}\prod_{m=1}^{n}\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)=\frac{1}{n^n}\prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big).$$

将上式右边的连乘积记为 E, 并用余元公式, 则有

$$\begin{aligned}E^2&=\prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)\cdot\prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\Big(\frac{n-m}{n}\Big)\\&=\prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-m}{n}\Big)=\prod_{m=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}.\end{aligned}$$

现在引用一个三角恒等式

$$\prod_{m=1}^{n-1}\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},\tag{7.22}$$

即可得到 $E^2=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$. 将其开平方后代入 I 的表达式中就得到所要求证的等式.

最后补充证明恒等式 (7.22). 它是更为一般的恒等式的特例. 在 [26] 的 §29 "一些三角函数的和与积的计算"中的例 18 给出了恒等式

$$\prod_{m=0}^{n-1}\sin\Big(x+\frac{m\pi}{n}\Big)=\frac{\sin nx}{2^{n-1}}.\tag{7.23}$$

两边除以 $\sin x$ (即 $m=0$ 的因子), 令 $x\to 0$ 就得到 (7.22).

对于 (7.22) 的较简明的证明见 [11] 的第二卷 531 小节的 6°, 其方法如下 (它与 §4.1.1 的习题 2192 中所用的方法相似).

引入记号 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{n}}$, 从因式分解

$$z^n-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$$

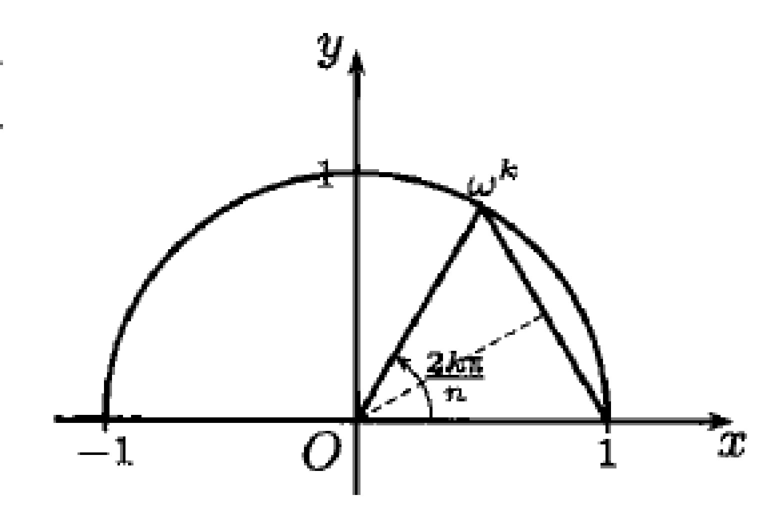
出发, 两边除以 $z-1$, 再取极限 $z\to 1$, 由于左边为 $\lim\limits_{z\to 1}(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=n$, 即可得到

$$n=(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}).$$

将此式两边取模, 得到 $n=|1-\omega|\cdot|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}|$. 对其右边的因子计算得到有明显几何意义的等式 (如附图所示就是复平面上点 1 到 ω^k 之间的距离):

$$\begin{aligned}|1-\omega^k|&=\Big|1-\Big(\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big|\\&=2\sin\frac{k\pi}{n}\ \ (k=1,2,\cdots,n-1),\end{aligned}$$

代入前式即得 (7.22). □



习题 3874 的附图

注 整个证明过程中主要就是计算 $E = \prod\limits_{m=1}^{n-1} \Gamma\Big(\dfrac{m}{n}\Big) = n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$, 它称为欧拉乘积, 且为更一般的高斯公式的特例, 参见 [11] 第二卷 536 小节.

习题 3875 证明等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = 1$.

解 在积分中用代换 $x^n = t$, 则 $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t$, 于是有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)=\lim_{n\to\infty}\Gamma\Big(1+\frac{1}{n}\Big)=\Gamma(1)=1. \quad \square\end{aligned}$$

习题 3876 利用等式 $\dfrac{1}{x^m} = \dfrac{1}{\Gamma(m)}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{m-1}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\ (x>0)$, 求积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^m}\,\mathrm{d}x \quad (0<m<1).$$

提示 将题中所给的等式代入上述积分中, 就成为积分顺序交换问题, 其合理性可参考 §7.3.2 的习题 3812.1 (狄利克雷积分) 的解 3 中的说明. □

习题 3878 (欧拉公式) 证明:

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x;$$

$$\text{(b)}\ \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x;$$

其中 $\lambda>0,\ x>0,\ -\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

解 1 改记 $\lambda\cos\alpha = a$, $\lambda\sin\alpha = b$, 又将两个积分看成为参变量 b 的函数, 固定 $x>0$ 和 $a\in\Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)$, 分别记为

$$u(b)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-at}\cos bt\,\mathrm{d}t,\quad v(b)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-at}\sin bt\,\mathrm{d}t,$$

并记 $w(b)=u(b)+\mathrm{i}v(b)$.

利用题设条件可知 $a>0$. 这时对上述两个积分的被积函数关于 b 的导数用 $t^x\mathrm{e}^{-at}$ 为强函数, 即可证明命题 7.4 的条件满足, 于是 u 和 v 对 b 的导数都可以在积分号下进行, 从而得到

$$u_b'=-\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-at}\sin bt\,\mathrm{d}t,\quad v_b'=\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-at}\cos bt\,\mathrm{d}t,$$

然后用分部积分法得到

$$\begin{aligned}w_b'=(u+\mathrm{i}v)_b'&=\mathrm{i}\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-at}(\cos bt+\mathrm{i}\sin bt)\,\mathrm{d}t=\mathrm{i}\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b)t}\,\mathrm{d}t\\ &=-\frac{\mathrm{i}t^x}{a-\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}+\frac{\mathrm{i}x}{a-\mathrm{i}b}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b)t}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{\mathrm{i}x}{a-\mathrm{i}b}w.\end{aligned}$$

由此即可得到

$$w\cdot(a-\mathrm{i}b)^x=C,$$

其中常数 C 待定. 用 $b=0$ 代入, 利用

$$u(0)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a^x}\Gamma(x),\quad v(0)=0,$$

即可确定 $C=w(0)a^x=\Gamma(x)$. 将它代入 $w(b)$, 并利用 $a^2+b^2=\lambda^2$ 和 $a+\mathrm{i}b=\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, 就可得到所要求证的等式:

$$\begin{aligned}w(b)&=u(b)+\mathrm{i}v(b)=\frac{\Gamma(x)}{(a-\mathrm{i}b)^x}=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^{2x}}(a+\mathrm{i}b)^x\\&=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^{2x}}(\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^x=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}(\cos\alpha x+\mathrm{i}\sin\alpha x).\quad\square\end{aligned}$$

解 2 (**概要**) 将两个等式左边的积分看成为参变量 α 的函数, 分别记为 $u(\alpha)$ 和 $v(\alpha)$, 然后验证它们对 α 求导可通过积分号, 且计算得到 $u'(\alpha)=-xv(\alpha)$ 和 $v'(\alpha)=xu(\alpha)$, 于是问题归结为求解二阶常微分方程 $u''(\alpha)+x^2I(\alpha)=0$. 详见 [9]. □

解 3 (**概要**) 将两个积分分别记为 u 和 v, 在 $u-\mathrm{i}v$ 的积分表达式中作代换 $z=\lambda t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, 得到

$$u-\mathrm{i}v=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}}{\lambda^x}\int_0^{+\infty}z^{x-1}\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}}{\lambda^x}\Gamma(x),$$

然后等置两边的实部和虚部即得 (见 [5]). 只是这里的代换以及代换后的积分路径都已经超出了数学分析的范围. 关于在复域中的伽玛函数的讨论见 [31] 的第十二章. □

习题 3879 求曲线

$$r^n=a^n\cos n\varphi\ \ (a>0, n\ \text{为正整数})$$

的弧长.

解 该曲线是由 n 个相同的封闭圈所组成的, 设此曲线全长为 L, 则按照曲线弧长的极坐标计算公式有

$$\begin{aligned}L&=2n\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\varphi=2na\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\cos^{\frac{1}{n}-1}n\varphi\,\mathrm{d}\varphi\ \ =2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{n}-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=a\mathrm{B}\Big(\frac{1}{2n},\frac{1}{2}\Big).\quad\square\end{aligned}$$

注 若再用命题 7.10 的勒让德加倍公式, 则还可得到弧长的另一种形式:

$$\begin{aligned}L&=a\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2n}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\Big)}=a\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2n}\Big)\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}-1}\Gamma\Big(\frac{1}{2n}\Big)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)}\\&=a\,2^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{\Gamma^2\Big(\frac{1}{2n}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)}.\end{aligned}$$

§7.5 傅里叶积分公式 (习题 3881–3900)

内容简介　傅里叶积分是傅里叶级数在非周期函数情况的推广, 本节是有关的计算题训练.

对傅里叶积分的理解可以从与 §5.6 的傅里叶级数作对比开始.

傅里叶积分公式为:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda, \tag{7.24}$$

积分号下的"系数"为:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi, \\ b(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{7.25}$$

在 §5.6 中与 (7.24) 对应的就是函数的傅里叶级数展开式:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

而与 (7.25) 对应的就是计算傅里叶系数的欧拉–傅里叶公式 (5.22):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \ \ (n \geqslant 0),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \ \ (n \geqslant 1).$$

从物理上来看, 傅里叶级数就是将复杂的振动分解为许多个谐振动的叠加, 其中若复杂振动的频率为 ω, 则各个谐振动的频率均为 ω 的倍数. 将它们的振幅按频率排列就得到离散的频谱. 由上述对比可见, 傅里叶级数是对周期性复杂振动的离散频谱分析, 而傅里叶积分则是对非周期性的复杂振动的连续频谱分析. 它们在光学、声学和无线电技术等方面都很重要.

习题 3881–3895 就是对于给定的函数 $f(x)$, 用公式 (7.25) 计算其傅里叶积分中的系数 $a(\lambda)$ 和 $b(\lambda)$, 并根据收敛性定理得到傅里叶积分 ("展开式") (7.24). 这与 §5.6 中的傅里叶级数的计算题的意义相同, 也就是进行频谱分析.

习题 3896–3899 则是傅里叶变换的计算题. 实际上傅里叶变换只是傅里叶积分及其系数的复数形式①. 与上面的比较相似, 傅里叶变换可以与复傅里叶级数作类比.

在傅里叶级数展开式中用欧拉公式于 $\cos nx$ 和 $\sin nx$, 并记 $c_n = a_n - \mathrm{i}b_n$, $c_{-n} = a_n + \mathrm{i}b_n = \bar{c}_n$, $n = 0, 1, \cdots$, 就得到复傅里叶级数

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

这时的傅里叶系数也可以写成为复数形式:

① 由于复数同时含有振幅和相位的信息, 在多数应用领域中, 傅里叶级数和傅里叶积分都是以复数形式出现和使用的.

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

现在将公式 (7.25) 的 $a(\lambda), b(\lambda)$ 代入 (7.24) 中, 就可得到

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

由于 $f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)$ 关于 λ 为偶函数, 因此上式可改写成为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

又因 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$ 关于 λ 为奇函数, 因此至少在柯西主值意义上有 (参见 §4.4.4)

$$0 = \text{v.p.}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right].$$

用欧拉公式合并以上两式就得到 (在柯西主值意义上成立的)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

将上式分拆开来, 一般称

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{7.26}$$

为 $f(x)$ 的傅里叶变换, 而称

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda \tag{7.27}$$

为 $F(\lambda)$ 的逆傅里叶变换①.

于是可见, 一方面上述两个变换公式与傅里叶级数的复形式很相似, 另一方面, 傅里叶变换的两个公式本身又非常相似. 在许多应用领域中, 将 x 改记为 t, 代表时间, 而将 λ 改记为 ω (或 f), 代表频率, 则傅里叶变换就是从时域到频域的转换, 而其逆变换就是从频域到时域的转换.

如同函数可展开为傅里叶级数的收敛性理论一样, 傅里叶积分以及傅里叶变换也有相似的收敛性理论. 如《习题集》所指出, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 又与其导函数在任何有限区间上均分段连续, 则在 f 的连续点上傅里叶积分公式 (7.24) 成立, 而在不连续点上, 该公式左边应换成为 $\dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

在数学分析教科书中, 对傅里叶积分作较详细介绍的主要有 [11] 的第三卷的 §19.6 和 [33] 的第二卷的 §18.3. 在 [7] 的第二卷的 §4.13, [6] 的第一卷和 [22] 的一卷二分册中也有傅里叶积分的材料. 此外还有关于傅里叶积分的理论和应用方面的专著.

① 在各种文献中所用的傅里叶变换及其逆变换的定义可能略有差别, 其中包括在两个积分前的系数可能分别取为 1 和 $\dfrac{1}{2\pi}$, 而在被积函数中的指数函数的指数中所取的符号也可能与这里相反.

还可以指出, 傅里叶变换与 §7.3.3 中的拉普拉斯变换有密切联系, 同时也是求解某些偏微分方程的有力工具 (例如见 [6] 的第二卷). 本节最后的一个习题 3900 则是求解积分方程的计算题.

习题 3881 用傅里叶积分表示 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

解 由于 $f(x)$ 为偶函数, 因此 $b(\lambda)=0$. 计算得到

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

由于函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 同时又与其导数在任何有限区间上分段连续, 因此在连续点处, 即当 $|x|\neq 1$ 时, 成立

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda,$$

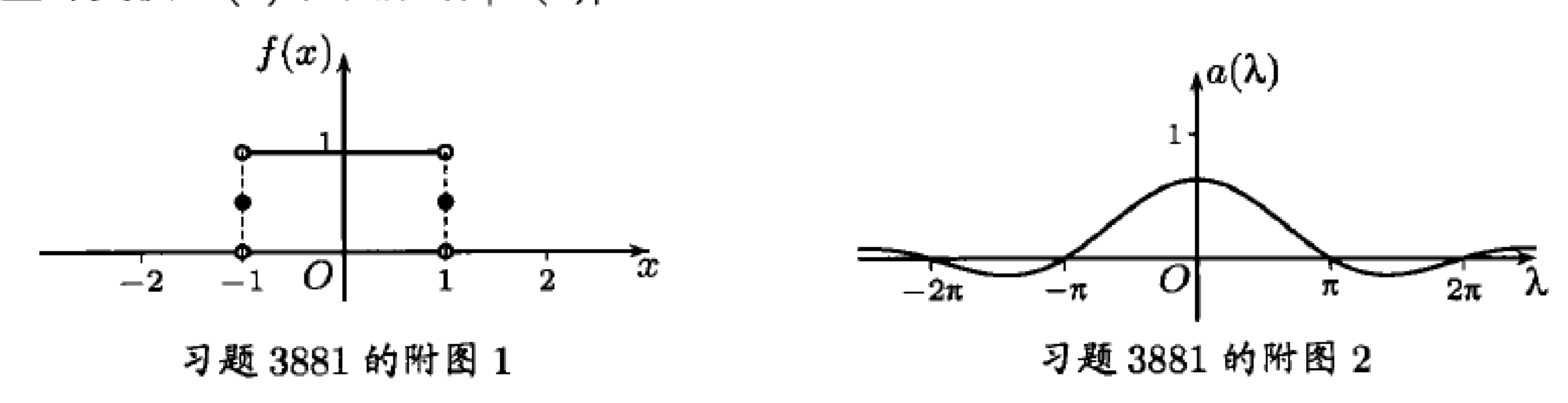
而在不连续点处, 即于 $x=\pm 1$ 处, 由于

$$\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{f(-1-0)+f(-1+0)}{2}=\frac{1}{2},$$

因此有

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\,\mathrm{d}\lambda.$$

在下面的附图 1 中作出了 $f(x)$ 的图像. 在附图 2 中作出了 $a(\lambda)$ 的图像. 由于 $b(\lambda)=0$, 而从 (7.25) 和 (7.26) 可知有 $F(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}[a(\lambda)+\mathrm{i}b(\lambda)]$, 因此也可知道本题函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $F(\lambda)$ 以及频谱 $|F(\lambda)|$ 的大致形状. □



习题 3881 的附图 1　　习题 3881 的附图 2

注 本题的傅里叶积分公式, 无论是在连续点还是不连续点处, 都可以从 §7.4 的狄利克雷积分直接得到.

习题 3886 用傅里叶积分表示函数 $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2}\ (a>0)$.

解 由于 $f(x)$ 是奇函数, 因此 $a(\lambda)=0$. 计算得到

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\xi}{a^2+\xi^2}\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=\mathrm{e}^{-a\lambda}\ \ (\lambda>0),$$

其中引用了 §7.3.2 的习题 3826 的拉普拉斯积分 L_1 的答案.

这时的傅里叶积分的等式

$$\frac{x}{a^2+x^2}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$$

可以从右边的广义积分直接得到 (见 §4.4.1 的习题 2347). 由于本题的 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非绝对可积, 因此本节中所说的收敛性充分条件不满足. □

注 当 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非绝对可积时, 在 [11] 的第二卷 714 小节中给出了傅里叶积分公式成立的其他充分性条件.

习题 3889 用傅里叶积分表示函数 $f(t)=\begin{cases}A\sin\omega t, & |t|\leqslant\dfrac{2\pi n}{\omega},\\ 0, & |t|>\dfrac{2\pi n}{\omega}\end{cases}$ (n 为正整数).

提示 此题计算不难, 只是可以看到, 当 n 充分大时, $f(t)$ 的频谱高度集中在 $\lambda=\omega$ 的附近, 请读者对此作出解释. □

习题 3898 对于函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 求其傅里叶变换.

解 如在导出 (7.26) 时所说, 傅里叶变换的积分表达式是在柯西主值意义上来定义的, 因此对本题就有

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

利用 §7.3.1 的习题 3809 的答案, 即可得到 $F(\lambda)=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. 这表明函数 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的傅里叶变换就是其自身. □

习题 3900(a) 求函数 $\varphi(x)$, 设

$$\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,\mathrm{d}y=\frac{1}{1+y^2}.$$

解 设 $\varphi(x)$ 在偶延拓后在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足傅里叶积分收敛的条件, 则按照公式 (7.26) 可知其傅里叶变换为

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\lambda^2},$$

因此只要再作傅里叶逆变换即可得到 $\varphi(x)$. 由于 F 是 λ 的偶函数, 于是可按照 (7.27) 计算如下:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda=\mathrm{e}^{-x}\ \ (x\geqslant 0),\end{aligned}$$

其中最后一步利用了 §7.3.2 的习题 3825 (拉普拉斯积分 L) 的答案. □

注 本题是关于未知函数 $\varphi(y)$ 的积分方程, 它是否还有其他解是需要研究的. 在 [11] 的第三卷 718 小节的例题 3) 的底注中指出, 已经证明这类积分方程的连续解不会多于一个.

第八章 重积分、曲线积分和曲面积分

内容简介 本章包含了多元积分学的全部内容, 共有 17 节, 其中前 10 节从二重积分、三重积分到多重积分, 包括它们在几何和力学上的应用, 后 7 节为曲线积分、曲面积分和场论初步.

§8.1 二重积分 (习题 3901–3983)

内容简介 按照习题的内容分成六个小节. 第一小节中包括从二重积分的定义到中值定理和平均值有关的习题, 第二小节主要是在直角坐标下的二次积分顺序交换以及有关的一些计算题, 第三和第四小节则是与极坐标变换和一般坐标变换有关的习题. 第五小节是含参变量的二重积分, 最后的补注小节介绍卡塔兰方法.

8.1.1 二重积分的定义与估计 (习题 3901–3915)

这一小节的 15 个习题有多方面的内容, 其中包括积分定义、积分估计、矩形区域上的二次积分计算、积分中值定理等.

习题 3901 把积分 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 当作积分和的极限, 用直线

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\ \ (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分区域分为许多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右上顶点的值, 计算此积分.

解 这时有 $\Delta x_i=\Delta y_j=\dfrac{1}{n}$, $x_i=\dfrac{i}{n}$, $y_j=\dfrac{j}{n}$, $i,j=1,\cdots,n$, 因此有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\Delta x_i\Delta y_j=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{1}{4}.\quad\square$$

注 由于被积函数为 x 乘以 y, 而积分区域为矩形, 因此若用二次积分来计算本题最为方便. 实际上从以上证明已经可以看出有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

这即是后面的习题 3909 的特例.

习题 3905 把积分区域 $S:\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子区域 ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$. 怎样的值 δ 能保证不等式

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)\,\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\,\Delta S_i\right|<0.001$$

成立? 其中 $(x_i,y_i)\in\Delta S_i$.

解 记 ω_i 为被积函数 $\sin(x+y)$ 在子区域 ΔS_i 上的振幅, $i=1,\cdots,n$, 然后利用积分对积分区域的可加性, 并将和式的每一项也写成为积分, 就可以对不等式的左边估计如下:

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)\,\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\,\Delta S_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]\,\mathrm{d}S\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|\,\mathrm{d}S$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i|\Delta S_i|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\omega_i\sum_{i=1}^{n}|\Delta S_i|=\pi\max_{1\leqslant i\leqslant n}\omega_i,$$

其中 $|\Delta S_i|$ 是子区域 ΔS_i 的面积, $i=1,\cdots,n$, π 是区域 S 的面积.

利用拉格朗日微分中值定理, 当 $u\neq v$ 时, 在 u,v 之间存在 ξ, 使得

$$|\sin u-\sin v|=|\cos\xi\cdot(u-v)|\leqslant|u-v|$$

(这即是 §2.6.2 的习题 1251(a)), 于是可见在每一个子区域 ΔS_i 上的被积函数 $\sin(x+y)$ 的振幅 ω_i 可估计如下:

$$\begin{aligned}\omega_i&=\sup_{(x,y),(x',y')\in\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x'+y')|\\&\leqslant\sup_{(x,y),(x',y')\in\Delta S_i}|(x+y)-(x'+y')|\\&\leqslant\sup_{(x,y),(x',y')\in\Delta S_i}(|x-x'|+|y-y'|)\\&\leqslant\sup_{(x,y),(x',y')\in\Delta S_i}\sqrt{2}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=\sqrt{2}\cdot d(\Delta S_i),\end{aligned}$$

其中用了柯西不等式, 并用 $d(\Delta S_i)$ 表示 ΔS_i 的直径.

综合以上, 由于有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\omega_i\leqslant\sqrt{2}\,\delta$, 于是只要取满足以下要求的 δ 即可:

$$\delta<\frac{1}{1000\sqrt{2}\,\pi}\approx 0.000\,225.\quad\square$$

习题 3907 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}xy^2\,\mathrm{d}y$.

解 记 $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x}xy^2\,\mathrm{d}y$, 它是含参变量积分, 参变量 x 既出现在被积函数中, 也出现在积分限中. 先计算得到

$$F(x)=\int_{x^2}^{x}xy^2\,\mathrm{d}y=x\int_{x^2}^{x}y^2\,\mathrm{d}y=x\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_{x^2}^{x}=\frac{1}{3}(x^4-x^7),$$

然后就可计算得到

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^4 - x^7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{40}. \quad \square$$

注 习题 3906–3908 的意义在于说明二重积分的主要计算方法就是将它转换为二次积分, 其中每一次求积都可以用第四章的一元积分学中的方法来做, 然而内层积分在概念上就是第七章中的含参变量积分. 通常可以将上述题解中的计算过程合并如下:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} xy^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=x^2}^{y=x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^4 - x^7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{40}.$$

习题 3909 证明等式

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^A X(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_b^B Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

其中 R 为矩形 $a \leqslant x \leqslant A,\ b \leqslant y \leqslant B$, 且函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 在相应区间上连续,

分析 这里首先需要考虑本题的出发点是什么. 若已经有了二重积分转化为二次积分的定理, 则本题是平凡的. 我们认为本题应当是从二重积分的定义出发作出证明, 同时假设当被积函数连续时二重积分的存在性已经有保证.

在以上前提下, 本题的证明只需要修改前面的习题 3901 的计算过程即可得到. 具体来说即将区间 $[a, A]$ 和 $[b, B]$ 均作 n 等分, 并将二重黎曼和中的被积函数的取值点选为 (x_i, y_j), 这样就可以如习题 3901 那样, 将二重黎曼和写成为两个一元函数的黎曼和的乘积, 最后取极限即可. $\square$

注 今后我们可以将本题所示的被积函数为 $X(x)$ 与 $Y(y)$ 相乘的情况称为被积函数可分离, 它在矩形区域上的二重积分就是两个一元积分的乘积, 计算特别方便.

习题 3910 设 $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$, 计算

$$I = \int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

解 这里需要对 $f(x, y)$ 加条件, 例如在矩形 $[a, A] \times [b, B]$ 上二元连续. 这时即可用牛顿–莱布尼茨公式计算如下:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^A \left[F'_x(x, y)\Big|_{y=b}^{y=B}\right]\mathrm{d}x = \int_a^A F'_x(x, B)\,\mathrm{d}x - \int_a^A F'_x(x, b)\,\mathrm{d}x \\ &= F(A, B) - F(a, B) - F(A, b) + F(a, b). \quad \square \end{aligned}$$

注 最后得到的 I 的差分表达式已在 §6.6.1 的习题 3591 中见过. 这样的表达式也出现在教科书中关于二元函数的二阶混合偏导数与求偏导的顺序无关的定理中.

习题 3911 设 $f(x)$ 为区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的连续函数. 证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

且仅当 $f(x) =$ 常数时等式成立.

提示 将此题与 §4.3 的习题 2331 比较, 即可看出本题的不等式即是那里的不等式(常称为施瓦茨不等式)

$$\left[\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \psi^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

的特例. 实际上只要取 $\varphi(x) = f(x)$, $\psi(x) \equiv 1$, 就得到所要的不等式. 就证明方法来说, 那里给出的三个方法对本题都有效. 下面用其解 3 给出本题的一个解. □

解 对于二元连续非负函数 $[f(x) - f(y)]^2 \geqslant 0$ 在区域 $[a, b] \times [a, b]$ 上的二重积分, 利用习题 3909 的结论, 就有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} [f(x) - f(y)]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} [f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y + (b-a)\int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

然后将其中积分变量 y 改为 x 再加整理即可.

利用函数 f 连续, 仿照 §4.1.4 的习题 2205 的必要性部分, 就可推出上述不等式成立等号的充要条件是在 $x \in [a, b]$ 和 $y \in [a, b]$ 时成立恒等式

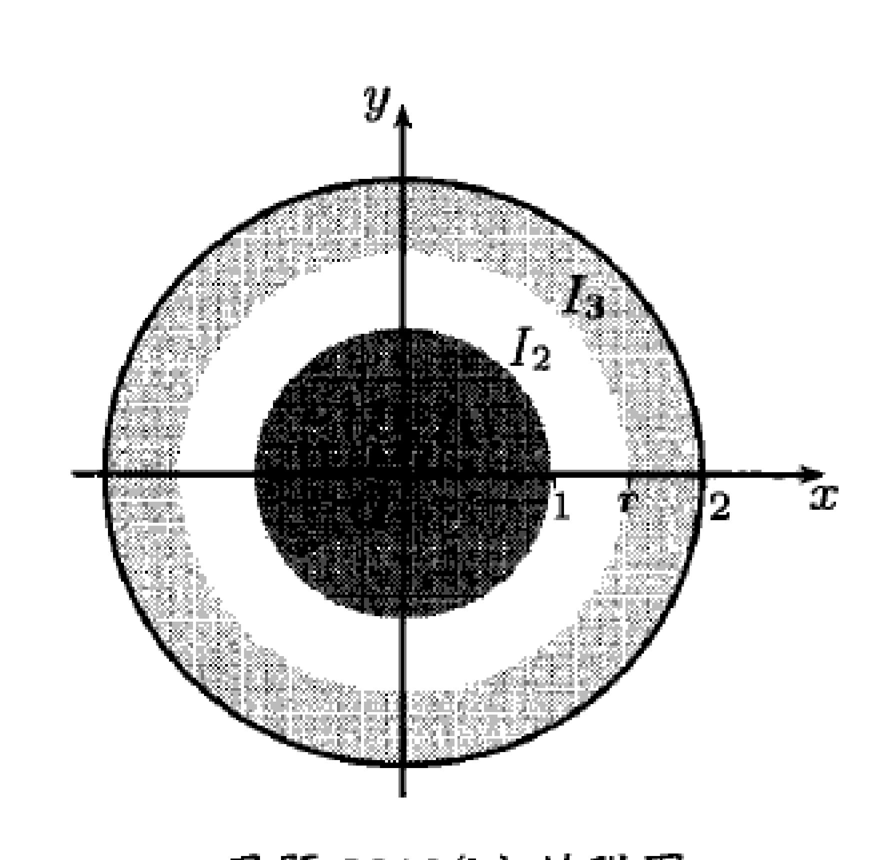
$$f(x) \equiv f(y),$$

而这只可能是函数 f 为常数. □

注 本题给出了在区间 $[a, b]$ 上的函数 f 的积分和 f^2 的积分之间的一个基本关系, 并可推广到有限区间 $[a, b]$ 上的无界函数的广义积分情况. 特别是由此不等式可推出, 若 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上广义可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必定绝对可积.

习题 3912(b) 积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 有怎样的符号?

解 如附图所示, 积分区域是以原点为中心半径为 2 的圆. 从被积函数的表达式可见, 当 $x^2+y^2 < 1$ 时其值大于 0, 而当 $x^2 + y^2 > 1$ 时其值小于 0, 因此在图中用深灰色区域 I_1 表示的圆 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上的积分大于 0, 而在圆环 $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ 上的积分小于 0.



习题 3912(b) 的附图

为了判断上述两个积分之和的符号, 在 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上利用被积函数小于等于 1, 因此其积分可估计为不超过 π, 而在圆环 $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ 上需要估计积分的上界.

由于仅仅有 $x^2+y^2>1$ 不足以得到这样的上界, 可以取某个 $r\in(1,2)$, 如附图所示将上述圆环分解为白色和浅灰色的两个圆环 I_2 和 I_3: 即 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant r^2$ 和 $r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$. 这时对圆环 I_2 只知道其上的积分小于 0, 而对圆环 I_3 则可估计如下.

这时被积函数 $\sqrt[3]{1-x^2-y^2}=-\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\leqslant-\sqrt[3]{r^2-1}$, 而积分区域 I_3 的面积为 $\pi(4-r^2)$, 因此知道有

$$\iint\limits_{I_3}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<-\pi\sqrt[3]{r^2-1}\,(4-r^2),$$

于是得到估计

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint\limits_{I_1\cup I_2\cup I_3}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&<\iint\limits_{I_1\cup I_3}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&<\pi[1-\sqrt[3]{r^2-1}\,(4-r^2)],\end{aligned}$$

而最后一个表达式可以在 r 的很大范围内为负, 例如取 $r=\sqrt{2}$ 或 $r=\sqrt{3}$ 就是如此, 因此本题的积分小于 0. □

注 用极坐标代换也可求解, 这时可利用区域和被积函数只与点到原点的距离有关, 积分符号的确定将转变为一元积分的符号确定问题.

习题 3914 利用中值定理估计积分

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\sin^2 y}.$$

解 由中值定理知道 I 等于积分区域的面积和被积函数在某个点 (ξ,η) 处的值的乘积. 由于积分区域 $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 10\}$ 的面积为 200, 而被积函数的值明显在 $\frac{1}{100}$ 和 $\frac{1}{102}$ 之间, 因此得到

$$\frac{200}{100}=2\geqslant I\geqslant\frac{200}{102}=\frac{100}{51}\approx 1.960\,784.$$

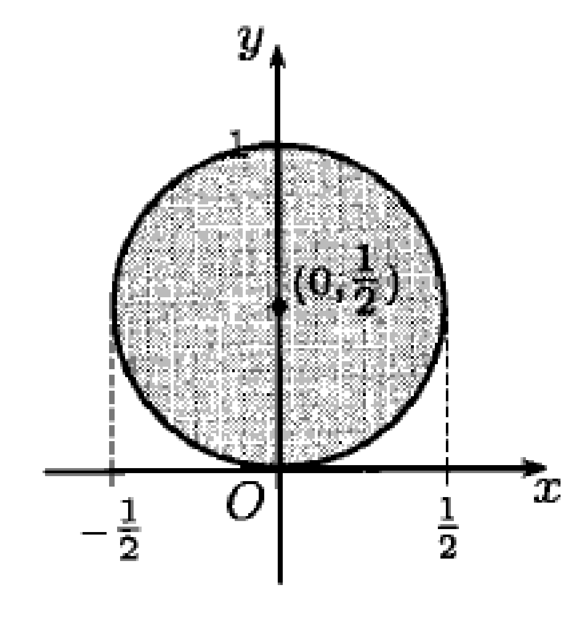
又由于被积函数连续, 而只有当被积函数恒等于 $\frac{1}{100}$ 和 $\frac{1}{102}$ 时积分才能等于 2 和 $\frac{100}{51}$, 因此上述估计的两边的不等式都不可能成立等号. □

8.1.2 直角坐标系中的二重积分计算 (习题 3916–3936)

本节的主要工具是二重积分到二次积分的转换, 在教科书中都已经建立了有关的定理, 以下的习题都是这方面的训练, 其中包括积分限的确定和积分计算.

在习题 3916–3922 中, 对于给定区域 Ω, 按两个不同的顺序安置二重积分的上下限. 下面只举其中一题为例.

习题 3920 给定区域 Ω 为圆 $x^2+y^2\leqslant y$, 对二重积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 依两个不同的顺序安置积分的上下限.



习题 3920 的附图

解 将区域 Ω 的边界 $x^2+y^2=y$ 改写为

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

可见 Ω 是附图所示的以点 $(0,\frac{1}{2})$ 为圆心和半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆.

对于先 y 后 x 的二次积分, 从边界方程可见 x 的范围为从 $-\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{2}$. 这时的圆的上下边界为 $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$, 因此就得到

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x^2})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4x^2})}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

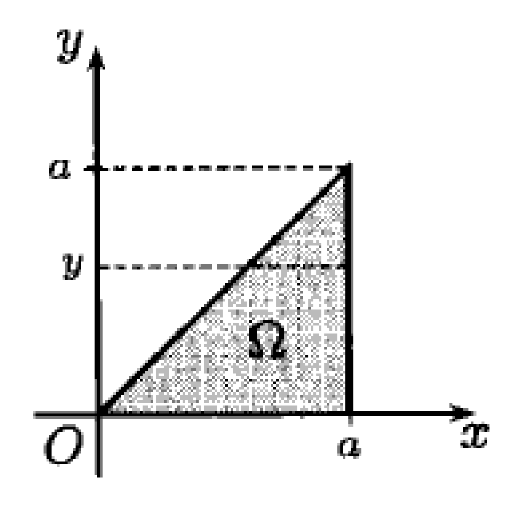
对于先 x 后 y 的二次积分, 从边界方程可见 y 的范围为从 0 到 1. 这时的圆的左右边界为 $\mp\sqrt{y-y^2}$, 因此得到

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x.\quad\square$$

习题 3923–3931 都是与二次积分的积分顺序变换有关的习题. 下面举两个例子, 其中习题 3923 的狄利克雷公式在二次积分的转换中是一个常用公式, 它还可推广到 n 重积分, 见 §8.10 的习题 4202.

习题 3923 (狄利克雷公式) 证明

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x\quad(a>0).$$

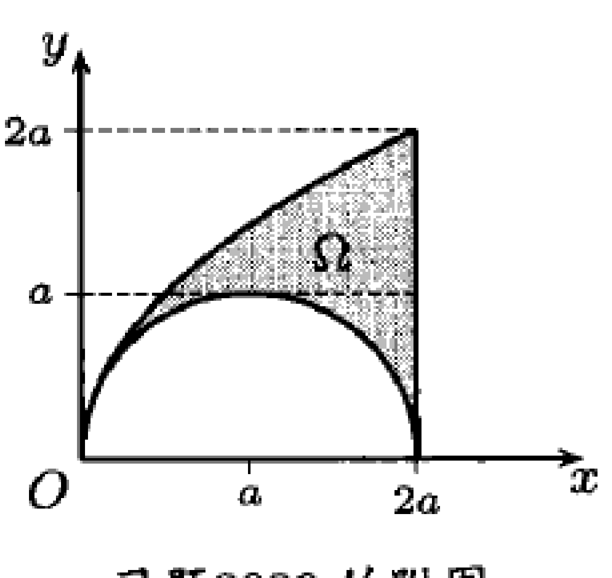


习题 3923 的附图

解 观察公式左边的二次积分, 可见变量 x 的范围为区间 $[0,a]$, 而对于每个固定的 $x\in[0,a]$, 变量 y 的范围为 $[0,x]$, 因此就可定出区域 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant x\}$ 为附图所示的三角形区域.

由此区域 Ω 即可看出, 在其上的二重积分转化为先 x 后 y 的二次积分时, 对于 y 求积的外层积分的范围为从 0 到 a, 而在固定 $y\in[0,a]$ 后, 对于 x 求积的内层积分的范围为从 y 到 a, 这就是公式右边的二次积分. $\square$

习题 3929 改变积分 $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ $(a>0)$ 的积分顺序.



习题3929 的附图

解 由所给的二次积分可见, 变量 x 的范围为区间 $[0,2a]$. 在此范围内区域的上边界的方程为 $y=\sqrt{2ax}$, 也就是抛物线 $x=\frac{1}{2a}y^2$ 的一段弧, 且可以看出当 x 从 0 到 $2a$ 时, 变量 y 也从 0 到 $2a$. 区域的下边界方程为 $y=\sqrt{2ax-x^2}$, 即圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的上半圆 (见附图).

在改变积分顺序为先 x 后 y 时, 由区域 Ω 可见, 其外层积分的积分范围为 y 从 0 到 $2a$, 但在固定 $y_0 \in (0,a)$ 时, 水平直线 $y=y_0$ 与区域 Ω 的边界交于 4 个点, 因此这一部分的积分要分成两项.

将所有边界都表示为 y 的函数, 就可将改变积分顺序后的二次积分写为三项之和:

$$\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_0^a \mathrm{d}y \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_a^{2a} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

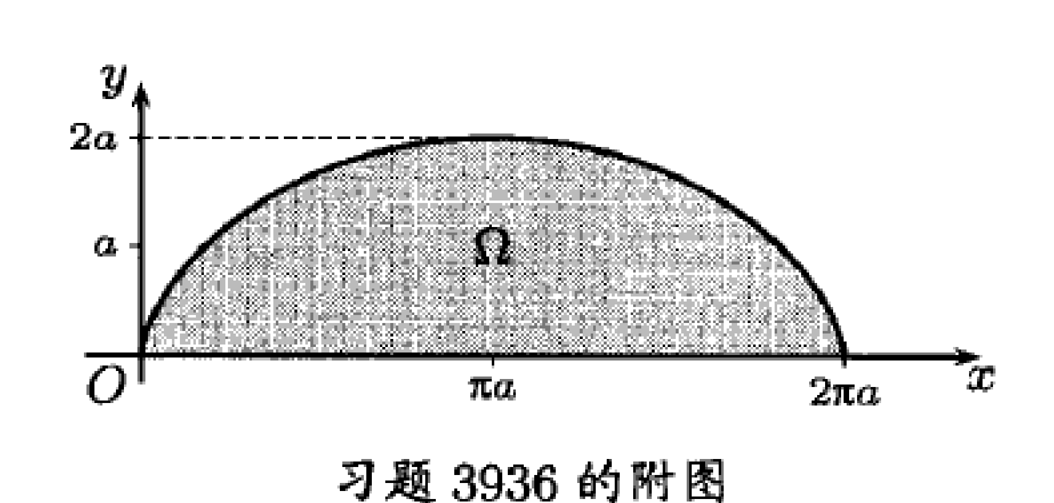
习题 3932–3936 是给定积分区域和被积函数后的二重积分计算. 这时一般有两个二次积分可供选择. 注意它们的计算量可能不一样, 其中之一很难计算或甚至不能直接计算的情况也可能发生. 实际上这种情况前面已经见到过. 用积分号下积分的方法计算含参变量的常义积分就是通过一个二次积分来计算另一个二次积分, 其中就可能遇到这样的情况. 例如, 在 §7.1.2 中的习题 3737 就是如此. 由于这类习题在教科书的相应部分都有, 下面只举一例.

习题 3936 计算积分 $\iint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是被横坐标轴和摆线

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的第一拱所包围的区域.

解 将参数方程记为 $x=x(t), y=y(t)$, 则 $x(t)$ 为严格单调递增. 如附图所示, 区域 Ω 在 Ox 轴方向的范围为 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi a$ (关于摆线的分析可参见 §2.3 的习题 1079), 而当 x 在此范围内固定时, y 的范围为从 0 到 $y(t(x))$, 其中参数 $t=t(x)$ 是 $x(t)$ 的反函数.



习题 3936 的附图

根据区域 Ω 的形状可考虑用先 y 后 x 的二次积分来计算, 于是有

$$\iint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi a} \mathrm{d}x \int_0^{y(t(x))} y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} y^3(t(x))\,\mathrm{d}x.$$

作代换 $x=x(t)=a(t-\sin t)$, 这时 $\mathrm{d}x=a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$, $y(t(x))=y(t(x(t)))=y(t)$, 上述积分即可继续计算下去得到

$$\iint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^4(1-\cos t)^4\,\mathrm{d}t = \frac{16a^4}{3}\int_0^{2\pi} \sin^8\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{32a^4}{3}\int_0^{\pi} \sin^8\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{64a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{64a^4}{3}\cdot\frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{12}\pi a^4. \quad \square$$

8.1.3　极坐标系中的二重积分计算 (习题 3937–3955)

正如在一元积分学的计算中变量代换方法的地位一样, 在二重积分的计算中也经常需要采用变量代换的方法, 其中尤以极坐标代换最为常见.

在用极坐标代换 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ 于二重积分时, 对于初学者必须强调指出, 除了被积函数和积分区域的转换之外, 必须 (在形式上) 将 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 换为 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, 其中的因子 r 不能遗漏. 实际上它有明显的几何意义, 它就是在坐标面 $rO\varphi$ 上以 Δr 和 $\Delta\varphi$ 为边长的小矩形映射为坐标面 xOy 上的曲边四边形的面积的缩放比当 $\Delta r^2 + \Delta\varphi^2 \to 0$ 时的极限. 从二重积分的变量代换的一般理论可知, 这个因子 r 就是极坐标代换下的雅可比行列式 (的绝对值):

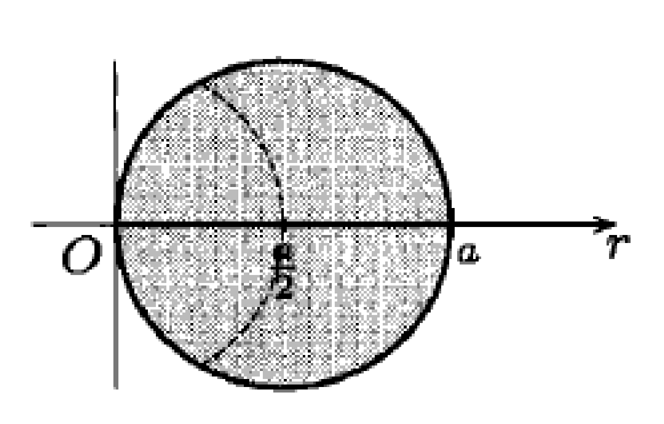
$$\begin{vmatrix} (r\cos\varphi)'_r & (r\sin\varphi)'_r \\ (r\cos\varphi)'_\varphi & (r\sin\varphi)'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

习题 3938 设 Ω 为圆 $x^2 + y^2 \leqslant ax\ (a > 0)$, 对二重积分 $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 作极坐标代换, 并配置其积分限.

解　用 $x = r\cos\varphi$ 和 $y = r\sin\varphi$ 即可将区域 Ω 的边界 $x^2 + y^2 = ax$ 转换为极坐标系中的 $r = a\cos\varphi$.

由此可确定变量 φ 的范围为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 并当 φ 在此范围内固定时, 变量 r 的范围为从 0 到 $a\cos\varphi$, 因此就得到

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r.$$



习题 3938 的附图

另一方面, 也可以写出先 φ 后 r 的二次积分. 这时外层对 r 的积分范围为从 0 到 a, 而当 r 在此范围内固定时, 里层对 φ 的积分范围为从 $-\arccos\frac{r}{a}$ 到 $\arccos\frac{r}{a}$. (在附图中用虚线画出了积分区域内 $r = a/2$ 的一条曲线.) 于是可得到

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.\quad\square$$

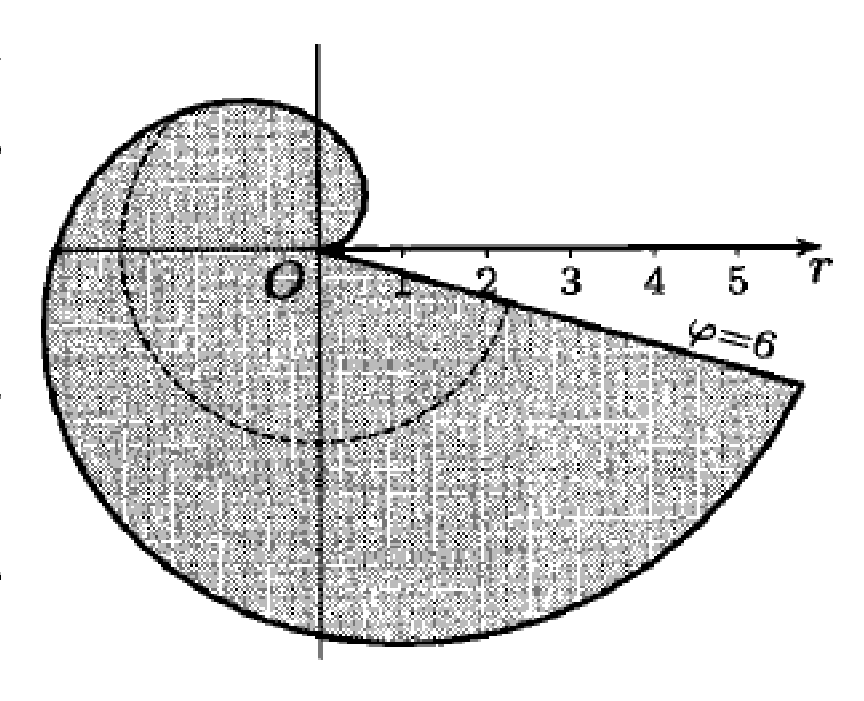
习题 3948 设 r 和 φ 为极坐标, 改变积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}r$ 的积分顺序.

提示　由所给的积分可见积分区域就是习题 3938 的附图中的圆 $x^2 + y^2 \leqslant ax$, 因此与该题有重复之处. $\square$

习题 3950 设 r 和 φ 为极坐标, 改变积分 $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}\varphi \int_0^\varphi f(\varphi, r)\,\mathrm{d}r\ (0 < a < 2\pi)$ 的积分顺序.

解 与直角坐标系情况的习题 3924–3931 类似 (见 §8.1.2 的习题 3929), 先根据给定的二次积分的积分限确定积分区域, 然后写出另一个二次积分.

从所给的二次积分可见, 积分区域的部分边界由 $r=\varphi$ 给出, 它是阿基米德螺线 (参见第一册附录一的习题 371.1(a)). 根据 $0<a<2\pi$, 在附图中作出了积分区域 (其中取 $a=6$), 并在其中用虚线作出了 r 等于常数时的一条曲线. 在该曲线上的变量 φ 的范围是从 r 到 a, 因此就可得到另一个二次积分为



习题 3950 的附图

$$\int_0^a \mathrm{d}r \int_r^a f(\varphi,r)\,\mathrm{d}\varphi. \quad \square$$

习题 3955 用极坐标变换计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

解 记该二重积分为 I, 积分区域为圆环, 其极坐标表示为 $\pi\leqslant r\leqslant 2\pi$, 与变量 φ 无关, 也就是说它的范围为 $[0,2\pi]$. 被积函数在极坐标下为 $\sin r$. 再考虑到从 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 变为 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, 就可以计算如下:

$$I=\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\pi\leqslant r\leqslant 2\pi} r\sin r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\,\mathrm{d}r.$$

其中利用了 §8.1.1 的习题 3909, 即当被积函数可分离时, 矩形区域上的二重积分变为两个一元积分的乘积, 因此可以在上述计算中先求出关于 φ 的积分值 2π.

然后用分部积分法即可得到

$$I=-2\pi\,(r\cos r)\Big|_\pi^{2\pi}+2\pi\int_\pi^{2\pi}\cos r\,\mathrm{d}r=-2\pi(2\pi+\pi)=-6\pi^2. \quad \square$$

8.1.4 一般的二重积分计算 (习题 3956–3977)

在本小节的二重积分计算题中, 多数习题都适宜于用变量代换方法来进行计算. 在选取用什么样的变量代换时一般需要同时考虑被积函数和区域的特点.

与上一小节关于极坐标代换的使用相似, 对于一般的变量代换

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v) \tag{8.1}$$

下的公式

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v))|I|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{8.2}$$

需要做三件事:

(1) 将坐标面 xOy 上的区域 Ω 转换为 uOv 平面上的区域 Ω';

(2) 将被积函数 $f(x,y)$ 转换为 $f(x(u,v),y(u,v))$;

(3) 计算雅可比行列式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)},$$

取其绝对值后乘以上述 (2) 中的 $f(x(u,v),y(u,v))$, 这就是公式 (8.2) 右边的被积函数. 对于极坐标代换就有 $I=r$. 由于一般有 $r\geqslant 0$, 因此不必再取绝对值.

与极坐标代换相似, 雅可比行列式 I 的绝对值有明显的几何意义, 即 $|I|$ 是在坐标面 uOv 上以 Δu 和 Δv 为边长的小矩形映射为坐标面 xOy 上的曲边四边形的面积的缩放比当 $\Delta u^2+\Delta v^2\to 0$ 时的极限. 还可以指出, I 的符号也有明显的几何意义. 若将上述矩形和四边形的边界闭曲线取逆时针方向为正方向, 取顺时针方向为负方向, 则当 $I>0$ 时上述小矩形和曲边四边形的边界方向保持不变, 而当 $I<0$ 时则边界方向相反, 即从正向变为负向或从负向变为正向.

在计算雅可比行列式时, 若代换 (8.1) 以 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 的形式给出, 则下列恒等式是有用的:

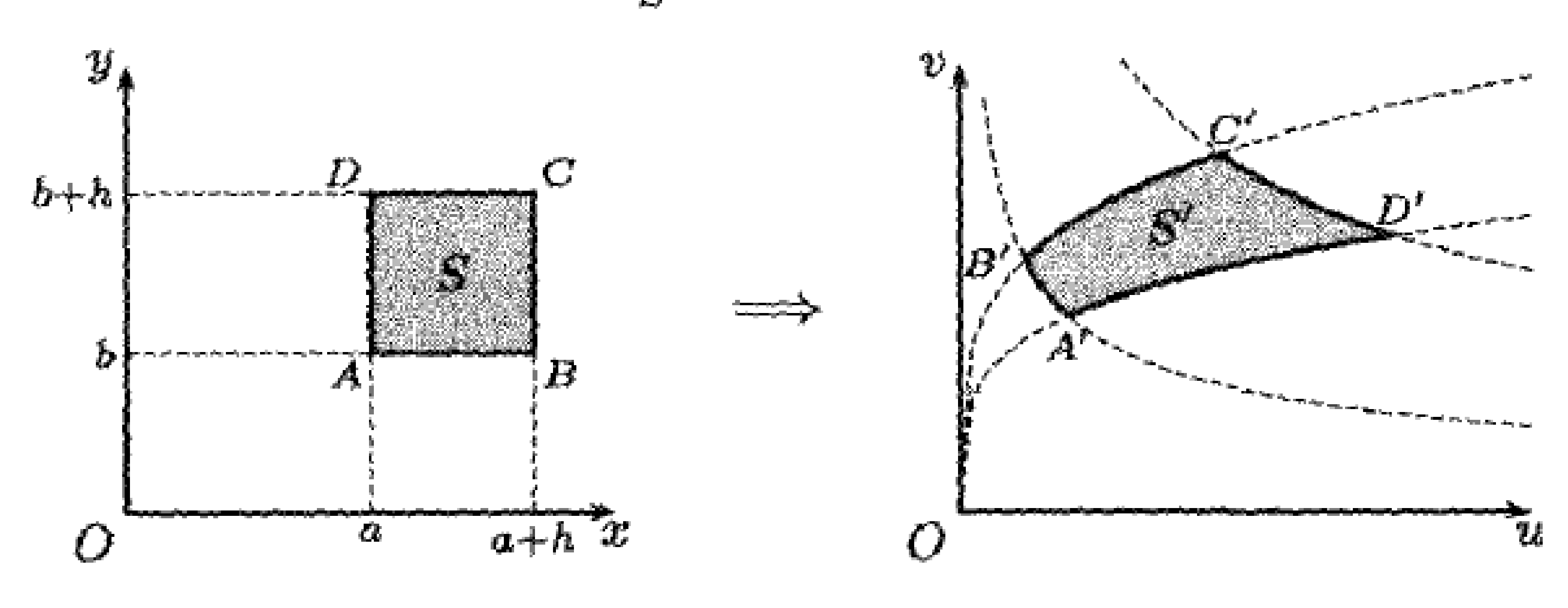
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=1. \tag{8.3}$$

习题 3956 利用函数组

$$u=\frac{y^2}{x},\quad v=\sqrt{xy}$$

把正方形 $S\{a\leqslant x\leqslant a+h, b\leqslant y\leqslant b+h\}$ $(a>0,b>0)$ 变换为区域 S'. 求区域 S' 与 S 的面积之比. 当 $h\to 0$ 时, 此比值的极限等于什么?

解 如附图所示, 其中取 $h>0$, 则 S 的面积 $|S|=h^2$, 而 S' 是一个曲边四边形, 它的面积可以用二重积分写出为 $|S'|=\iint\limits_{S'}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.



习题 3956 的附图

在题设的变换的逆变换下, 区域 S' 映射为正方形 S. 为了应用公式 (8.2) 计算面积 $|S'|$, 先计算雅可比行列式

$$I=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}},$$

然后就有

$$|S'| = \iint\limits_{S} |I| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \int_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}\right) \cdot \left[(b+h)^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}}\right].$$

于是得到所求的比例

$$\frac{|S'|}{|S|} = \frac{6}{5h^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}\right) \cdot \left[(b+h)^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}}\right],$$

且可求出当 $h \to 0$ 时的极限为

$$\lim_{h\to 0} \frac{|S'|}{|S|} = \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad \square$$

注 如本节开始所说, 最后的面积之比的极限恰好等于 $|I|$ 在 $x = a, y = b$ 处的值. 同时雅可比行列式 $I < 0$ 的几何意义也可在附图中看出, 即当正方形 S 的边界 (闭折线) $ABCDA$ 取逆时针方向时, 曲边四边形 S' 的边界 $A'B'C'D'A'$ 却取顺时针方向.

习题 3962 采用适宜的变量代换, 把二重积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

化为一重积分.

解 作代换

$$u = x + y, \quad v = x - y,$$

则有

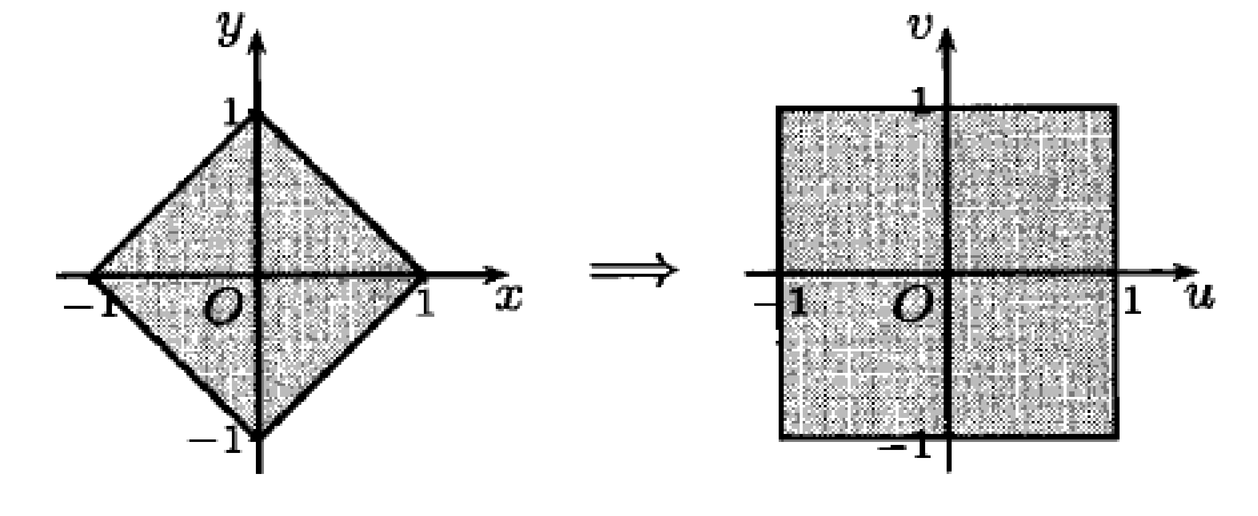
$$x = \frac{1}{2}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v).$$

这时如附图所示, 原题的积分区域

$$\Omega = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$$

变为

$$\Omega' = \{(u,v) \mid |u| \leqslant 1, |v| \leqslant 1\}.$$



习题 3962 的附图

计算雅可比行列式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

因此就可以按照公式 (8.2) 得到

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega'} f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v \int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u. \quad \square$$

注 本题的雅可比行列式 I 的绝对值 $|I| = \frac{1}{2}$ 和 $I < 0$ 都有明显的几何意义. 从附图上即可看出, 在坐标系 Ouv 中求出的面积要乘以 $\frac{1}{2}$ 才能得到坐标系 Oxy 中的面积, 又可看出区域 Ω 的边界取向与在映射后得到的区域 Ω' 的边界取向是相反的.

习题 3971 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 如附图所示, 将积分区域分成 8 个三角形, 并记为 $1,2,3,4$ 和 $1',2',3',4'$. 利用被积函数只与 $x+y$ 有关, 又利用 $|\cos u|$ 关于 $u=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $u=\dfrac{3\pi}{2}$ 的对称性, 可见对于 $n=1,2,3,4$, 被积函数 $|\cos(x+y)|$ 在三角形 n 上的积分与它在三角形 n' 上的积分相等. 因此所求的积分等于在四个三角形 $1',2',3',4'$ 的并集 (即图中的灰色正方形) 上的积分的两倍.

习题 3971 的附图

采用与习题 3962 的相同代换

$$u=x+y,\quad v=x-y,$$

则附图中的灰色正方形区域变为 uOv 平面上的正方形

$$\{(u,v)\mid \frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\},$$

而雅可比行列式的绝对值为 $\dfrac{1}{2}$, 恰好与上面的倍数 2 相抵消, 于是就得到

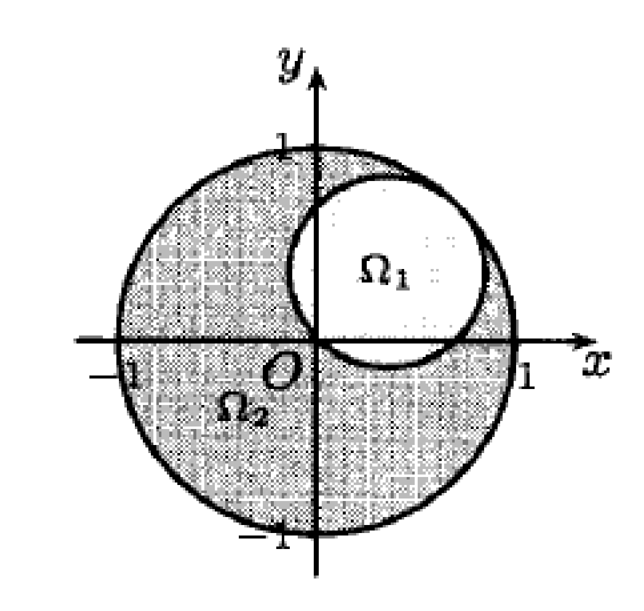
$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos u|\,\mathrm{d}u=\pi\times2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,\mathrm{d}u=2\pi.\quad\square$$

习题 3972 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

解 记 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2$, 则首先要分析满足 $f(x,y)=0$ 的点集. 用配方法可见

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

这样就如附图所示, 可将积分区域 $x^2+y^2\leqslant1$ 分为两个区域 Ω_1 和 Ω_2. 其中 Ω_1 是由 $f(x,y)\geqslant0$ 确定的圆, 而 Ω_2 由 $x^2+y^2\leqslant1$ 与 $f(x,y)\leqslant0$ 共同确定.



习题 3972 的附图

于是就有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint\limits_{\Omega_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Omega_2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint\limits_{\Omega_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

这样就克服了原题中被积函数带有绝对值的困难.

由于最后的两个积分的积分区域都是圆, 因此可分别用极坐标代换进行计算. 对于圆 Ω_1, 令 $x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+r\cos\theta$, $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+r\sin\theta$, $0\leqslant r\leqslant1/2$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, 就得到

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{4}-r^2\Big)r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{32},$$

而对于圆 $x^2+y^2 \leqslant 1$, 则用普通的极坐标代换即可得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(r\cos\theta + r\sin\theta\Big) - r^2\Big]r\,\mathrm{d}r$$

$$= -2\pi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{2}.$$

因此最后的答案是 $2\cdot\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{16}$. □

习题 3977 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数, 证明

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

解 不妨设 m 为奇数, 则可将积分分解为两项如下:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0}} x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\leqslant 0}} x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

然后对于右边的第二个积分作变量代换 $x=-u$, $y=y$. 这时该积分的积分区域变为 $u^2+y^2\leqslant a^2, u\geqslant 0$, 雅可比行列式的绝对值为 1, 于是得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0}} x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{\substack{u^2+y^2\leqslant a^2\\ u\geqslant 0}} u^m y^n\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = 0,$$

这是因为右边两个积分的积分区域和被积函数完全相同. □

注 本题在奇数情况利用对称性得到积分为 0 的简单结论, 这在今后的重积分中是具有典型意义的. 首先是积分区域 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 关于 Ox 轴和 Oy 轴的对称性, 其次是被积函数的奇偶性, 即当 m 为奇数时, 被积函数关于 x 为奇函数, 而当 n 为奇数时, 被积函数关于 y 为奇函数. 本题也可通过将二重积分转化为二次积分来求解.

8.1.5 杂题 (习题 3978–3982)

如果说这里的几个习题有什么共同点, 那就是其中都带有参数, 所以也可说是含参变量的二重积分.

习题 3978 求

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y)$ 为连续函数.

解 1 由于积分区域收缩于原点, 而被积函数有界, 因此所求的极限属于 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 为了克服参变量 ρ 出现在积分区域中的困难, 可以用极坐标代换将积分变为

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\rho}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi} rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

然后即可试用洛必达法则计算如下:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\rho\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{\rho}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi} rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{\pi\rho^2}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{2\pi\rho}=\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=f(0,0).$$

其中最后一步利用了对于含参变量常义积分的求极限运算可以通过积分号的定理. □

解 2 直接按照极限定义可证明所求的极限为 $f(0,0)$ 如下.

对于给定的 $\varepsilon>0$, 利用 $f(x,y)$ 于原点 $(0,0)$ 的连续性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有 $|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$.

于是即可有以下估计:

$$\left|\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-f(0,0)\right|=\left|\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}[f(x,y)-f(0,0)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}|f(x,y)-f(0,0)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\varepsilon.\quad\square$$

解 3 用二重积分的中值定理, 存在点 $(\xi,\eta)\in\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\rho^2\}$, 使得成立

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\cdot\pi\rho^2,$$

以下同解 2, 从略. □

注 本题可以看成是一元积分学中的极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x}{h}=f(0)$ 在二维的推广.

以下的习题 3979–3981 都是计算含参变量的二重积分的导数, 都可用习题 3978 的解 1 中的方法解决, 只是如 [9, 25] 指出, 习题 3979 有错, 因此需要对此作出说明.

习题 3979 设

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}}\mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求 $F'(t)$.

解 因参变量 t 同时出现在积分区域和被积函数中, 作代换 $x=t\xi$, $y=t\eta$, 就有

$$F(t)=t^2\iint\limits_{\substack{0\leqslant\xi\leqslant 1\\0\leqslant\eta\leqslant 1}}\mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta^2}}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

此后对 t 求导应当没有困难.

问题出在被积函数于积分区域内无界, 因此属于广义的二重积分. 从

$$F(t)=\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^t\left(\frac{y^2}{t}\mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\Big|_{x=0}^{x=t}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{t}\int_0^t y^2(\mathrm{e}^{\frac{t^2}{y^2}}-1)\,\mathrm{d}y$$

可见, 对每个 $t>0$, 最后一式中的广义积分总是发散的, 即只能有 $F(t)=+\infty$, 因此原题是错误的. 如 [9, 25] 指出, 若将被积函数改为 $\mathrm{e}^{-\frac{tx}{y^2}}$ 就没有问题了. □

习题 3982 证明: 若 $f(x,y)$ 连续, 则函数 $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

注 本题是含两个参变量 x,y 的二次积分, 直接求导验证即可. 当方程右端的 $f(x,y)\equiv 0$ 时的齐次方程见于 §6.2.5 的习题 3326, §6.4.3 的习题 3488 和《习题集》的习题 3730 等.

8.1.6 补注 (习题 3983)

由于习题 3983 代表了重积分计算中的卡塔兰方法, 它在一定条件下可以将二重积分以及一般的 n 重积分化为单重积分, 因此特设这个小节对它作介绍.

习题 3983 设函数 $f(x,y)$ 的等值线是简单封闭曲线, 区域 $S(v_1,v_2)$ 由曲线 $f(x,y)=v_1$ 及 $f(x,y)=v_2$ 围成. 证明:

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,\mathrm{d}v.$$

其中 $F(v)$ 为曲线 $f(x,y)=v_1$ 与 $f(x,y)=v$ 所围成的面积.

由于习题 3983 中的积分区域过于特殊, 其他条件又有不足, 因此我们将在下面叙述并证明较为一般的卡塔兰方法所需要的命题.

命题 8.1 (卡塔兰定理一) 设 $f(x,y)$ 为有界闭区域 D 上的连续函数, 值域 $f(D)=[m,M]$, 在 $[m,M]$ 上定义的函数

$$F(t)=\iint\limits_{D\cap\{m\leqslant f(x,y)\leqslant t\}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

可微, 且其导函数 $F'(t)$ 在 $[m,M]$ 上可积, 则成立卡塔兰公式

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_m^M tF'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.4}$$

注 (1) 在命题 8.1 中, 积分区域 D 可以与 f 没有直接关系. 若将集合 $\{m\leqslant f(x,y)\leqslant t\}$ 当 $t=M$ 时取为 D, 则可以导出习题 3983 的结论.

(2) $F(t)$ 可微和 $F'(t)$ 可积是命题的结论所需要的. 我们不去研究函数 f 和区域 D 应当满足什么样的条件时可以保证 F 具有以上性质, 而是将条件直接加在 F 上. 从应用的角度来看, 这不构成困难, 因为要用公式之前首先要计算出 F 及其导数.

以下做两方面的推广, 即允许被积函数具有更一般的形式, 同时积分可以是 n 维空间中的 n 重积分. 为简明起见, 在下面的命题中, 对 n 重积分只用符号 $\int$ 来表示, 对于 n 维空间中的点简记为 x, n 重积分的积分元 $\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ 简记为 $\mathrm{d}x$.

命题 8.2 (卡塔兰定理二) 设 f 和 g 都是有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 值域 $f(D)=[m,M]$, h 是区间 $[m,M]$ 上的连续函数, 在 $[m,M]$ 上定义的函数

$$F(t)=\int_{D\cap\{m\leqslant f(x)\leqslant t\}}g(x)\,\mathrm{d}x$$

可微, 且其导函数 $F'(t)$ 在 $[m,M]$ 上可积, 则成立卡塔兰公式

$$\int_D h(f(x))g(x)\,\mathrm{d}x=\int_m^M h(t)F'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.5}$$

注　容易看出, 命题 8.1 是命题 8.2 在 $n=2$, $h(t)=t$ 为恒等映射, $g\equiv1$ 时的特例. 命题 8.2 在 $n=2$ 时的证明见 [11] 第三卷的 597 小节的例题 15), 在 617 小节的例题 16) 则推广到 $M=+\infty$ 的情况, 在 676 小节的例题 17) 则推广到一般的 n 维. 此外, 在 676 小节的例题 18) 和 20) 则还有索宁对卡塔兰公式的进一步推广.

应当指出, 由于在 [11] 中的卡塔兰公式是以斯蒂尔切斯积分 (见该书的 §15.5) 的形式出现的, 因此比本书的上述命题更为一般一些, 其条件的叙述也有所不同.

下面对命题 8.2 给出一个简要的证明.

命题 8.2 的证明　先将函数 $g(x)$ 如下分解为两个非负函数之差,

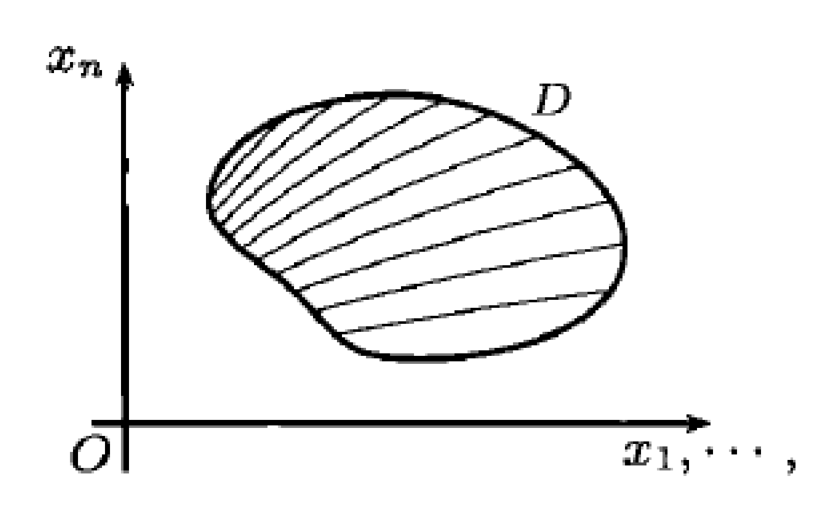
$$g(x)=\frac{|g(x)|+g(x)}{2}-\frac{|g(x)|-g(x)}{2},$$

并将右边的两个分式分别记为 $g_+(x)$ 和 $g_-(x)$, 则有 $g(x)=g_+(x)-g_-(x)$.

由于公式 (8.5) 的左边关于 g 为线性, 而右边的 F' 由 F 的定义可见对 g 也是线性的, 因此只要对于非负的 $g(x)$ 证明命题成立, 然后用上述分解即可推知对于一般的 $g(x)$ 命题也成立. (当然这里要假设由 g_+ 和 g_- 确定的 F 分别满足命题中的条件.)

对区间 $[m,M]$ 作分划 $P=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$, 其中 $t_0=m$, $t_n=M$, 相应地就将积分区域 D 用 $f(x)$ 的等值面进行分割 (参见示意图) 并计算如下:

$$\begin{aligned}
&\int_D h(f(x))g(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^n\int_{D\cap\{t_{i-1}\leqslant f(x)\leqslant t_i\}}h(f(x))g(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^n h(f(\xi_i))\int_{D\cap\{t_{i-1}\leqslant f(x)\leqslant t_i\}}g(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^n h(f(\xi_i))[F(t_i)-F(t_{i-1})]\\
&=\sum_{i=1}^n h(f(\xi_i))F'(\eta_i)\Delta t_i,
\end{aligned}$$



用 f 的等值面分割区域 D

其中在开始时使用了积分第一中值定理 (这需要 $g(x)$ 为非负的条件), 得到 $f(\xi_i) \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \cdots, n$. 在最后一步又利用了微分中值定理, 所得到的 $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \cdots, n$. 这时 $f(\xi_i)$ 和 η_i 都在区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 中, 但未必相等.

最后令分划的细度 $\|P\| = \max\{\Delta t_1, \cdots, \Delta t_n\} \to 0$, 并应用布利斯–杜阿梅尔定理 (即 §4.1.2 的习题 2193.1), 就得到所求证的卡塔兰公式 (8.5). □

注　命题 8.2 不仅将命题 8.1 中的卡塔兰公式推广至 n 重积分, 而且还在被积函数方面有推广. 它突破了等值面 (或等值线) 必须依赖于被积函数的条件, 其中 $h(f(x))$ 代表了与等值面有关的因子, 而 $g(x)$ 则是与等值面无关的因子. 若取 h 恒等于 1, 则被积函数就是与等值面无关的 $g(x)$. 当然卡塔兰方法能否成功应用取决于能否比较容易地求出满足可微条件的 $F(t)$, 且 $F'(t)$ 可积.

下面举几个前面的习题为例来说明卡塔兰方法的用法. 当然对它们用卡塔兰方法不一定很便捷, 但可以看出其思路与前面的变量代换方法是不一样的.

习题 3955 的解 2　此题是计算

$$\iint\limits_{\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

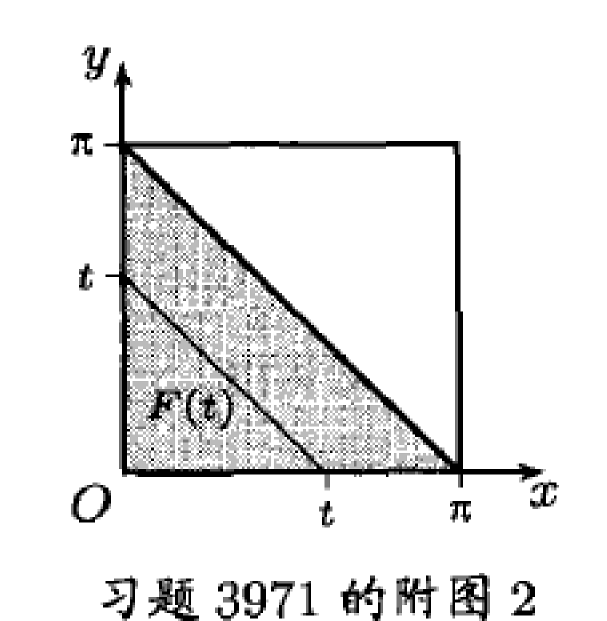
在命题 8.2 中取 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $h(u) = \sin u$, $g \equiv 1$, 则 f 的值域为 $[\pi, 2\pi]$. 由于 $F(t)$ 即是由 $x^2+y^2 = \pi^2$ 与 $x^2+y^2 = t^2$ 所围面积, 因此 $F(t) = \pi(t^2 - \pi^2)$, 于是得到 $F'(t) = 2\pi t$. 这样就由卡塔兰公式 (8.5) 得到公式:

$$\iint\limits_{\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\pi^{2\pi} 2\pi t \sin t\,\mathrm{d}t.$$

以下同解 1. □

习题 3971 的解 2　此题是计算

$$I = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi}} |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



习题 3971 的附图 2

利用对称性, 如附图所示, 只需要计算阴影区所示的三角形区域上的积分再乘以 2 即可.

应用命题 8.2, 取 $f(x,y) = x+y$, $h(u) = |\cos u|$, $g(x,y) \equiv 1$. 这时 f 的值域为 $[0, \pi]$.

如附图所示, $F(t)$ 是直角边长 t 的等腰直角三角形的面积 $\frac{1}{2}t^2$, 因此 $F'(t) = t$. 这样就可以用卡塔兰公式 (8.5) 得到

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^\pi t|\cos t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\right] = 2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

如命题 8.2 所示, 卡塔兰方法是将 n 重积分转化为单重积分的一种方法, 二重积分计算不是它的“特长”. 在 §8.6 和 §8.10 中将会看到卡塔兰方法的更有意义的应用.

§8.2 面积的计算法 (习题 3984–4004)

内容简介　在二重积分中, 取被积函数恒等于 1, 则其积分值就是积分区域的面积. 因此除了 §4.5 中的各种面积计算方法继续可用之外, 现在可以用二重积分及其变量代换来计算区域面积.

这里可以指出, 在 §4.5 中的极坐标系中的面积计算公式, 即由连续的曲线 $r=r(\varphi)$ 和两条射线 $\varphi=\alpha, \varphi=\beta$ 围成的扇形区域的面积为

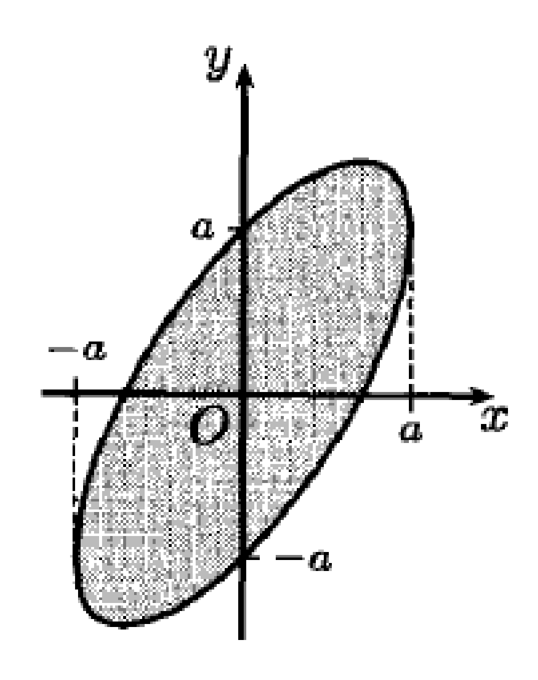
$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

可以由二重积分的极坐标代换公式导出:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi)} r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

《习题集》对本节的部分习题给出了用极坐标代换、广义极坐标代换等提示, 但以下我们还是根据具体问题选择适当的解法, 其中包括在 §4.5 中已经学习过的各种面积计算法. 此外, 从几何上了解积分区域的形状是计算其面积的必要准备工作.

习题 3986 求曲线 $(x-y)^2+x^2=a^2\ (a>0)$ 所围面积.



习题 3986 的附图

解 1　由解析几何中的二次曲线知识可见, 所给的曲线为以原点为中心的椭圆 (见附图). 直接解出其上下边界为

$$y=x\pm\sqrt{a^2-x^2},$$

其定义域为 $[-a,a]$, 就可以求出所要求的面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_{-a}^{a}\left[\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)-\left(x-\sqrt{a^2-x^2}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi a^2,\end{aligned}$$

因其中最后的积分可看出就是半径为 a 的圆面积. □

解 2　记曲线所包围的椭圆区域为 Ω, 则其面积等于在 Ω 上恒等于 1 的被积函数的积分, 于是就有本质上与解 1 相同, 但用二重积分语言表达的解法:

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}\left[\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)-\left(x-\sqrt{a^2-x^2}\right)\right]\mathrm{d}x=\pi a^2.\end{aligned}$$ □

解 3　利用二重积分的变量代换 $x=u,\ x-y=v$, 则积分区域变为 uOv 平面上的圆 $u^2+v^2\leqslant a^2$, 而雅可比行列式可从 $x=u$ 和 $y=u-v$ 计算得到为

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}=-1,$$

因此就可以计算出所要求的面积为

$$S=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant a^2}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\pi a^2.$$ □

解 4 在 §4.5 的参数方程方法对本题仍然有效. 用 $y = tx$ 代入曲线方程中就有 $x^2(t) = \dfrac{a^2}{1+(1-t)^2}$. 如 §4.5 的命题 4.14 及其注 2 所示, 又利用对称性, 这时即有

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2\,\mathrm{d}t}{1+(1-t)^2} = a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi a^2. \quad \square$$

注 本题只要用代换 $x = ax'$, $y = ay'$ 就可以套用 §4.5 的习题 2406 的答案. 以上几个解法与该题的 10 个解法中的解 5,7,8 等相同.

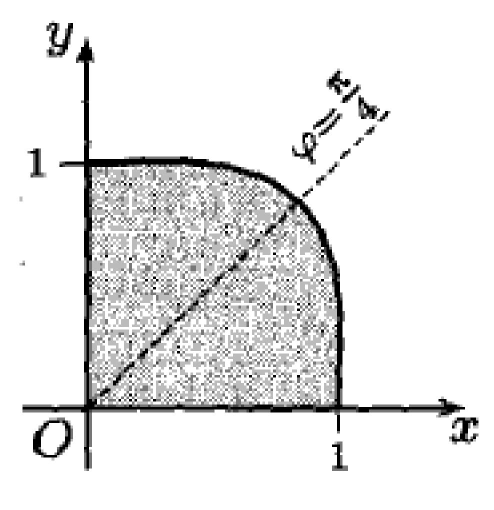
习题 3988 变换为极坐标, 计算曲线 $(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 所围的面积.

解 用 $x = r\cos\varphi$ 和 $y = r\sin\varphi$ 代入即得到极坐标方程为

$$r^2 = \frac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi} \quad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

再利用关于 $\varphi = \pi/4$ 的对称性 (见附图), 就有

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$



习题 3988 的附图

将被积函数作如下形式的分解:

$$\frac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi} = \frac{1}{(\cos\varphi+\sin\varphi)(1-\cos\varphi\sin\varphi)} = \frac{A}{\cos\varphi+\sin\varphi} + \frac{B(\cos\varphi+\sin\varphi)}{1-\cos\varphi\sin\varphi},$$

在去分母后得到

$$A(1-\cos\varphi\sin\varphi) + B(1+2\cos\varphi\sin\varphi) = A+B+(2B-A)\cos\varphi\sin\varphi = 1,$$

因此有 $A+B=1$ 和 $2B-A=0$, 即 $A=\dfrac{2}{3}$, $B=\dfrac{1}{3}$. 这样就得到

$$\frac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi} = \frac{2}{3(\cos\varphi+\sin\varphi)} + \frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{3(1-\cos\varphi\sin\varphi)}.$$

分别对右边的两项求积得到

$$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{1-\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(\sqrt{2}+1);$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\sin\varphi\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\sin\varphi-\cos\varphi)}{1+(\sin\varphi-\cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{2}{3}\arctan(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6}.$$

于是得到 $S = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\ln(\sqrt{2}+1) + \dfrac{\pi}{6}$. $\square$

注 其中的第一个积分的计算利用了 §3.1.3 的公式 (3.4) 之第四个答案:

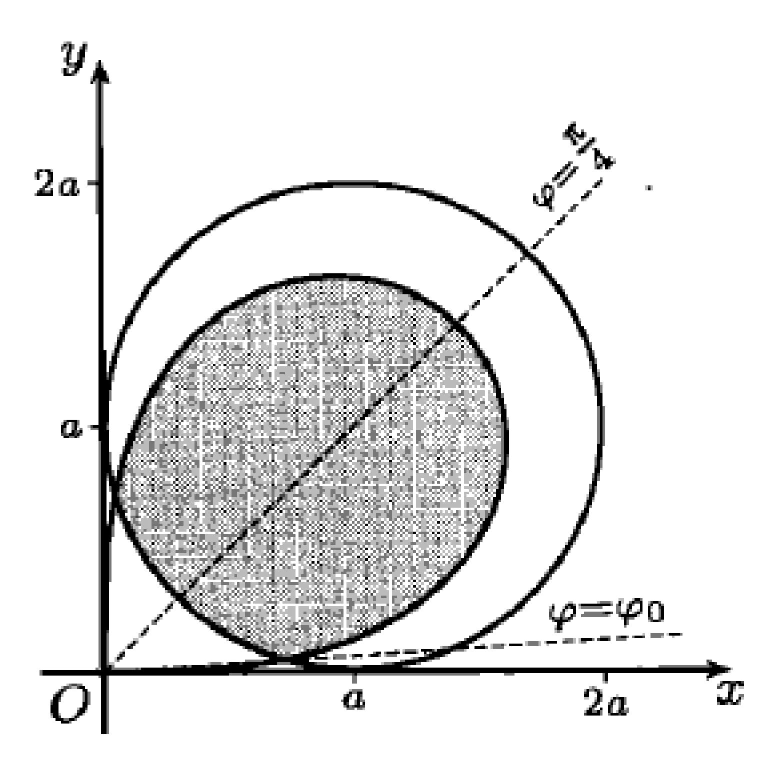
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C.$$

习题 3989 变换为极坐标, 计算曲线 $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$ 所围的面积

提示　此曲线为三叶玫瑰线 (参见 §6.3.2 的习题 3379 及其附图). □

习题 3990 变换为极坐标, 计算曲线 $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$, $(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2$ $(a>0)$ 所围的面积

解　曲线 $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$ 为双纽线, 所围区域分别在一、三象限, 关于原点对称, 而圆 $(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2$ 则在第一象限内, 因此题意是求附图中的阴影区的面积.



习题 3990 的附图

用极坐标得到区域的两段曲线边界的方程为

$r_1^2(\varphi)=4a^2\sin 2\varphi$,

$r_2^2(\varphi)=a^2[1+2\sin 2\varphi-2(\cos\varphi+\sin\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi}\,]$,

且由于区域关于直线 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 对称, 只需要求出它们在 $(0,\pi/4)$ 内的交点为

$$\varphi_0=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\approx 3.6^\circ.$$

于是即可计算所求面积如下:

$$\begin{aligned}
S&=\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{4}}[r_1^2(\varphi)-r_2^2(\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi\\
&=a^2\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{4}}(2\sin 2\varphi-1)\,\mathrm{d}\varphi+2a^2\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-(\sin\varphi-\cos\varphi)^2}\,\mathrm{d}(\sin\varphi-\cos\varphi)\\
&=a^2\big[-\cos 2\varphi-\varphi+(\sin\varphi-\cos\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi}+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)\big]\Big|_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{4}}\\
&=a^2\Big[\cos 2\varphi_0-\frac{\pi}{4}+\varphi_0-(\sin\varphi_0-\cos\varphi_0)\sqrt{\sin 2\varphi_0}-\arcsin(\sin\varphi_0-\cos\varphi_0)\Big].
\end{aligned}$$

从 $\varphi_0=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{8}$ 可求出 $\cos 2\varphi_0=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$, $\sin\varphi_0-\cos\varphi_0=-\sqrt{\dfrac{7}{8}}$ 和

$$\begin{aligned}
S&=a^2\Big(\frac{3\sqrt{7}}{8}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}+\sqrt{\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}+\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}\Big)\\
&=a^2\Big[\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{8}\Big)+\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}\Big]\\
&=a^2\Big(\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}+\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}\Big)=a^2\Big(\frac{\sqrt{7}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}+\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}\Big).
\end{aligned}$$

最后用 §1.8.2 的习题 777 所提供的反正弦加法定理, 当 $xy<0$ 时其中的 $\varepsilon=0$, 即有

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin\big(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\,\big),$$

用 $x=\sqrt{\dfrac{7}{8}}$ 和 $y=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ 代入, 就可将答案简化为 $S=a^2\Big(\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}\Big)$. □

《习题集》对于下面的习题 3991–3995 建议使用广义极坐标代换. 当然有时也可能有更为简便的方法. 此外, 还假设其中的参数均大于 0. 下面只指出习题 3991 不必用广义极坐标代换, 而习题 3992 则是用广义极坐标代换的典型例子.

习题 3991 求由曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}$ 所围的面积.

解 将曲线方程改写为

$$\frac{1}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{2h}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(y-\frac{b^2}{2k}\right)^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2},$$

即可求得该椭圆曲线所围面积为 $S=\dfrac{\pi ab}{4}\left(\dfrac{a^2}{h^2}+\dfrac{b^2}{k^2}\right)$. □

习题 3992 求由曲线 $\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{y^3}{b^3}=\dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{k^2}$ 与 $x=0,\ y=0$ 所围的面积.

解 由方程可见, 曲线位于 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}>0$ 的半平面内. 用 $y=tx$ 引入参数 t, 即容易作出曲线的图像, 并可计算出有渐近线 (附图中是 $a=b=h=k=1$ 时的图像). 由此可见, 该曲线与 $x=0,\ y=0$ 围成的区域在第一象限.

习题 3992 的附图



作广义极坐标代换

$$x=ar\cos^{\frac{2}{3}}\varphi,\quad y=br\sin^{\frac{2}{3}}\varphi,$$

则所求的方程变为

$$r=r(\varphi)=\frac{a^2}{h^2}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^{\frac{4}{3}}\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

计算得到此广义极坐标变换的雅可比行列式为

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\frac{2}{3}abr\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi,$$

于是所要求的面积可用积分表示为

$$\begin{aligned}S&=\frac{2ab}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi)}r\,\mathrm{d}r=\frac{ab}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2(\varphi)\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{ab}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^4}{h^4}\cos^{\frac{8}{3}}\varphi+\frac{2a^2b^2}{h^2k^2}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi\sin^{\frac{4}{3}}\varphi+\frac{b^4}{k^4}\sin^{\frac{8}{3}}\varphi\right)\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{ab}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^4}{h^4}\cos^{\frac{7}{3}}\varphi\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi+\frac{2a^2b^2}{h^2k^2}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{b^4}{k^4}\sin^{\frac{7}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\right)\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

其中第二项可直接积出, 而第一与第三项的积分可以用 §7.4 的 (7.17) 写为贝塔函数, 于是得到

$$S=\frac{a^3b^3}{3h^2k^2}+\frac{ab}{6}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right).$$

利用 §7.4 中提供的工具即可得到

$$\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

于是最后得到答案为

$$S=\frac{a^3b^3}{3h^2k^2}+\frac{2ab\pi}{9\sqrt{3}}\Big(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\Big).\quad\square$$

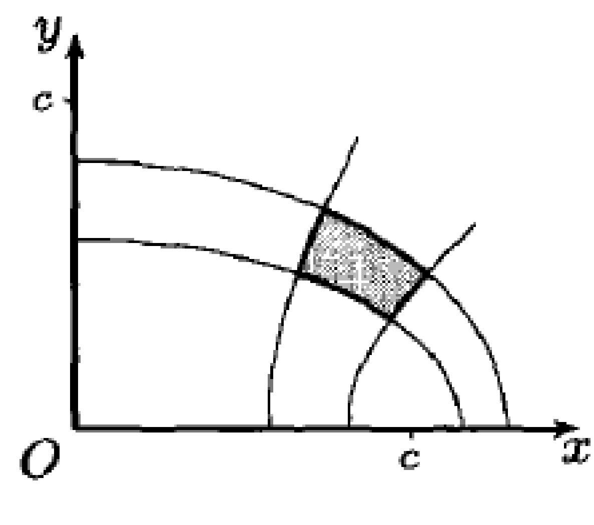
习题 3996–3999 的面积计算需要根据所给定的边界曲线来选取适当的变量代换, 这里不再举例.

习题 4000 进行适当的变量代换, 求下列曲线所围的面积:

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1,$$

其中 λ 取下列各值: $\frac{1}{3}c^2$, $\frac{2}{3}c^2$, $\frac{4}{3}c^2$, $\frac{5}{3}c^2$ $(x>0,y>0)$.

解 由椭圆和双曲线的知识可见, 四条曲线中使得 y^2 项的系数大于 0 的是椭圆, 而该系数小于 0 的是双曲线. 而且它们具有相同的焦点 $(\pm c,0)$ (设 $c>0$).



习题 4000 的附图

如图所示, 可用具有上述共同焦点的椭圆和双曲线来填满所关心的区域, 从而可用隐函数组方程引入变量代换:

$$\frac{x^2}{1+\mu}+\frac{y^2}{\mu}=c^2,\quad \frac{1}{3}\leqslant\mu\leqslant\frac{2}{3};$$

$$\frac{x^2}{1-\nu}-\frac{y^2}{\nu}=c^2,\quad \frac{1}{3}\leqslant\nu\leqslant\frac{2}{3}.$$

不难从上述方程组解出 $x(\mu,\nu),y(\mu,\nu)$ 的显表达式为

$$x=c\sqrt{(1+\mu)(1-\nu)},\quad y=c\sqrt{\mu\nu},$$

并计算得到雅可比行列式为

$$I=\frac{D(x,y)}{D(\mu,\nu)}=\frac{c^2(\mu+\nu)}{4\sqrt{\mu(1+\mu)}\sqrt{\nu(1-\nu)}},$$

于是所求面积的积分为

$$S=\frac{c^2}{4}\Big(\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}\,\mathrm{d}\mu\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\nu(1-\nu)}}+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\mu(1+\mu)}}\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\,\mathrm{d}\nu\Big).$$

以下分别计算其中的四个定积分.

对第一个积分用双曲代换 $\mu=\sinh^2 t$, 被积函数就成为 $2\sinh^2 t$ (参见 §3.1.8 以及其中的习题 1761), 于是就有

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}\,\mathrm{d}\mu=\big[\sqrt{\mu(1+\mu)}-\ln(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu+1})\big]\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{3}-\frac{2}{3}-\ln\Big(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}\Big).$$

对第二个积分用三角代换 $\nu=\sin^2\theta$, 则积分限变为从 $\arcsin\sqrt{1/3}$ 到 $\arcsin\sqrt{2/3}$, 于是就得到

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\nu(1-\nu)}}=2\int_{\arcsin\sqrt{1/3}}^{\arcsin\sqrt{2/3}}\mathrm{d}\theta=2\Big(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\Big)=2\arcsin\frac{1}{3},$$

其中最后一步与前面的习题 3990 的最后一步类似, 需要用 §1.8.2 的习题 777 的反正弦加法定理.

对第三个积分, 可以用处理二次根式的方法求积如下:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\mu(1+\mu)}} = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$= \ln\left|\mu + \frac{1}{2} + \sqrt{\mu(1+\mu)}\right|\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = 2\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}.$$

对第四个积分, 可与第二个积分相同地用代换 $\nu = \sin^2\theta$, 即可求积得到

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\,\mathrm{d}\nu = 2\int_{\arcsin\sqrt{1/3}}^{\arcsin\sqrt{2/3}} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\arcsin\sqrt{1/3}}^{\arcsin\sqrt{2/3}} (1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\arcsin\sqrt{1/3}}^{\arcsin\sqrt{2/3}} = \arcsin\frac{1}{3}.$$

综合以上计算就得到面积为

$$S = \frac{c^2}{4}\left\{2\left[\frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}\right)\right] + 2\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}\right\} \cdot \arcsin\frac{1}{3}$$

$$= \frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\cdot\arcsin\frac{1}{3}. \quad \square$$

习题 4003 求椭球体 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \leqslant a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得截面之面积.

解 此题与 §6.7.4 的习题 3705 相类似, 现采用该题的解 2 中的投影法来解.

从两个方程消去 z 得到

$$3(x^2+xy+y^2) = a^2,$$

这就是截断面的边界在坐标面 xOy 上的投影, 是椭圆曲线. 从 §4.5 的习题 2406 就知道该曲线包围的面积为

$$\frac{a^2}{3}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2a^2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

最后再乘上平面 $x+y+z=0$ 的法线方向在 Oz 轴方向的方向余弦的倒数 $\sqrt{3}$, 就得到所求的截断面面积为

$$S = \frac{2a^2\pi}{3}. \quad \square$$

注 本题除了用习题 3705 的解 1 中的条件极值方法之外, 还可以用坐标系的旋转将问题归结为平面图形的面积计算. 此外还可以参考习题 2406 中的各种解法以找出新的解法.

§8.3 体积的计算法 (习题 4005–4035)

内容简介 在 §4.7 的体积计算局限于用平行 (于某坐标面) 的平面族所得的截面能够求出和旋转体的情况. 这里则以二重积分为工具计算曲顶柱体的体积, 也包括顶部和底部都是曲面片的柱体的体积. 与上一节求平面图形面积的情况相似, 对于所给定的曲面形状的分析和想象是计算曲面所围体积的必要准备工作.

习题 4005 试绘出一物体, 其体积等于 $V=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$.

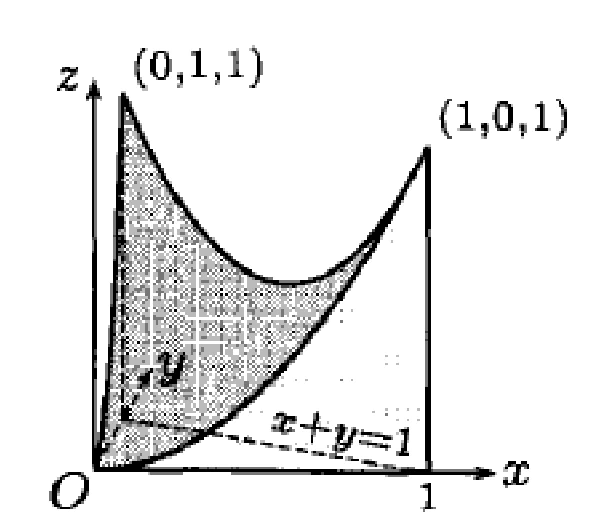
解 由所给的积分可见, 该物体为一曲顶柱体, 底面是在坐标面 xOy (即平面 $z=0$) 上的直角三角形

$$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\},$$

即由直线 $x+y=1$ 和 $x=0, y=0$ 围成, 而顶部是旋转抛物面

$$z=x^2+y^2$$

的一部分.



习题 4005 的附图

如附图所示, 该物体由四个平面 $x=0, y=0, z=0, x+y=1$ 和旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 围成, 在图中的曲顶用较深的灰色表示, 而在坐标面 xOz 上的可见侧面用较浅的灰色表示. □

习题 4006 (d) 绘出具有下列二重积分所表示的体积的物体: $V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

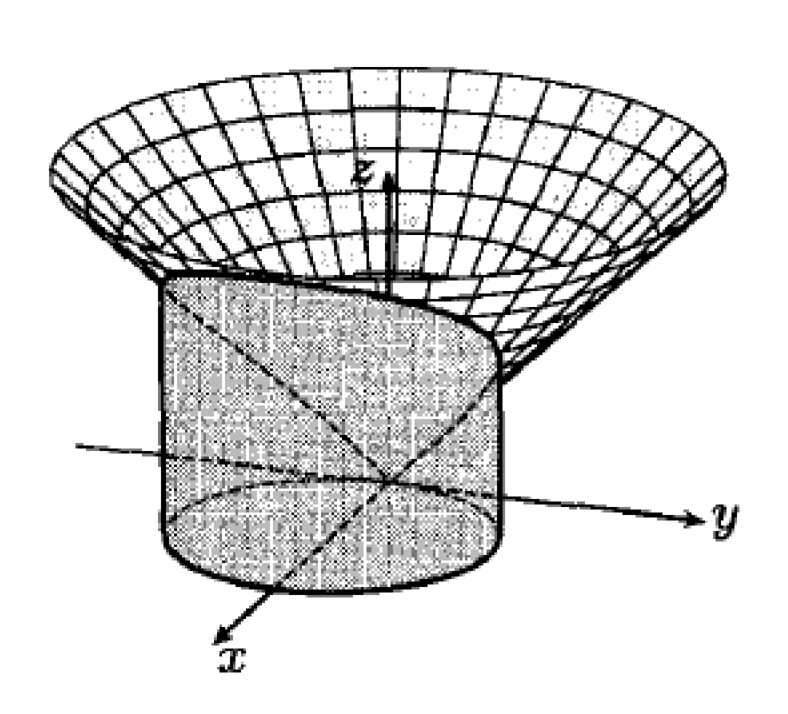
解 由所给的积分可见, 该物体为一曲顶柱体, 底面是在坐标面 xOy 上的圆 $x^2+y^2\leqslant x$, 也就是

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2\leqslant\frac{1}{4},$$

而顶部是圆锥面

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

的一部分. □



习题 4006(d) 的附图

习题 4006 (e) 绘出具有下列二重积分所表示的体积的物体: $V=\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

提示 曲顶柱体的底面是坐标面 xOy 上的四边形 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, x\leqslant y\leqslant 2x\}$, 而顶部则是曲面 $z=\sqrt{xy}$ 的一部分. 注意它不是双曲抛物面, 而是以坐标面 xOy 上的直线 $y=x$ 为对称轴和以原点为顶点的椭圆锥面在第一卦限的部分. 为此只要考虑它与平面 $x+y=u$ $(u\geqslant 0)$ 的交线, 就可以发现是以 $\left(\frac{u}{2},\frac{u}{2},0\right)$ 为中心, 以 $\frac{\sqrt{2}u}{2}$ 和 $\frac{u}{2}$ 为半长轴和半短轴的椭圆曲线的上半部分. □

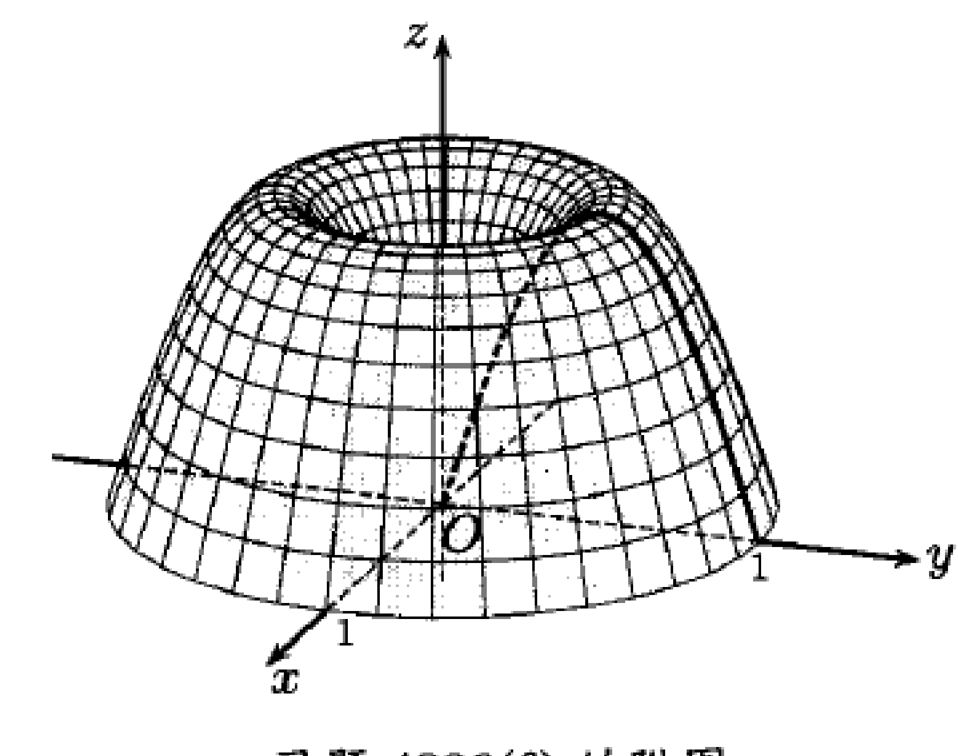
习题 4006(f) 绘出具有下列二重积分所表示的体积的物体:

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 曲顶柱体的底面为坐标面 xOy 上的单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$, 而曲顶是由坐标面 yOz 上的正弦曲线弧 (参见附图)

$$z=\sin(\pi y)\ \ (0\leqslant y\leqslant 1)$$

围绕 Oz 轴旋转得到. 该物体为旋转体. □



习题 4006(f) 的附图

习题 4008 求 $x+y+z=a$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0, y=0, z=0$ $(a\geqslant\sqrt{2}R)$ 所围区域的体积.

提示 利用条件 $a\geqslant\sqrt{2}R$ 可以证明平面 $x+y+z=a$ 与坐标面 xOy 的交线 $x+y=a$ 与原点的距离大于等于 R. 用 $x+y+z=a$ 和 $z=0$ 已经可以从圆柱 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 截取得到一段物体. 题设又用 $x=0$ 和 $y=0$ 将它分为四部分, 但没有说明求哪一部分的体积. 从《习题集》的答案可知它是第一卦限中的那部分的体积. □

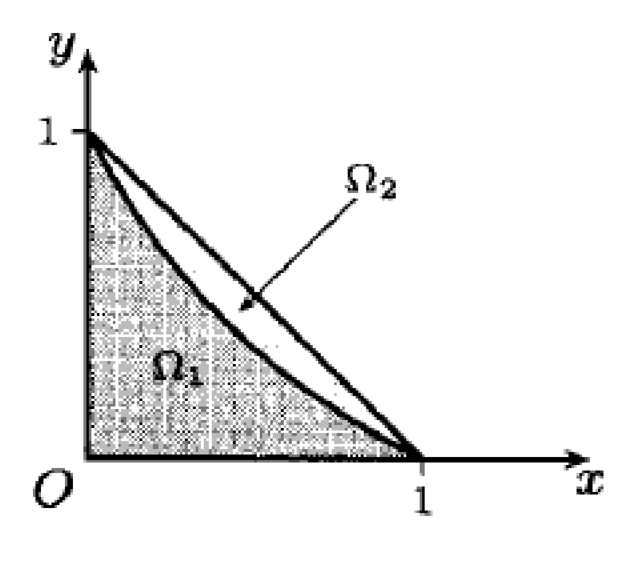
习题 4011 求 $z=\sin\dfrac{\pi y}{2x}$, $z=0, y=x, y=0, x=\pi$ 所围区域的体积.

提示 该曲顶柱体的底面是平面 $z=0$ 上由直线 $y=0$, $y=x$, $x=\pi$ 围成的直角三角形. 注意到这个区域内有 $0\leqslant y\leqslant x$, 因此曲面 $z=\sin\dfrac{\pi y}{2x}$ 在平面 $z=0$ 的上方. 又对本题而言, 在用二次积分计算二重积分时, 积分顺序的适当选取是非常重要的. □

习题 4012 求 $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$ 所围区域的体积.

分析 $z=xy$ 是双曲抛物面 (即马鞍面), 且在坐标面 xOy 的第一、三象限内 $z>0$, 而在第二、四象限内 $z<0$. 由此可知所求的曲顶柱体在第一卦限内, 其底为 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成的直角三角形, 而其曲顶是由 $z=1-x-y$ 和 $z=xy$ 的两片组成的. 因此需要求出它们的交线, 然后分为两个积分求积. □

解 从曲面 $z=xy$ 和平面 $x+y+z=1$ 消去 z, 即得到 $xy+x+y=1$, 这就是它们的交线在坐标面 xOy 上的投影. 将该方程写为 $(x+1)(y+1)=2$, 即可看出它是坐标面 xOy 上以点 $(-1,-1)$ 为中心的直角双曲线的一部分.



习题 4012 的附图

于是如附图所示, 曲顶柱体的底为上述曲线段分为两个区域 Ω_1 和 Ω_2, 它们的曲顶方程分别为 $z=xy$ 和 $z=1-x-y$, 因此体积可分为两个二重积分计算如下:

$$V=\iint\limits_{\Omega_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_2}(1-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}y\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\Big[\frac{x(1-x)^2}{(1+x)^2}+(1-x)^2-\frac{(1+2x)(1-x)^2}{(1+x)^2}\Big]\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x(1-x)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\Big(x^2-3x+4-\frac{4}{1+x}\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{17}{12}-2\ln 2.\quad\square$$

以下几个习题中的体积计算用极坐标代换较为方便. 还可指出, 如前面 §8.2 的习题 3992 所示, §7.4 的贝塔函数的三角积分形式 (7.17) 往往是有用的.

习题 4013 求由曲面 $z^2=xy$ 和 $x^2+y^2=a^2$ 所围区域的体积.

分析 如前面的习题 4006(e) 中所说, $z^2=xy$ 是以直线 $x=y, z=0$ 为对称轴和以原点为顶点的椭圆锥面, 而从方程可以确定关于坐标面 $z=0$ 对称而分别处于 $z\geqslant 0$ 和 $z\leqslant 0$ 的两部分. 由它们在 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 内围成的物体关于每一个坐标面都对称, 因此其体积为

$$V=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

计算的结果比《习题集》的答案大一倍, 这表明后者只是在 $z=0$ 与 $z=\sqrt{xy}$ 之间的部分的体积. □

习题 4016 求由曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x^2+y^2\geqslant a|x|$ $(a>0)$ 所围区域的体积.

解 利用 §4.7 的习题 2466 (及其附图) 对于维维亚尼体的体积计算, 本题的区域就是从球 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 中挖去两个维维亚尼体后的所余部分. 由于已知维维亚尼体的体积为 $\Big(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\Big)a^3$, 因此本题所求体积为 (已见习题 2466 的注 2):

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}-2\Big(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\Big)a^3=\frac{16}{9}a^3.$$

又如该题的注 1 所示, 用 §4.7 的截面积积分法的计算过程较繁, 下面指出若用二重积分的极坐标变换, 则计算较为简单. 利用对称性, 维维亚尼体的体积为

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}4\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$=-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{4a^3}{3}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\Big)=\Big(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\Big)a^3.\quad\square$$

习题 4018 求由曲面 $z=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$ 和 $x^2+y^2=R^2$ 所围区域的体积.

解 曲顶柱体的底为平面 $z=0$ 上的区域 $x^2+y^2\leqslant R^2$, 曲顶是曲面 $z=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 的一部分. 用极坐标代换就有

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^R=\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}).\quad\square$$

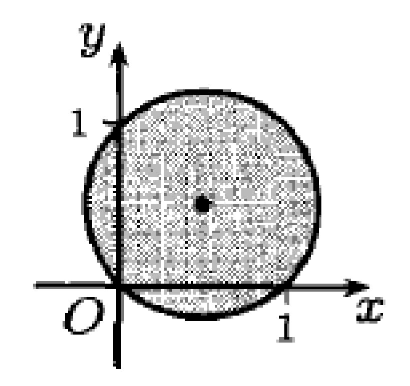
注 本题若将二重积分写成为二次积分, 虽然被积函数 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}=\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\mathrm{e}^{-y^2}$ 可分离, 但由于 e^{-x^2} 和 e^{-y^2} 的原函数不是初等函数, 因此计算不出来. 引入极坐标代换后由于雅可比行列式带来一个因子 r, 从而使得积分变得非常容易.

习题 4020 求由曲面 $z=x^2+y^2$, 和 $z=x+y$ 所围区域的体积.

解 从两个方程消去 z 得到 $x^2+y^2=x+y$, 这就是两个曲面的交线在坐标面 xOy 上的投影, 由此可确定二重积分的积分区域为 Ω 为 $x^2+y^2-x-y\leqslant 0$. 写出

$$x^2+y^2-x-y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=0,$$

可见 Ω 是以点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为圆心和以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆.



习题 4020 的附图

由以上分析可见于 Ω 中的点满足 $x^2+y^2-x-y\leqslant 0$, 因此柱体的顶为 $z=x+y$, 底为 $z=x^2+y^2$, 于是所求的体积即是

$$V=\iint\limits_{\Omega}(x+y-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

根据区域与被积函数的特点取以下的极坐标代换:

$$x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi,\quad y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi.$$

这时区域 Ω 变成为 $r\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, 被积函数 $x+y-x^2-y^2=\frac{1}{2}-r^2$, 雅可比行列式仍为 r, 因此即可计算得到

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}r\left(\frac{1}{2}-r^2\right)\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{8}.\quad\square$$

以下从习题 4021 起的习题中出现的参数均假设大于 0.

习题 4022 求由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 和 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围区域的体积.

提示 第一个曲面是双叶双曲面 (参考 §6.1.1 的习题 3168 及其附图), 第二个曲面是母线平行于 Oz 轴的柱面. $\square$

习题 4025 求曲面 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=0$, $x=0$, $y=0$ 所围区域的体积.

分析 题中的曲面 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$ 是以坐标面 xOy 上的直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ 为中心轴线的柱面 (这方面可以回顾 §6.1.2 的习题 3171). 可以看出它与三个坐标面围成 4 个有界区域, 它们的体积相同, 因此只要求第一卦限的区域的体积即可. 这时的曲顶柱体的底为坐标面 xOy 上的直角三角形区域

$$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leqslant 1\},$$

因此只要用广义极坐标代换

$$x=ar\cos^2\varphi,\quad y=br\sin^2\varphi$$

即可. □

习题 4027 求曲面 $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $(0<a<b)$ 所围区域的体积.

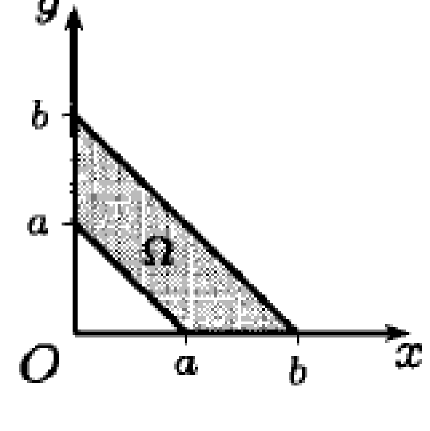
解 1 该曲顶曲底柱体的曲顶和曲底分别为 $z=\sqrt{xy}$ 和 $z=-\sqrt{xy}$ 的一部分, 它们在坐标面 xOy 上的投影为附图所示的四边形区域

$$\Omega=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, a\leqslant x+y\leqslant b\}.$$

根据积分区域 Ω 作变量代换 $x+y=r$, $\arctan\sqrt{\frac{y}{x}}=\varphi$, 这就是广义极坐标代换

$$x=r\cos^2\varphi,\quad y=r\sin^2\varphi,$$

区域 Ω 变为 $a\leqslant r\leqslant b$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.



习题 4027 的附图

计算雅可比行列式为

$$I=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos^2\varphi & \sin^2\varphi\\ -2r\cos\varphi\sin\varphi & 2r\sin\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}=2r\sin\varphi\cos\varphi,$$

又利用曲顶曲底柱体关于平面 $z=0$ 的对称性, 于是得到

$$V=2\iint\limits_{\Omega}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_a^b 2r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}(b^3-a^3).\quad □$$

解 2 利用区域 Ω 的特征, 可将它写成为两个区域之差集:

$$\Omega=\Omega_b-\Omega_a,$$

其中

$$\Omega_b=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant b-x\},$$

$$\Omega_a=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a-x\},$$

是两个相似的等腰直角三角形区域.

于是就有

$$V = 2\iint_{\Omega} \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_b} 2\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{\Omega_a} 2\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

以下分别计算上式右边的两个积分.

对区域 Ω_b 上的积分可计算如下:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_b} 2\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^b 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \int_0^{b-x} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\int_0^b x^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \ (\text{然后作代换 } x = tb)\\ &= \frac{4b^3}{3}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t \ (\text{然后作代换 } t = \sin^2\theta)\\ &= \frac{8b^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{8b^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{8b^3}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\left(1-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{b^3\pi}{12}.\end{aligned}$$

由于区域 Ω_b 与 Ω_a 为相似三角形, 相差只是将 b 换为 a, 可见有 $\displaystyle\iint_{\Omega_a} 2\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{a^3\pi}{12}$, 因此所求体积为

$$V = \frac{\pi}{12}(b^3 - a^3). \quad \square$$

注 上述积分计算也可以如 §8.2 的习题 3992 中那样用贝塔函数来做, 这样就有

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\int_0^b x^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{4b^3}{3}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{4b^3}{3}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{4b^3}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)}\\ &= \frac{4b^3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{12}b^3.\end{aligned}$$

在本章的以下各节的习题中将多次使用这种计算方法.

§8.4 曲面面积的计算法 (习题 4036–4050)

内容简介 在 §4.8 学习了旋转曲面的面积计算方法, 本节则是一般的光滑曲面的面积计算法, 这就是通过面积元 dS 的计算将曲面面积用区域上的二重积分表示出来.

下面分几种情况叙述曲面面积元 dS 的计算公式,

(1) 若曲面由 $z=z(x,y)$ 给出, 则有

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) 若曲面由双参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

给出, 则有

$$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$E=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2,\quad G=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2,\quad F=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'.$$

特别当 $x=u,y=v$ 时, 就有

$$E=1+z_x'^2,\ G=1+z_y'^2,\ F=z_x'z_y',$$

因此 $EG-F^2=1+z_x'^2+z_y'^2$, 就得到情况 (1) 中的表达式.

容易理解 $\sqrt{EG-F^2}$ 的几何意义. 它就是从积分区域内的积分元 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ 到曲面上的面积元 dS 的缩放因子 (或者说比例因子). 对于前者, 它一定大于等于 1.

现给出球坐标表示的曲面的面积元公式 (见 [11] 第二卷的 629 小节的例题 14)).

命题 8.3 若曲面用球坐标表示为

$$x=r(\varphi,\theta)\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r(\varphi,\theta)\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r(\varphi,\theta)\cos\varphi,$$

其中 $r(\varphi,\theta)$ 连续可微, 则曲面的面积元为

$$\mathrm{d}S=r\sqrt{(r^2+r_\varphi'^2)\sin^2\varphi+r_\theta'^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta. \tag{8.6}$$

证 按照前述双参数曲面的计算公式, 先求出

$$x_\varphi'=r_\varphi'\sin\varphi\cos\theta+r\cos\varphi\cos\theta,\quad x_\theta'=r_\theta'\sin\varphi\cos\theta-r\sin\varphi\sin\theta;$$

$$y_\varphi'=r_\varphi'\sin\varphi\sin\theta+r\cos\varphi\sin\theta,\quad y_\theta'=r_\theta'\sin\varphi\sin\theta+r\sin\varphi\cos\theta;$$

$$z_\varphi'=r_\varphi'\cos\varphi-r\sin\varphi,\quad z_\theta'=r_\theta'\cos\varphi,$$

然后即可得到

$$E=r^2+r_\varphi'^2,\quad G=r_\theta'^2+r^2\sin^2\varphi,\quad F=r_\varphi'r_\theta',$$

因此就得到所求的

$$EG-F^2=(r^2+r_\varphi'^2)r^2\sin^2\varphi+r^2r_\theta'^2,$$

将它代入 $\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ 即得.

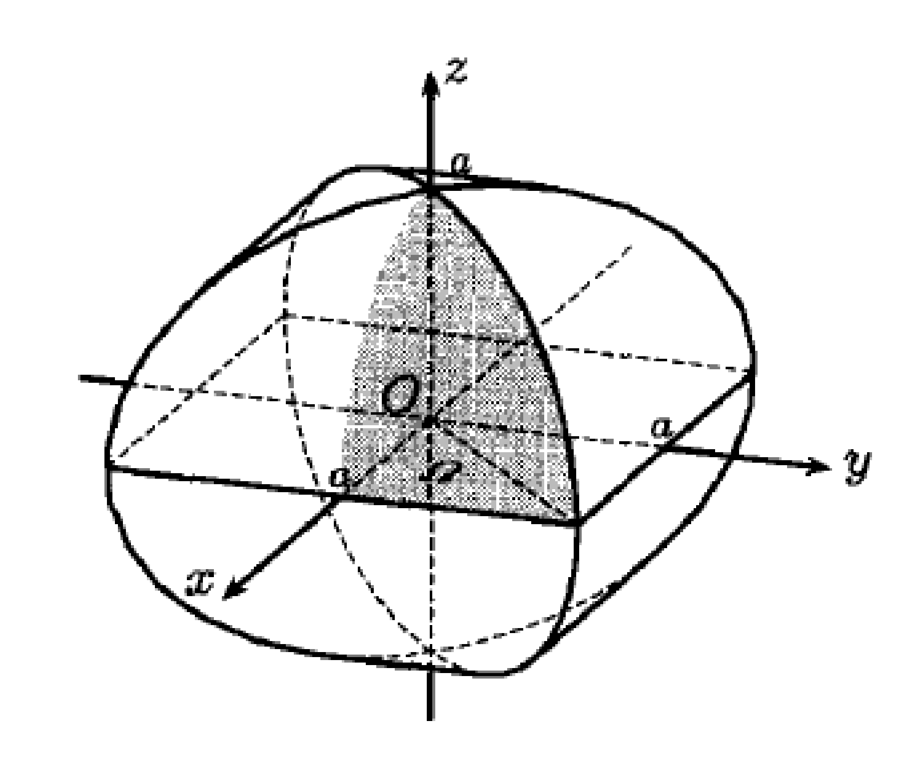
特别当曲面处于球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上时, 则有

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.\quad\square$$

8.4.1 曲面面积计算 (习题 4036–4049)

习题 4037 求以曲面 $x^2+z^2=a^2$ 和 $y^2+z^2=a^2$ 为界的物体的表面积.

解 这个物体已见于 §4.7.2 的习题 2465, 在古代中国数学中名为牟合方盖. 如附图所示, 由对称性可知只需计算出附图中的灰色曲面片, 然后乘以 16 就得到所要求的全表面积.



习题 4037 的附图

这片曲面的方程是 $z^2+x^2=a^2$, 其显表达式是 $z=\sqrt{a^2-x^2}$. 该曲面片在坐标面 xOy 上的投影是一个等腰直角三角形区域 (参见附图):

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant x\},$$

于是可先计算出曲面面积元

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

然后积分得到

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^x\mathrm{d}y\\&=a\int_0^a\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=-a\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a=a^2,\end{aligned}$$

因此牟合方盖的全表面积为 $16a^2$. □

习题 4040 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 之外的部分的面积 (维维亚尼问题).

解 1 §8.3 的习题 4016 是求从球中挖去两个维维亚尼体后所余的体积, 而本题则是求球面上所余的表面积. (维维亚尼体的形状可参见 §4.7 的习题 2466 的附图.)

先计算曲面面积元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

同时利用对称性, 然后即可求得两个维维亚尼体在球面上挖去的面积为

$$\begin{aligned}S&=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2-ax\leqslant 0\\ y\geqslant 0}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ \text{(然后用极坐标代换)}\\&=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=8a^2\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big).\end{aligned}$$

利用已知的球面积公式, 于是本题的答案是

$$4\pi a^2-8a^2\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big)=8a^2.\quad □$$

解 2 本题的曲面在球坐标下就是 $r=a$, 与 φ 和 θ 无关, 因此从命题 8.3 的公式 (8.6) 就得到曲面面积元 $\mathrm{d}S=a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$. 余下的问题是确定变量 φ 和 θ 的范围.

对于满足 $x^2+y^2-ax\leqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$ 的曲面片, 可见有 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. 从 $x^2+y^2=ax$ 和 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 可求得 $z=a\sin\theta$, 再与 $z=a\cos\varphi$ 比较, 可见有 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$. 这样就可以计算两个维维亚尼体从球面挖去的表面积为

$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$=8a^2\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big).\quad\square$$

注　如习题 2466 的注 2 所示, 习题 4016 和本题表明, 由球面等曲面形成的物体的体积及其表面积可以具有与 π 无关的数值. 实际上前面的习题 2465 和 4037 表明牟合方盖也具有这样的特性.

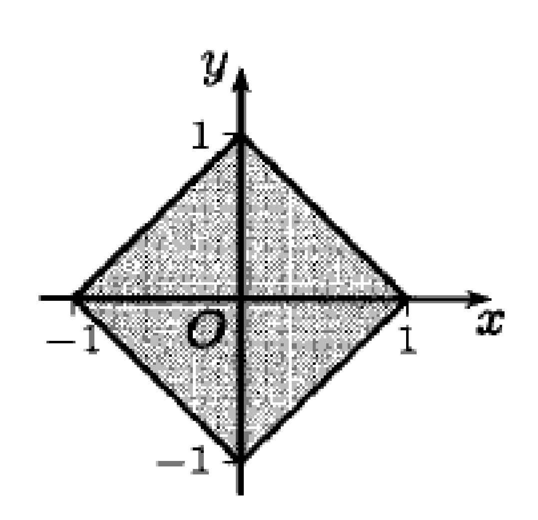
习题 4043 求曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 被平面 $x-y=\pm1,\ x+y=\pm1$ 所截部分的面积.

解 1　如附图所示, 即在灰色区域 Ω 上求双曲抛物面 (即马鞍面) $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 的面积.

先计算 $z'_x=x,\ z'_y=-y,\ \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\sqrt{1+x^2+y^2}$, 于是要计算积分

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

其中已利用区域 Ω 和被积函数的对称性,



习题 4043 的附图

作极坐标代换 $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, 这时第一象限内的 $x+y=1$ 成为 $r(\cos\varphi+\sin\varphi)=1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. 再次利用对称性, 得到

$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/(\cos\varphi+\sin\varphi)}r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left[1+\Big(\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}\Big)^2\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}\mathrm{d}\varphi$$
$$=-\frac{2\pi}{3}+\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[1+\Big(\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}\Big)^2\right]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi.$$

将 $\sin\varphi+\cos\varphi$ 写成为 $\sqrt{2}\cos\Big(\varphi-\frac{\pi}{4}\Big)$, 作代换 $\theta=\frac{\pi}{4}-\varphi$, 则上式右边第二项变为

$$\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[1+\Big(\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}\Big)^2\right]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(3+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{1+\tan^2\theta}\,\mathrm{d}(\tan\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^1\frac{(3+u^2)\sqrt{3+u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{3+u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\frac{\sqrt{3+u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

对上式的第一项可直接求积得到

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{3+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big(\frac{u}{2}\sqrt{3+u^2}+\frac{3}{2}\ln(u+\sqrt{3+u^2})\Big)\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+\frac{3}{4}\ln 3).$$

对第二项则可先作代换 $u=\sqrt{3}\tan t$ 使其有理化后计算如下

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\frac{\sqrt{3+u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sec^3 t\,\mathrm{d}t}{1+3\tan^2 t}=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{(3\sin^2 t+\cos^2 t)\cos t}$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1+2\sin^2 t)(1-\sin^2 t)}\quad(\text{再作代换 } v=\sin t)$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}v}{(1+2v^2)(1-v^2)}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{1-v^2}+\frac{2}{1+2v^2}\Big)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\Big[\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+v}{1-v}\Big|+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}v)\Big]\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ln 3+\frac{8}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

合并以上结果得到所求面积为

$$S=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3+\frac{8}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad\Box$$

注 本题的积分计算较长, 然而就每一步来说, 都只是第三章中较为容易的积分计算.

解 2 在写出曲面积分的积分表达式后, 用坐标轴旋转可引入代换

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),\qquad v=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),$$

于是积分区域变为

$$(u,v)\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]\times[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}],$$

雅可比行列式 $I=1$, 从而积分变为

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}v.$$

然后可再作极坐标代换 $u=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, 并再次利用对称性得到

$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{2}\sec\varphi}{2}}r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r.$$

以下计算与解 1 相同. $\Box$

习题 4046 求以曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 和 $x+y+z=2a\ (a>0)$ 为界的物体的表面积和体积.

解 如附图所示, 这是锥面与平面所限制的物体. 它的表面积由平面 $x+y+z=2a$ 上的椭圆区域和锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 在 $z\geqslant 0$ 中被上述平面割下的部分组成. 它们在坐标面 xOy 上有相同的投影.

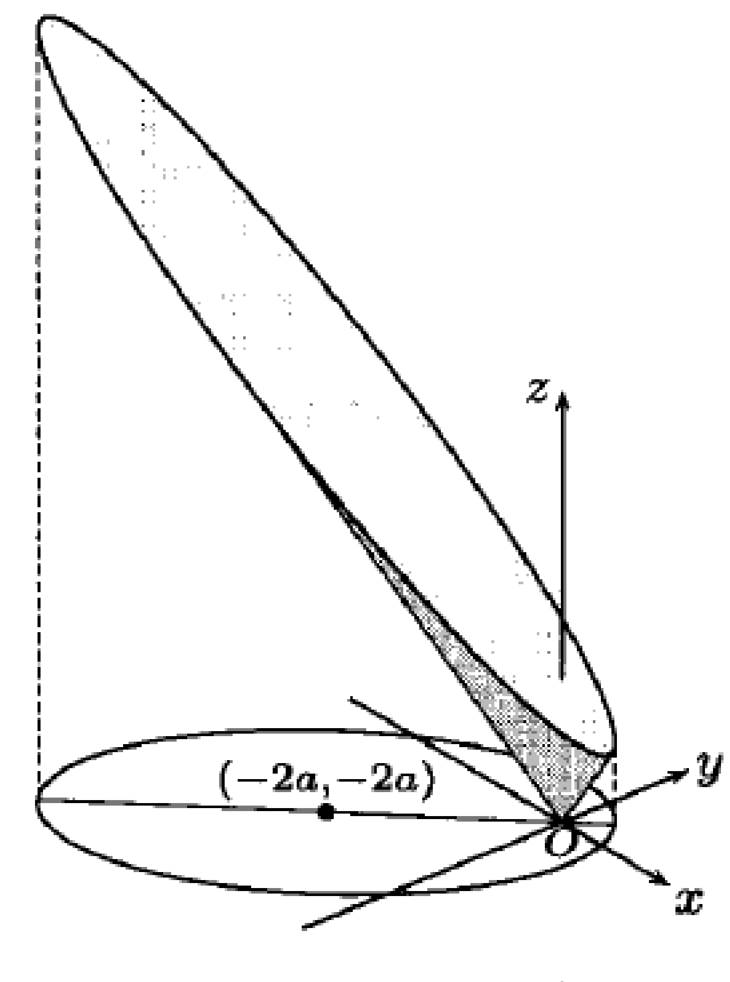
从两个曲面的方程消去 z 得到

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2,$$

它就是曲面的交线在坐标面 xOy 上的投影. 由二次曲线的知识可见它是椭圆. 将它改写为

$$(x+2a)^2+(y+2a)^2-(x+2a)(y+2a)=6a^2,$$

可见椭圆的中心为 $(-2a,-2a)$ (参见附图). 又利用 §4.5 的习题 2406, 从 $A=C=1$, $2B=-1$, 即可知区域 Ω 的面积为 $|\Omega|=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot 6a^2=4\sqrt{3}\pi a^2$.



习题 4046 的附图

将物体在所给平面和锥面上的两部分表面分别记为 S_1 和 S_2 (同时也表示它们的面积), 则对于 S_1, 由方程 $z=-x-y+2a$ 有 $z'_x=-1, z'_y=-1$, 因此有

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\|\boldsymbol{n}\|=\sqrt{3},$$

从而得到

$$S_1=\iint_\Omega \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=|\Omega|\cdot\sqrt{3}=12\pi a^2.$$

对于 S_2, 则由 $z^2=3(x^2+y^2)$ 有 $z'_x=\dfrac{3x}{z}$ 和 $z'_y=\dfrac{3y}{z}$, 因此有

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\frac{9x^2}{z^2}+\frac{9y^2}{z^2}}=2,$$

因此得到

$$S_2=\iint_\Omega 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2|\Omega|=8\sqrt{3}\pi a^2.$$

于是物体的总表面积 $S=(2+\sqrt{3})|\Omega|=(2\sqrt{3}+3)4\pi a^2$.

为求物体的体积, 利用它是锥体, 底面 S_1 的面积已知, 而该锥体的高, 即顶点到底面的距离, 就是原点到平面 $x+y+z=2a$ 的距离 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, 因此体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot 12\pi a^2=\frac{8\pi a^3}{\sqrt{3}}.\quad \square$$

注 本题由于两个比例因子 $\sqrt{EG-F^2}$ 都是常数, 因此计算特别容易. 这在 §6.7.4 的习题 3705 的解 2 等处已经用过. 当然本题也可以用其解 1 中的条件极值方法来解.

习题 4049 求环面

$$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\quad y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\quad z=a\sin\psi\ (0<a\leqslant b)$$

在两条经线 $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ 和两条纬线 $\psi=\psi_1$, $\psi=\psi_2$ 之间的部分的面积. 整个环的面积等于什么?

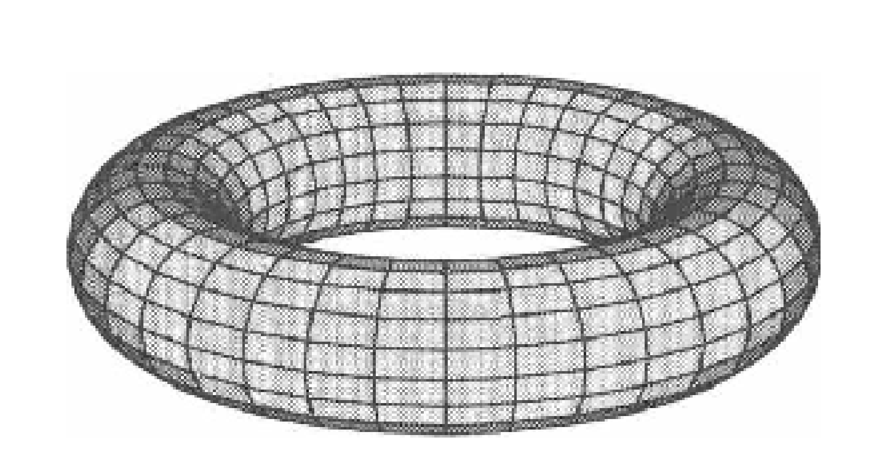
解 如下面的附图所示, 左边是环面, 其中标出了多条经线和纬线. 右边则是用通过 Oz 轴的平面 $y=x\tan\varphi$ 与环面所包围的环形区域交于一个圆, 其中标出了 φ 和 ψ 的几何意义.

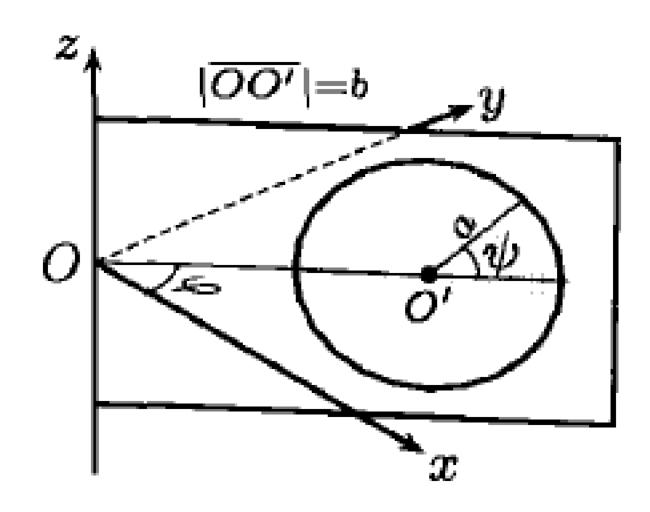
计算得到

$$x'_\psi = -a\sin\psi\cos\varphi, \qquad y'_\psi = -a\sin\psi\sin\varphi, \qquad z'_\psi = a\cos\psi,$$
$$x'_\varphi = -(b+a\cos\psi)\sin\varphi, \quad y'_\varphi = (b+a\cos\psi)\cos\varphi, \quad z'_\varphi = 0,$$

于是有

$$E = x'^2_\psi + y'^2_\psi + z'^2_\psi = a^2, \quad G = x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = (b+a\cos\psi)^2, \quad F = 0,$$





习题 4049 的附图

这样就得到曲面面积元

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi = a(b+a\cos\psi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi.$$

这样就可求出在两条经线 $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ 和两条纬线 $\psi=\psi_1$, $\psi=\psi_2$ 之间的部分的面积为

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2} a(b+a\cos\psi)\,\mathrm{d}\psi$$
$$= a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a\sin(\psi_2-\psi_1)].$$

为求环面的全面积, 只要用 $\psi_1=\varphi_1=0$, $\psi_2=\varphi_2=2\pi$ 代入上述公式就得到

$$S_{\text{全面积}} = 4ab\pi^2. \quad \square$$

注 回顾 §4.8 的习题 2491, 由于圆环面为旋转曲面, 因此在那里已经提供了圆环面的全面积的两种计算方法.

8.4.2 补注 (习题 4050)

为配合习题 4050, 这里给出空间立体角的计算公式及其证明.

首先是立体角的概念及其度量方法. 对于给定的某一点和曲面, 由该点向曲面上的点作射线, 所有这样的射线全体所占有的空间就称为立体角. 它是一个锥体, 上述给定的点就是锥体的顶点. 如以该顶点为球心作出一个单位长度半径的球面, 则上述锥形在此球面上割下一个图形, 它的面积就定义为立体角的度量.

为简单起见下面将原点 O 取为顶点. 对于给定的曲面 S, 记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 为从原点到曲面上动点 (x,y,z) 的矢径向量, $r=\|\boldsymbol{r}\|$ 为其长度, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上的法方向向量, $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角, 在取法方向向量时要求此夹角不超过 90°.

这时有以下命题.

命题 8.4 假设从原点 O 出发到曲面 S 上任意点的射线只与 S 交于一点, 则从 O 看 S 的立体角为

$$\omega = \iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S. \tag{8.7}$$

证 这时用球坐标是合适的, 它与直角坐标系的关系为

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi.$$

根据从原点 O 出发的射线与 S 至多只交一点的条件, 曲面 S 的方程可写为 $r = r(\varphi, \theta)$, 其中 $(\varphi, \theta) \in \Omega_S$.

这时的矢径向量 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 其中 x, y, z 均为 φ, θ 的函数. 根据在命题 8.3 中的计算, 曲面上 θ 和 φ 分别为常数时的曲线的切向量为

$$\boldsymbol{r}'_\varphi = (x'_\varphi, y'_\varphi, z'_\varphi), \quad \boldsymbol{r}'_\theta = (x'_\theta, y'_\theta, z'_\theta).$$

于是曲面的法向量可取为

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_\varphi \times \boldsymbol{r}'_\theta = (n_x, n_y, n_z),$$

其中的分量为

$$\begin{aligned} n_x &= rr'_\theta\sin\theta - rr'_\varphi\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta + r^2\sin^2\varphi\cos\theta, \\ n_y &= -rr'_\theta\cos\theta - rr'_\varphi\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta + r^2\sin^2\varphi\sin\theta, \\ n_z &= r^2\sin\varphi\cos\varphi + rr'_\varphi\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

计算矢径向量 $\boldsymbol{r}$ 和法向量 $\boldsymbol{n}$ 的标量积得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} &= \|\boldsymbol{r}\| \cdot \|\boldsymbol{n}\| \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) \\ &= xn_x + yn_y + zn_z = r^3\sin\varphi, \end{aligned}$$

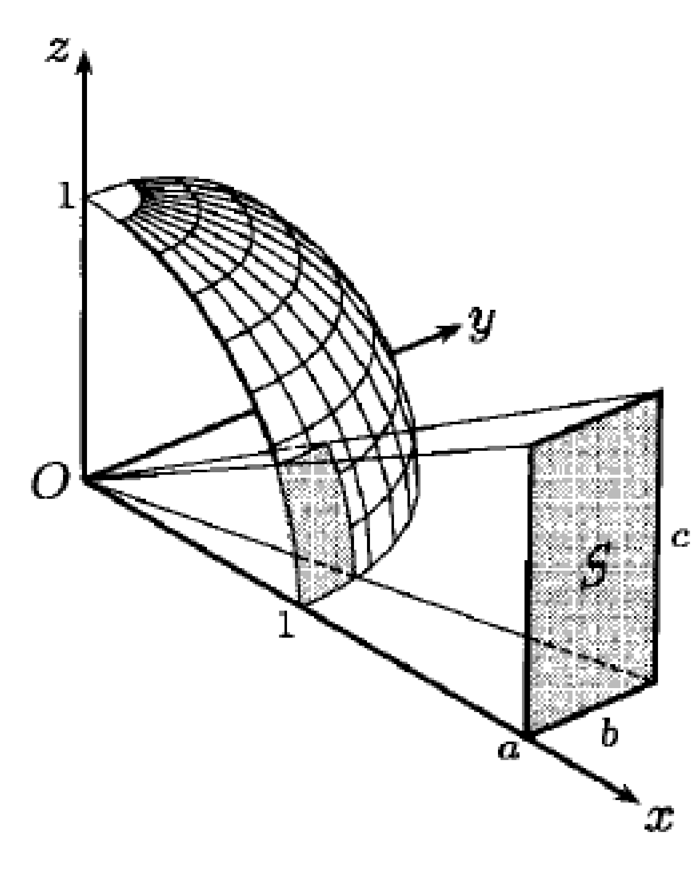
这符合 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角不超过 90° 的要求. 从教科书中关于曲面面积计算公式的推导知道有 $\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{EG - F^2}$, $\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ (其中 $\sqrt{EG - F^2}$ 见命题 8.3 的公式 (8.6)), 又有 $r = \|\boldsymbol{r}\|$, 因此 (8.7) 的右边的积分就为

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S &= \iint_{\Omega_S} \frac{r^3\sin\varphi}{r\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{1}{r^2}\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_{\Omega_S} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

由于在球面上的面积积分元为 $\mathrm{d}S = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$, 而在半径为单位长度的球面上则有 $\mathrm{d}S = \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$, 因此最后一式就是从原点到曲面 S 上动点的射线在单位球面上割下的图形面积, 即所求的立体角 ω. □

注 公式 (8.7) 中的积分区域是曲面 S, 这里需要 §8.14 中的曲面积分概念. 曲面面积可以看成为被积函数恒等于 1 的第一型曲面积分. 由于 (8.7) 中的积分与 $\boldsymbol{n}$ 有关, 因此也可转化为第二型曲面积分. 这方面可以参看 [11] 的第三卷 653 小节的高斯积分, 其中不要求从顶点出发的射线与曲面至多只交于一个点的条件, 曲面 S 既可以封闭, 也可以不封闭. 立体角还可以有正负号. 与此有关的习题见 §8.16 的习题 4392 等.

习题 4050 求矩形 $x=a>0, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 对坐标原点的立体角 ω. 若 a 很大, 求出 ω 的近似公式.



习题 4050 的附图

解 在附图中对于 $a>1$ 的情况作出了示意图, 其中由曲面 S (即题设的矩形) 上的所有点与原点的联线在半径为 1 的球面上割出了一块曲边四边形区域, 它的面积就是所要求的立体角 ω. (由于 S 的边界均为直线, 在单位球面上割出的区域的边界都是球面上的大圆弧.)

这时有 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{r}/r=(a/r, y/r, z/r)$, 其中 $r=\sqrt{a^2+y^2+z^2}$. 由于这两个向量的模都等于 1, 因此就有 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=a/r$. 这样就可按照命题 8.4 的公式 (8.7) 得到

$$\omega=\iint\limits_S \frac{a\,\mathrm{d}S}{r^3}=a\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^c \frac{\mathrm{d}z}{(a^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

这里取 y, z 为自变量, 其范围为 $[0,b]\times[0,c]$, 曲面 S 的方程为 $x=a$, 因此 $\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

为计算内层积分, 可利用三角代换 (也可用双曲函数代换等) 先计算下面的不定积分. 取 $R>0$, 作代换 $z=R\tan\theta$, 于是得到

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{R\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{R^3\sec^3\theta}=\frac{1}{R^2}\int\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{R^2}\sin\theta+C=\frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}}+C,$$

从而得到内层积分为

$$\int_0^c\frac{\mathrm{d}z}{(a^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{c}{(a^2+y^2)\sqrt{a^2+y^2+c^2}}.$$

最后就有

$$\begin{aligned}\omega&=ac\int_0^b\frac{\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)\sqrt{a^2+y^2+c^2}}\quad(\text{然后作代换 } y=a\tan\varphi)\\&=c\int_0^{\arctan(b/a)}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2\sec^2\varphi+c^2}}=\int_0^{\arctan(b/a)}\frac{\mathrm{d}(c\sin\varphi)}{\sqrt{a^2+c^2-c^2\sin^2\varphi}}\\&=\arcsin\left(\frac{c\sin\varphi}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)\Bigg|_0^{\arctan(b/a)}=\arcsin\left(\frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2}}\right).\end{aligned}$$

当 a 很大时, 由于 $\left|\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2}}\right|\ll 1$, 且有

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2}}\sim\frac{bc}{a^2}\ (a\to+0),$$

利用 $\arcsin x\sim x\ (x\to 0)$ 即可得到近似公式

$$\omega\approx\frac{bc}{a^2}.\quad\square$$

注 本题也可以不利用公式 (8.7) 而直接从立体角的定义出发, 在确定单位球面上的区域边界后, 直接计算其面积 [9, 25].

§8.5 二重积分在力学上的应用 (习题 4051–4075)

内容简介　本节的习题是 §4.9 和 §4.10 的继续, 其中包括平面薄板的质量、质心和转动惯量的计算以及在力学上的其他应用.

8.5.1　质量、质心与转动惯量的计算 (习题 4051–4069)

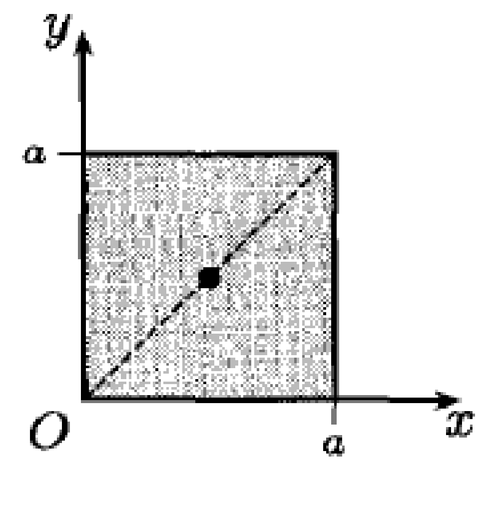
与 §4.9 相比, 目前由于有了二重积分工具, 表达平面薄板的质量、质心坐标和转动惯量的公式变得简单, 而计算方法则更为多样了.

在本节的习题中, 在没有其他说明时, 假设所有出现的常数均大于 0.

习题 4051 求边长为 a 的正方形薄板的质量, 设薄板上每一点的面密度与该点到正方形顶点之一的距离成正比, 且在正方形中心等于 ρ_0.

解　如附图所取的坐标系和正方形, 设其中的每一点的面密度与它到原点的距离成正比, 即 $\rho(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$. 由于 $\rho_0=k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$, 因此可确定系数 $k=\dfrac{\sqrt{2}\rho_0}{a}$. 于是可将所要求的质量用二重积分表达如下:

$$M=\frac{\sqrt{2}\rho_0}{a}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\ 0\leqslant y\leqslant a}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



习题 4051 的附图

利用对称性, 并作极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 即可计算如下

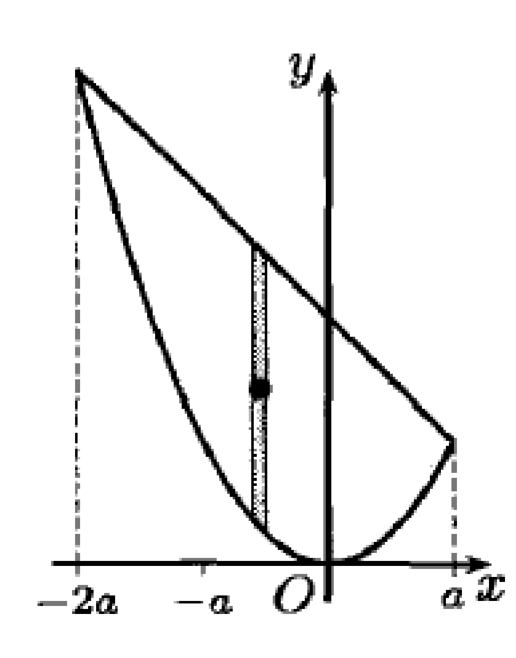
$$\begin{aligned}M&=\frac{2\sqrt{2}\rho_0}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sec\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho_0a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho_0a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\,\mathrm{d}(\tan\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho_0a^2\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\rho_0a^2\Big[u\sqrt{1+u^2}+\ln(u+\sqrt{1+u^2}\,)\Big]\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{3}\rho_0a^2[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}\,)].\end{aligned}$$ □

习题 4052 求以 $ay=x^2$ 和 $x+y=2a$ 为界的均匀薄板的质心坐标.

解　不妨取密度 $\rho=1$. 如附图所示, 抛物线 $ay=x^2$ 与直线 $x+y=2a$ 交于点 $(-2a,4a)$ 和 (a,a), 限定了一个区域 Ω. 先计算质量, 也就是 Ω 的面积为

$$M=\iint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x^2/a}^{2a-x}\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{a}\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(2ax-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Big|_{-2a}^{a}=\frac{9}{2}a^2.$$



习题 4052 的附图

下面是图形对于 Ox 轴和 Oy 轴的几何静矩的计算:

$$M_x = \iint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} \mathrm{d}x \int_{x^2/a}^{2a-x} y\,\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} \frac{1}{2}y^2\Big|_{y=x^2/a}^{y=2a-x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2a}^{a} \left(4a^2 - 4ax + x^2 - \frac{x^4}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(4a^2x - 2ax^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Big|_{-2a}^{a} = \frac{36}{5}a^3,$$

$$M_y = \iint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} x\,\mathrm{d}x \int_{x^2/a}^{2a-x} \mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} \left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right)\Big|_{-2a}^{a} = -\frac{9}{4}a^3.$$

于是就得到质心的坐标为

$$x_c = \frac{M_y}{M} = -\frac{1}{2}a, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{5}a. \quad \square$$

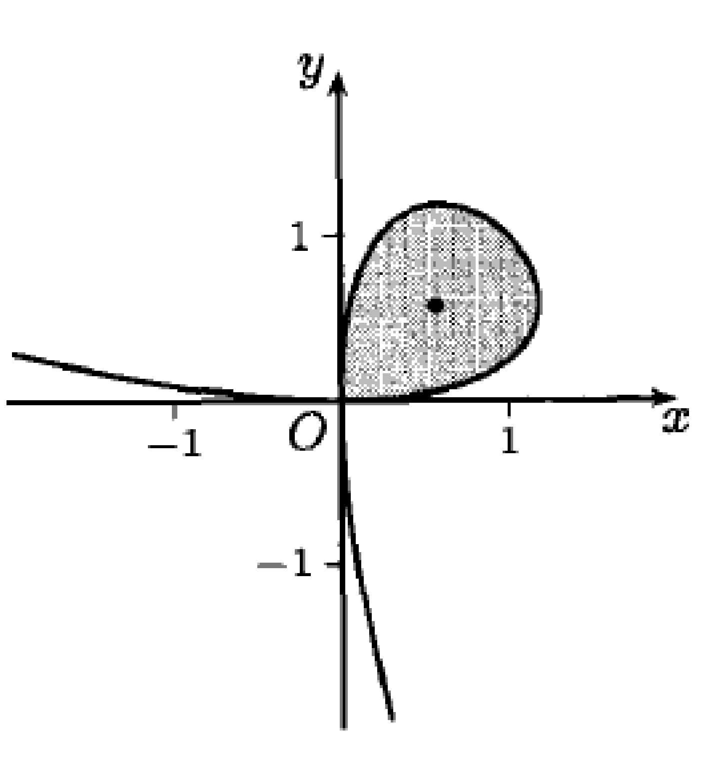
注 在这里可以比较一下对本题的上述解法与第四章中的解法. 按照静矩计算中的可加性原理 (参见 §4.9 的习题 2506 的注 2), 在上面的附图中作出了介于 $X = x$ 和 $X = x + \Delta x$ 之间的条形区域, 记区域 Ω 的边界为 $y_1(x) = x^2/a$, $y_2(x) = 2a - x$, 则可将条形区域的质量, 也就是面积, 集中于条形的中心点处, 然后乘以该点到 Ox 轴的距离, 这就是

$$\frac{1}{2}(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)\Delta x = \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\Delta x,$$

然后相加求和并过渡到积分, 这就是上面计算的 M_x. 同样可得到 M_y. 由此可见在第四章中的方法也就是如何将本质上为二重积分的问题转化为单重积分来计算. 从数学上看也就是将二重积分转化为二次积分, 并求出其内层积分, 从而变成为单重积分. §4.9 的习题 2512 的解法则相当于二重积分的极坐标变换.

习题 4055 求以 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (圈) 为界的均匀薄板的质心坐标.

解 利用 $y = tx$ 的方法引入参数 t (参见 §1.4.4 的习题 370.1(b)), 即可证明在 $a > 0, b > 0$ 时题设曲线只在第一象限形成一个圈. 在附图中对于 $a = b = 1$ 和 $c^2 = 1/8$ 的情况作出了该曲线的图像.



习题 4055 的附图

将该圈所限区域记为 Ω, 则对下面的积分计算可采用广义极坐标代换

$$x = ar\cos^2\varphi, \quad y = br\sin^2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

这时曲线方程变为

$$r = r(\varphi) = \frac{ab}{c^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

然后求出雅可比行列式

$$I = \begin{vmatrix} a\cos^2\varphi & -2ar\sin\varphi\cos\varphi \\ b\sin^2\varphi & 2br\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 2abr\sin\varphi\cos\varphi.$$

以下即是积分计算:

$$M=\iint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi)}r\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a^3b^3}{c^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{a^3b^3}{2c^4}\mathrm{B}(3,3),$$

$$M_x=\iint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi)}r^2\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{2}{3}ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^3(\varphi)\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2a^4b^5}{3c^6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^9\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{a^4b^5}{3c^6}\mathrm{B}(4,5),$$

$$M_y=\iint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi)}r^2\sin\varphi\cos^3\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{a^5b^4}{3c^6}\mathrm{B}(5,4),$$

从而得到质心坐标为

$$x_c=\frac{M_y}{M}=\frac{2a^2b}{3c^2}\cdot\frac{\mathrm{B}(5,4)}{\mathrm{B}(3,3)}=\frac{2a^2b}{3c^2}\cdot\frac{\Gamma(4)\Gamma(5)\Gamma(6)}{\Gamma(9)[\Gamma(3)]^2}=\frac{2a^2b}{3c^2}\cdot\frac{4\cdot3\cdot3}{8\cdot7\cdot6}=\frac{a^2b}{14c^2},$$

$$y_c=\frac{M_x}{M}=\frac{2ab^2}{3c^2}\cdot\frac{\mathrm{B}(4,5)}{\mathrm{B}(3,3)}=\frac{ab^2}{14c^2}.\quad\square$$

注　本题的常数 a,b 均可以取大于 0 或小于 0 的值. 可以证明, 对于它们符号的每一种组合, 曲线只在一个象限内围成一个圈.

习题 4059 设圆形薄板 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 在点 $M(x,y)$ 的面密度与点 M 到点 $A(a,0)$ 的距离成正比, 求该薄板的质心坐标,

解　根据条件设面密度 $\rho=k\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, 则从对称性可见质心的纵坐标 $y_c=0$. 这时薄板的质量为

$$M=k\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ (\text{然后作代换 } x=a+r\cos\varphi,y=r\sin\varphi)$$

$$=k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r=-\frac{8ka^3}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi\ (\text{然后利用 }\cos^3\varphi\text{ 的对称性})$$

$$=\frac{16ka^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{16ka^3}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32ka^3}{9},$$

$$M_y=k\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}(a+r\cos\varphi)r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=ak\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r+k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32ka^4}{9}+4ka^4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{32ka^4}{9}-8ka^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{32ka^4}{9}-8ka^4\cdot\frac{4\cdot2}{5\cdot3}=\frac{32ka^4}{9}-\frac{64ka^4}{15}=-\frac{32ka^4}{45},$$

因此质心的横坐标为 $x_c = \dfrac{M_y}{M} = -\dfrac{a}{5}$. □

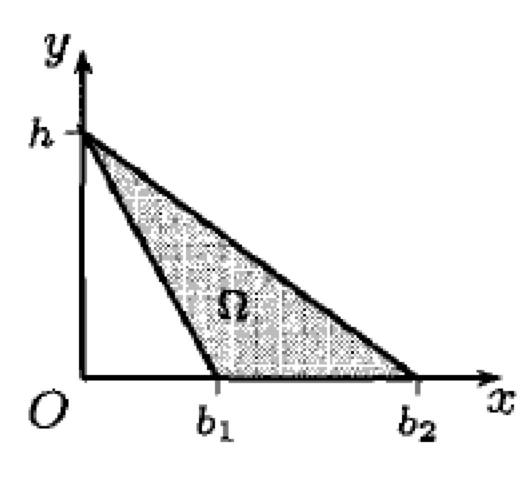
习题 4061–4069 都是关于转动惯量的计算题. 与前面的质量和静矩的计算相似, 二重积分使得平面薄板的转动惯量的表达式简单, 而且提供了多样化的计算方法.

习题 4061 求由 $\dfrac{x}{b_1} + \dfrac{y}{h} = 1$, $\dfrac{x}{b_2} + \dfrac{y}{h} = 1$, $y = 0$ 所围的图形 ($\rho = 1$) 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y.

解 不妨设 $0 < b_1 < b_2$, 则如附图所示, 所围的区域 Ω 为一钝角三角形. 作为集合, 它是两个直角三角形之差集. 引入带有参数 b 的直角三角形集合:

$$\Omega_b = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leqslant y \leqslant h, 0 \leqslant x \leqslant b\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right\},$$

则 $\Omega = \Omega_{b_2} - \Omega_{b_1}$.



习题 4061 的附图

利用转动惯量的积分公式关于积分区域的可加性, 只要求出 Ω_b 的转动惯量, 然后用 $b = b_2$ 和 $b = b_1$ 代入并相减即可.

Ω_b 对于 Ox 轴的转动惯量可计算如下:

$$\iint\limits_{\Omega_b} y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^h y^2 \,\mathrm{d}y \int_0^{b(1-y/h)} \mathrm{d}x$$

$$= b\int_0^h y^2\left(1 - \frac{y}{h}\right)\mathrm{d}y = b\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right) = \frac{bh^3}{12},$$

为求 Ω_b 对 Oy 轴的转动惯量, 只要将上述计算中的 x 与 y 对换, b 与 h 对换即可得到

$$\iint\limits_{\Omega_b} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{hb^3}{12},$$

因此得到

$$I_x = \iint\limits_{\Omega} y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{h^3}{12}(b_2 - b_1),$$

$$I_y = \iint\limits_{\Omega} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{h}{12}(b_2^3 - b_1^3). \quad □$$

习题 4064 求由曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 所围的图形 ($\rho = 1$) 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y.

解 对于 $a = 1$ 的情况, 曲线的图像见 §6.3.1 的习题 3366 (以及第一册附录二的习题 1542). 利用对称性可见有 $I_x = I_y$, 且只要计算曲线所围区域在第一象限所界部分上的积分乘以 4 即可. 将这部分的区域记为 Ω, 并作广义极坐标代换

$$x = r^{\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \varphi, \quad y = r^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

则曲线方程变为 $r = a^2(\sin\varphi + \cos\varphi)$, 雅可比行列式为

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \varphi & -\dfrac{1}{2}r^{\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \varphi \sin\varphi \\ \dfrac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi & \dfrac{1}{2}r^{\frac{1}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \varphi \cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \sin^{-\frac{1}{2}} \varphi \cos^{-\frac{1}{2}} \varphi.$$

于是可计算转动惯量如下:

$$I_x = I_y = 4\iint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a^2(\sin\varphi+\cos\varphi)}\frac{r\cos\varphi}{4\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2\cos\varphi}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+2\sin\varphi\cos\varphi)\cos\varphi}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a^4}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\sin^{-\frac{1}{2}}\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{2}}\varphi\sin^{\frac{1}{2}}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$= a^4\left[\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{a^4}{4}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+2\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{3a^4}{8}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3a^4}{8}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}\pi a^4}{8}.\quad \square$$

注 在 §4.5 的习题 2427 已经求得本题曲线所围图形的面积为 $S=\sqrt{2}\pi a^2$, 因此本题的转动惯量可写为 $I_x = I_y = \dfrac{3Sa^2}{8}$.

习题 4067 证明公式

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2,$$

式中 S 是平面图形的面积, I_l, I_{l_0} 是该图形对相距 d 的二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量, 并且 l_0 通过图形的质心.

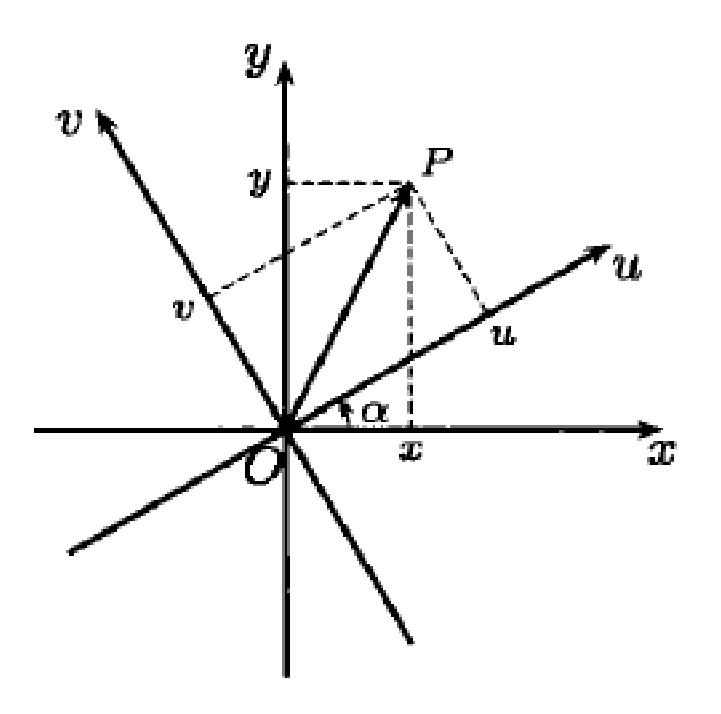
提示 这是力学中关于转动惯量的平行轴定理在物体为平面薄板时的特例. 只要适当取坐标系就不难证明. □

习题 4068 证明: 平面图形 S 对通过其质心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为图形 S 对 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量, I_{xy} 为惯性积 (对本题的平面图形取 $\rho=1$)

$$I_{xy} = \iint\limits_S \rho xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



习题 4068 的附图

解 如附图所示, 将原直角坐标系 Oxy 旋转角 α 得到新的坐标系 Ouv, 则有

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\quad v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

(其推导见底注①)

① 这是解析几何中的公式, 为读者方便起见推导如下. 将附图中从原点到点 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 记为 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, 写出 Ou 轴和 Ov 轴正向的单位向量

$$\boldsymbol{i}_u = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{i}_v = -\sin\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{j},$$

然后就可以通过向量的标量积计算得到

$$u = \overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{i}_u = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\quad v = \overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{i}_v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

由于在这个旋转变换下的雅可比行列式等于 1, 因此平面图形 S 对于 Ou 轴的转动惯量即可计算如下:

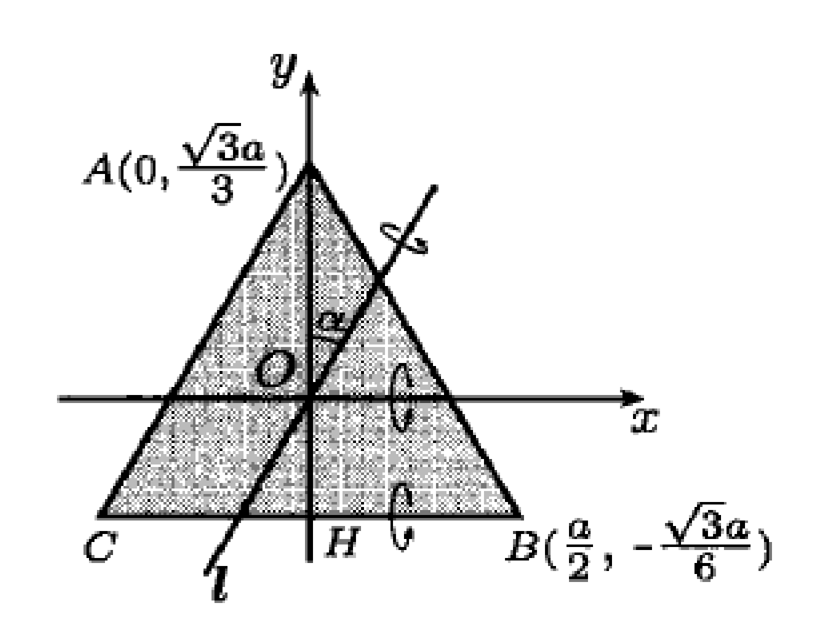
$$\begin{aligned} I &= \iint_S v^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_S(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \cos^2\alpha\iint_S y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\sin\alpha\cos\alpha\iint_S xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \sin^2\alpha\iint_S x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

习题 4069 求以 a 为边长的正三角形对通过三角形质心并与它的高成 $\alpha = 30°$角的直线的转动惯量.

解 如附图所示, 取正三角形 $\triangle ABC$ 的质心为原点, 顶点 A 在正 Oy 轴上, 图中标出了 A, B 的坐标. 旋转轴 l 与三角形的高 AH 成 $\alpha = 30°$角.

这时可以用上一个习题 4068 中的公式来求三角形 $\triangle ABC$ 关于 l 的转动惯量, 记为 I_l.

这时如附图所示, 旋转轴 l 与三角形的 AC 边平行, 因此只要计算三角形关于边 AC 的转动惯量后, 即可用习题 4067 中的平行轴定理得到所要求的答案.



习题 4069 的附图

利用正三角形的对称性, $I_l = I_x$, 因此只要先计算三角形关于 BC 边的转动惯量 I_{BC}, 然后即可用平行轴定理求出所要求的答案.

在对于 I_{BC} 的计算中还可以利用对称性:

$$\begin{aligned} I_{BC} &= \iint_{\triangle ABC}\left(y + \frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{a/2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{3}a/6}^{\sqrt{3}a/3-\sqrt{3}x}\left(y + \frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{a/2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}a/2-\sqrt{3}x}u^2\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\int_0^{a/2}\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - \sqrt{3}x\right)^3\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right)^4\Big|_0^{a/2} = \frac{\sqrt{3}}{32}a^4. \end{aligned}$$

根据平行轴定理有

$$I_{BC} = I_x + Sd^2,$$

其中 $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 是正三角形 $\triangle ABC$ 的面积, $d = |\overline{OH}| = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$, 因此就得到所要求的答案为

$$\begin{aligned} I_l = I_x &= \frac{\sqrt{3}}{32}a^4 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{32}a^4 - \frac{\sqrt{3}}{48}a^4 = \frac{\sqrt{3}}{96}a^4. \quad \square \end{aligned}$$

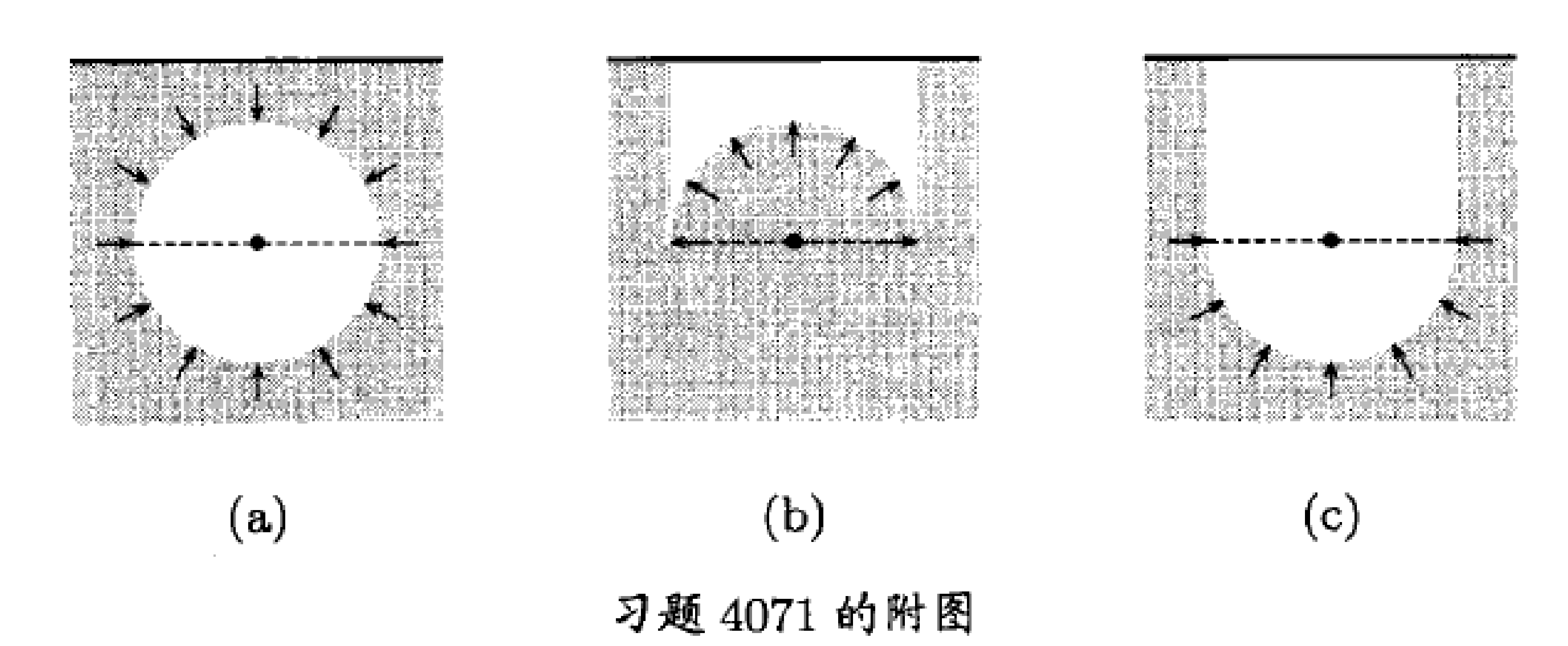
8.5.2 应用题 (习题 4070–4075)

习题 4071 和 4072 都是流体静力学问题, 用二重积分方法的计算比较复杂, 下面只

给出用阿基米德原理的解法①.

习题 4071 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中深度为 h (由球心算起) 的地方, 这里 $h \geqslant a$. 求液体对球体的上表面和下表面的压力.

解 如附图 (a) 所示, 水平直线代表液体的自由面, 用白色的圆代表浸入密度为 δ 的球体, 则可分别计算对其上表面和下表面的压力 (参见 [5, 9, 25]). 下面用阿基米德原理来解本题.



习题 4071 的附图

对于球体的上表面, 将液体作用于其上的力反向, 并考虑如附图 (b) 中用白色表示的物体所受的力的总和. 这个物体是从上底半径为 a 和高为 h 的直圆柱中在底部挖去半径为 a 的半球体而成. 由于液体对其侧壁的作用力在竖直方向的分量均为 0, 因此它所受到的合力与附图 (a) 中的上半球面所受到的合力数值相同, 方向相反.

根据阿基米德原理, 附图 (b) 中物体所受合力的数值等于该物体排开的液体的总重量. 这样就可得到方向指向下方的

$$F_{\text{上半球面}} = \pi a^2 h\delta g - \frac{2}{3}\pi a^3\delta g = \pi a^2\delta g\Big(h - \frac{2}{3}a\Big).$$

同样地可以证明在附图 (a) 中下半球面所受的合力与附图 (c) 中的物体所受的合力相等, 此物体是上底半径 a 和高为 h 的直圆柱体在其下底接上半径为 a 的半球体而成. 根据阿基米德原理, 它所受的合力方向向上, 其数值等于物体排开的液体的总重量, 即

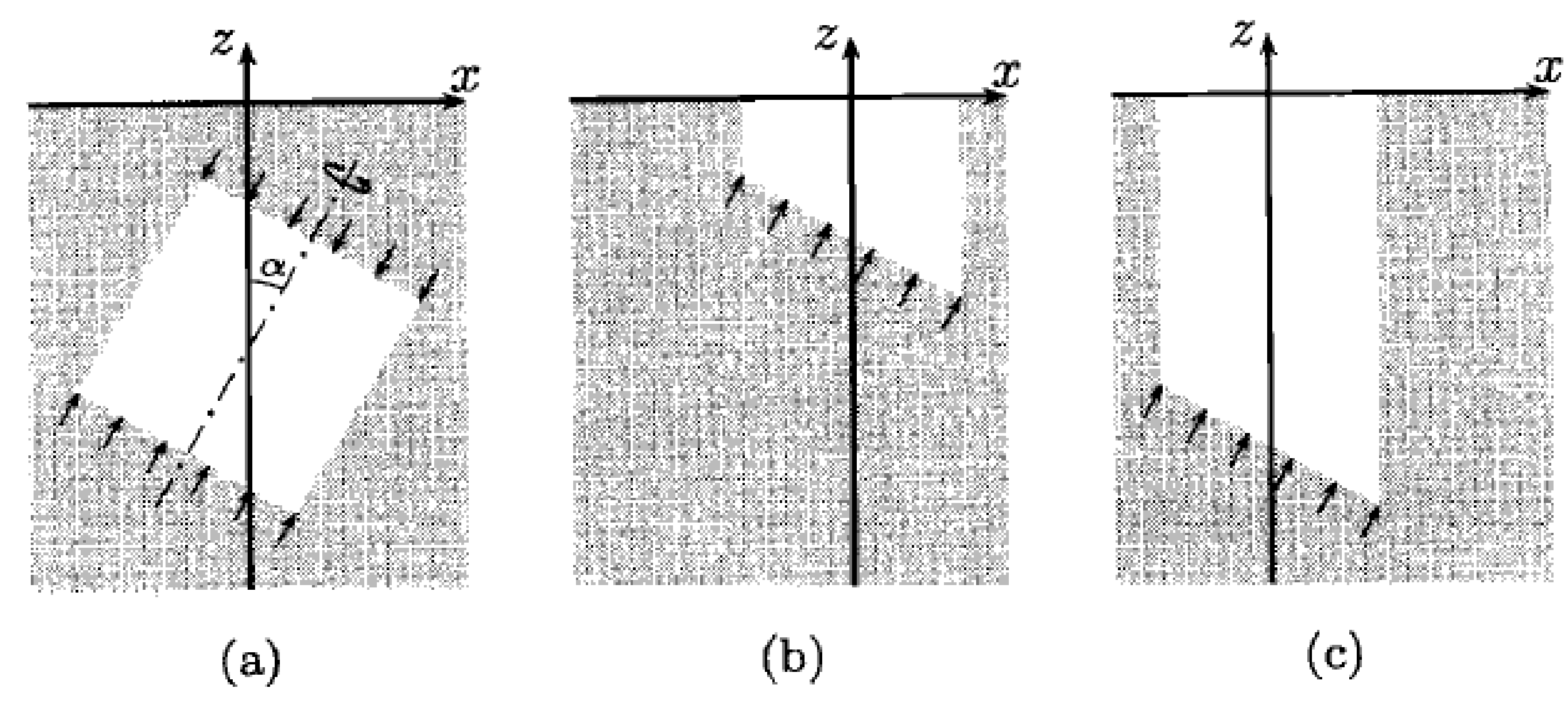
$$F_{\text{下半球面}} = \pi a^2 h\delta g + \frac{2}{3}\pi a^3\delta g = \pi a^2\delta g\Big(h + \frac{2}{3}a\Big). \quad \square$$

习题 4072 底半径为 a 高为 b 的直圆柱体完全沉入密度为 δ 的液体中, 其中心在液面下的深度为 h, 而圆柱的轴与竖直方向成 α 角. 求液体对圆柱上底和下底的压力.

解 本题比上题复杂一点, 需要取定适当的坐标系.

如附图 (a) 所示, 过圆柱体中心作垂直于液体自由面的 Oz 轴, 原点取于液体平面处. 由 Oz 轴和圆柱体的轴线决定坐标面 xOz, 并在此平面上取 Ox 轴. 然后根据右手系取 Oy 轴. 在附图中作出了在坐标面 xOz 上的截面, 没有画出 Oy 轴.

① 在浸入液体中的物体表面满足分片光滑的条件下, 可以用曲面积分工具对阿基米德原理作出数学证明, 这就是 §8.16 的习题 4399.



(a) (b) (c)

习题 4072 的附图

在附图 (a) 中用白色矩形表示题设的圆柱体在 xOz 平面上的截面, 它通过圆柱体的轴线. 这条轴线与 Oz 轴交成 α 角.

将液体对于圆柱体上底面的压力的合力记为 F_1.

考虑附图 (b) 所示的白色物体. 该物体是将圆柱体上底面内的每个点向 $z=0$ 平面作垂直线得到的点集. 它在 $z=0$ 平面上即是圆柱体上底面向坐标面 xOy 的垂直投影, 因此是该坐标面上的一个椭圆. 为方便起见将 Oz 轴平行移动为经过原圆柱体上底面的中心, 这时即可求出椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\alpha}+\frac{y^2}{a^2}\leqslant 1.$$

于是该物体是一个椭圆柱体被 $z=0$ 和原圆柱的上底面限制的部分.

由于附图 (b) 中的物体的侧壁的液体压力在竖直方向的分量为 0, 因此将附图 (a) 中液体对上底面的压力改为反向后的合力乘以 $\cos\alpha$ 就得到对物体的竖直向上的力. 根据阿基米德原理, 液体对该物体的压力的合力方向向上, 数值等于物体所排开的液体的总重量. 由此可见, 只要将此数值除以 $\cos\alpha$ 并乘以 -1 就得到对于圆柱体上底面的合力 F_1.

利用题设的数据可求出原上底面中心至液体表面的距离为 $h-\dfrac{b}{2}\cos\alpha$. 由于该物体的体积等于高为其两倍的椭圆柱体的一半, 将它乘以密度 δ 和重力加速度 g 就得到所排开液体的总重量. 再乘以 -1 就得到 F_1 在垂直方向的分量为

$$F_{1z}=-\frac{1}{2}\cdot\delta g\Big(2h-b\cos\alpha\Big)\cdot\pi a^2\cos\alpha=-\pi a^2\delta g\Big(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\Big)\cos\alpha,$$

并可求出其他两个分量为

$$F_{1x}=-\pi a^2\delta g\Big(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\Big)\sin\alpha,$$

$$F_{1y}=0.$$

将对于圆柱体下底面的液体压力的合力记为 F_2, 其计算是类似的. 如附图 (c) 的白色物体所示, 这时不需要改变原来作用于下底面的液体压力的方向, 它们的合力乘以 $\cos\alpha$ 就是对该物体的垂直向上的压力, 而这可以通过阿基米德原理求出. 这个物体与附图 (b) 中只有一个差别, 即其下底面中心到液体表面的距离为 $h+\dfrac{b}{2}\cos\alpha$. 因此所求的合力 F_2 的各个分量为

$$F_{2x} = \pi a^2 \delta g\Big(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\Big)\sin\alpha,$$

$$F_{2y} = 0,$$

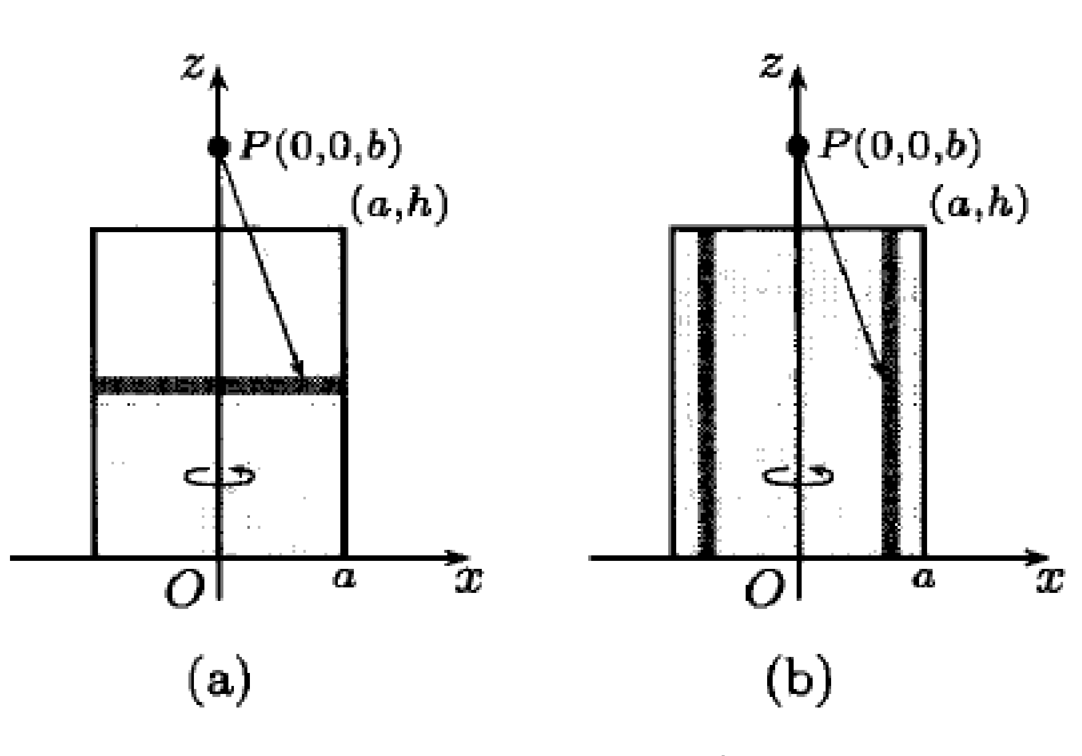
$$F_{2z} = \pi a^2 \delta g\Big(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\Big)\cos\alpha. \quad \square$$

习题 4073 求均质圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ 对质点 $P(0,0,b)$ 的引力, 设圆柱的质量等于 M, 而质点的质量等于 m.

分析 由于对称性, 引力在 x 和 y 方向上的分量均为 0. 这类问题从数学上看是三重积分问题. 利用三重积分可化为先二重积分后单重积分或先单重积分后二重积分的两种方法, 下面给出相应的两个解法. 此外还要注意, 在下面的附图中只画出了 $b > h$ 的情况, 但在习题中允许 b 可取任何实数值.

在以下解法的书写中采用在 §4.9, §4.10 中已多次使用的微元法.

解 1 如附图 (a) 所示, 将圆柱体用 $z =$ 常数的平面切成许多圆状薄片, 先考虑圆片对质点 P 的引力, 然后相加.



习题 4073 的附图

为此先计算积分

$$f(z) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{-km\rho z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

即圆片对于在 Oz 轴上距离圆心距离为 z 的质点的引力在垂直方向的分量, 其中 k 为引力常数, ρ 为密度常数. 这时不考虑薄片的厚度 $\mathrm{d}z$.

用极坐标代换即可得到

$$f(z) = -kmz\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a \frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -2\pi km\rho z[-(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^a$$

$$= -\frac{2kmM}{a^2h}\Big(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\Big),$$

其中利用圆柱体的质量 $M = \pi a^2 h\rho$ 消去了密度 ρ.

将 $f(z)$ 中的 z 换为 $b - z$, 乘以薄片厚度 $\mathrm{d}z$, 对 z 从 0 积分到 h 就得到所要求的引力为

$$F = \int_0^h f(b-z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2kmM}{a^2h}\Big[\int_0^h \frac{(b-z)\,\mathrm{d}z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}} + \int_0^h \operatorname{sgn}(z-b)\,\mathrm{d}z\Big]$$

$$= \frac{2kmM}{a^2h}\Big\{-[a^2+(b-z)^2]^{\frac{1}{2}} + |z-b|\Big\}\Big|_0^h$$

$$= \frac{2kmM}{a^2h}\big[\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+(b-h)^2} + |h-b| - |b|\big]. \quad \square$$

解 2 (概要) 如附图 (b) 所示, 先考虑在圆柱体内由半径 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 的圆柱面形成的薄圆筒对质点 P 的引力, 然后对 r 从 0 到 a 积分. 为简明起见, 直接就写出

$$F = km\rho\int_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^h\frac{(z-b)\,\mathrm{d}z}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

以下积分没有困难, 从略. □

习题 4075 以 a 和 b 为边长的矩形草地上均匀地覆盖有已收割的干草, 其面密度为 ρ. 若运送质量为 M 的货物到距离为 r 的地方所需的功等于 kMr $(0<k<1)$, 则为了把所有干草集中到草地中央, 至少应消耗多少功?

解 (概要) 取草地中心为原点, 将题设的矩形区域表示为 $\Omega=[-a,a]\times[-b,b]$, 则可将至少需要做的功写成为二重积分

$$W=\iint\limits_{\Omega}k\rho\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

利用对称性并作极坐标代换即可得到

$$\begin{aligned}W&=4k\rho\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\\&=4k\rho\left(\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{2}\sec\varphi}r^2\,\mathrm{d}r+\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{b}{2}\csc\varphi}r^2\,\mathrm{d}r\right).\end{aligned}$$

最后的两个积分的计算都可以仿照 §8.5.1 的习题 4051 中的积分方法进行. □

§8.6 三重积分 (习题 4076–4100)

内容简介 主要是学习三重积分的各种计算方法, 其中包括使用柱坐标代换与球坐标代换的最常用方法.

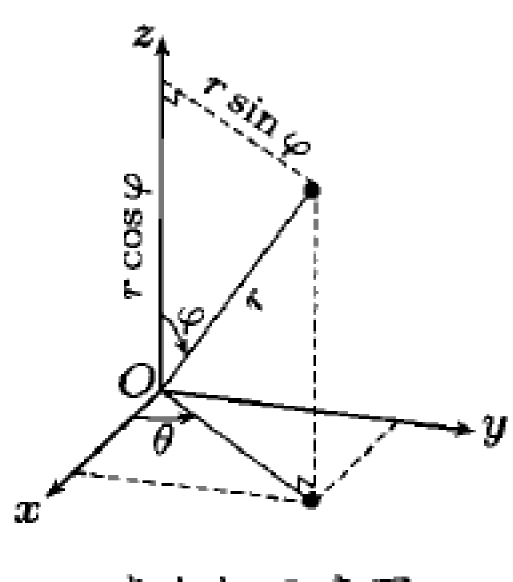
以下所用的球坐标代换与《习题集》略有不同, 而是用 [11] 以及多数教科书中的常用形式:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\varphi,$$

其中 $r \geqslant 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 在附图中标出了球坐标在第一卦限中的几何意义. 雅可比行列式为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi.$$

因此体积元从直角坐标时的 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 变为 $\mathrm{d}V = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$. (这与 §8.4 的命题 8.3 中当 r 为常数时的结果一致.)



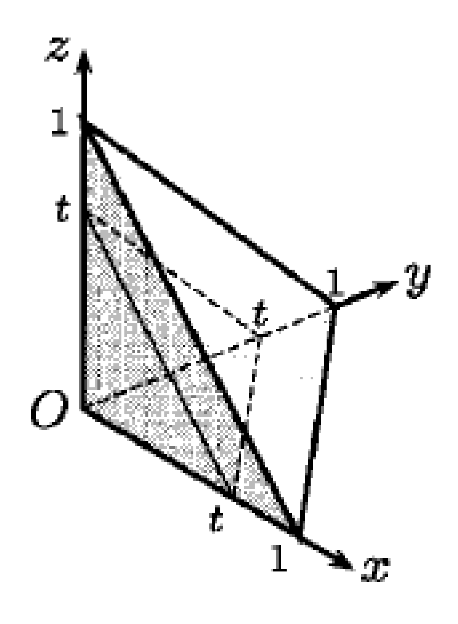
球坐标示意图

习题 4077 计算 $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是曲面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围的区域.

解 1 (概要) 将所求积分记为 I. 将题设区域 V 在坐标面 xOy 上的投影记为区域 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$, 则就可以将 I 转化为先单重后二重的逐次积分如下:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} \Big[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\Big]\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} \Big[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2}\Big] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

以下计算从略. □



习题 4077 的附图

解 2 (概要) 区域 V 在坐标轴 Oz 上的投影为区间 $[0,1]$. 记 $D_z = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1-z\}$ 为区域 V 内 z 为常值时的点集在坐标面 xOy 上的投影, 然后将 I 转化为先二重后单重的逐次积分如下:

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y+z)^3},$$

以下计算从略. □

解 3 (卡塔兰方法) 定义 $f(x,y,z) = x+y+z$, 则它在区域 V 上的值域为 $f(V) = [0,1]$, 又定义 $h(f) = \dfrac{1}{(1+f)^3}$, 然后用 §8.1.6 的命题 8.2. 这时其中的函数

$g \equiv 1$.

先计算该命题中的 $F(t)$. 由于其积分区域

$$V \cap \{0 \leqslant f(x,y,z) \leqslant t\} = \{(x,y,z) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant t\}$$

如附图所示是一个底为直角三角形 $\{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant t\}$ 而高为 t 的锥体, 将它记为 V_t, 就有

$$F(t) = \iiint_{V_t} \mathrm{d}V = \frac{1}{3} \cdot t \cdot \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{6}t^3,$$

然后即可按照 §8.1.6 的公式 (8.5) 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 h(t)F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^3} \cdot \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{1+t} - \frac{2}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1+t)^3}\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}. \quad \square \end{aligned}$$

注 由附图可见, 在本题中的卡塔兰方法就是用平行于平面 $x+y+z=1$ 的平面族与区域 V 相截, 而解 2 则是用 $z=$ 常数 的平面族与区域 V 相截. 由此可见, 卡塔兰方法有可能根据具体的积分区域和被积函数的特点而采取较为灵活的做法.

习题 4079 计算 $\displaystyle\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围的区域.

解 1 (广义球坐标代换) 记积分为 I. 作变量代换

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta, \quad y = br\sin\varphi\sin\theta, \quad z = cr\cos\varphi,$$

其雅可比行列式为 $abcr^2\sin\varphi$, 积分区域 V 变为 r,φ,θ 空间中的长方体区域

$$V_{r\varphi\theta} = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\},$$

被积函数变为 r^2, 因此即有

$$\begin{aligned} I &= abc\iiint_{V_{r\varphi\theta}} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = abc\int_0^1 r^4\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4\pi}{5}abc. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 (卡塔兰方法) 这里用 §8.1.6 的命题 8.1 的公式 (8.4) 即可, 只是要将其中的二元函数改为三元函数, 二重积分改为三重积分.

定义 $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = t$, 则 f 的值域 $f(V)=[0,1]$. 利用 §4.7.2 的习题 2463 关于椭球体体积的已知结果, 就有

$$F(t) = \iiint_{f(x,y,z)\leqslant t} \mathrm{d}V = \frac{4\pi}{3}abc\,t^{\frac{3}{2}},$$

于是即可求出

$$I = \int_0^1 tF'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi}{3}abc\int_0^1 \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi}{5}abc. \quad \square$$

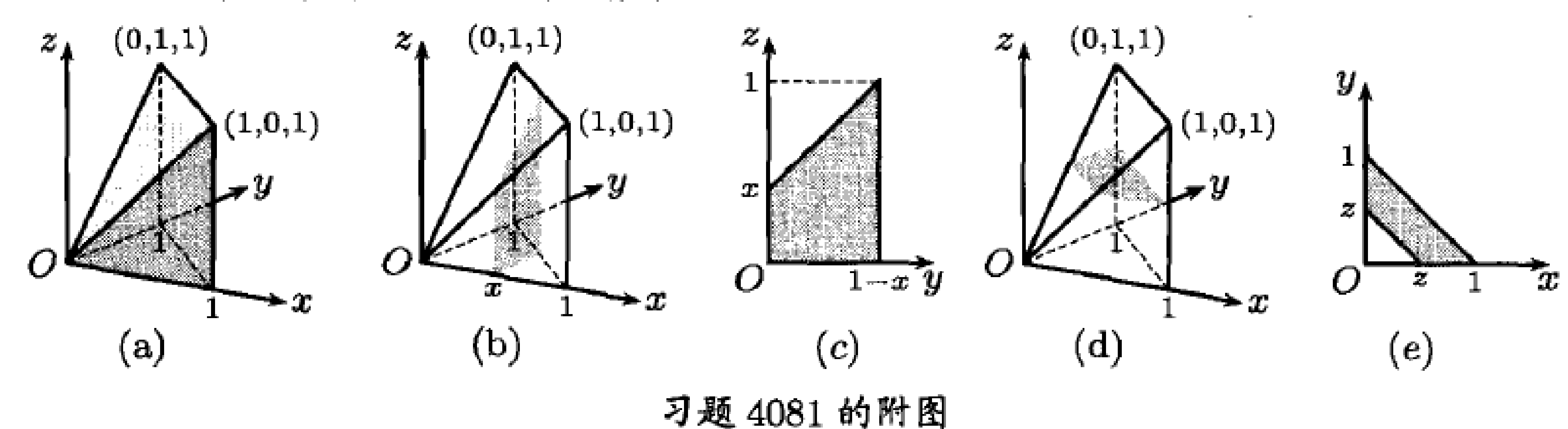
习题 4081 在三重积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ 中用不同方法配置积分的上下限.

解 记题设的三次积分为 I_1, 则有

$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \iint_{\sigma_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $V = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant z \leqslant x+y\}$ 是附图 (a) 中所示的区域, 即是以坐标面 xOy 上的三角形 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1$ 为下底, 以平面 $z = x+y$ 为上底的柱体. 然后如附图 (b) 所示, 取定 $x \in [0,1]$, 作平行于坐标面 yOz 的平面 $X = x$ 与积分区域 V 相截, 然后将它投影到 yOz 平面上, 即得到附图 (c) 中的四边形, 它就是 $\sigma_x = \{(y,z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant z \leqslant x+y\}$.

本题的要求即是将在区域 V 上的三重积分写为各种不同配置的三次积分. 将三重积分化为三次积分有 $3! = 6$ 种可能性.



习题 4081 的附图

对于外层为对 x 在 $[0,1]$ 上的积分, 利用附图 (c) 中的阴影区所示的 σ_x 即可得到如下的先 y 后 z 再 x 的三次积分:

$$I_2 = \int_0^1 \mathrm{d}x \Big[\int_0^x \mathrm{d}z \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 \mathrm{d}z \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \Big].$$

由于积分区域关于 x 和 y 对称, 因此就得到外层对 y 求积的另外两个三次积分:

$$I_3 = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}x \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

$$I_4 = \int_0^1 \mathrm{d}y \Big[\int_0^y \mathrm{d}z \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_y^1 \mathrm{d}z \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \Big].$$

最后考虑外层为对 z 积分的两个三次积分. 如附图 (d) 所示, 取定 $z \in [0,1]$, 作平行于坐标面 xOy 的平面 $Z = z$ 与积分区域 V 相截, 然后将所得的四边形投影到坐标面 xOy 上得到附图 (e) 中的区域

$$\sigma_z = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \leqslant x+y \leqslant 1\}.$$

这样就可以得到最后两个三次积分. 由于其中 x 与 y 对称, 因此只需先写出其中一个, 然后将 x 与 y 对换即可得到另一个:

$$I_5 = \int_0^1 \mathrm{d}z \Big[\int_0^z \mathrm{d}x \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \int_z^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \Big],$$

$$I_6 = \int_0^1 \mathrm{d}z \Big[\int_0^z \mathrm{d}y \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_z^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \Big]. \quad \square$$

习题 4084 用一重积分代替 $\int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi \mathrm{d}\eta \int_0^\eta f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

解　注意到其中 x 只是与积分无关的参数, 而被积函数只与变量 ζ 有关, 因此只要能够将对于 ζ 的积分移至最外层, 则其余的积分均可求出, 从而就得到一重积分.

在外层积分的 ξ 给定时, 中层和里层积分的区域为 $\eta O\zeta$ 平面上的一个三角形区域

$$\{(\eta,\zeta)\mid 0\leqslant\eta\leqslant\xi, 0\leqslant\zeta\leqslant\eta\},$$

因此即可交换它们的求积顺序而得到

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi \mathrm{d}\eta \int_0^\eta f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \int_\zeta^\xi \mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi f(\zeta)(\xi-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

最后一个积分的积分区域为 $\xi O\zeta$ 平面上的三角形区域

$$\{(\xi,\zeta)\mid 0\leqslant\xi\leqslant x, 0\leqslant\zeta\leqslant\xi\},$$

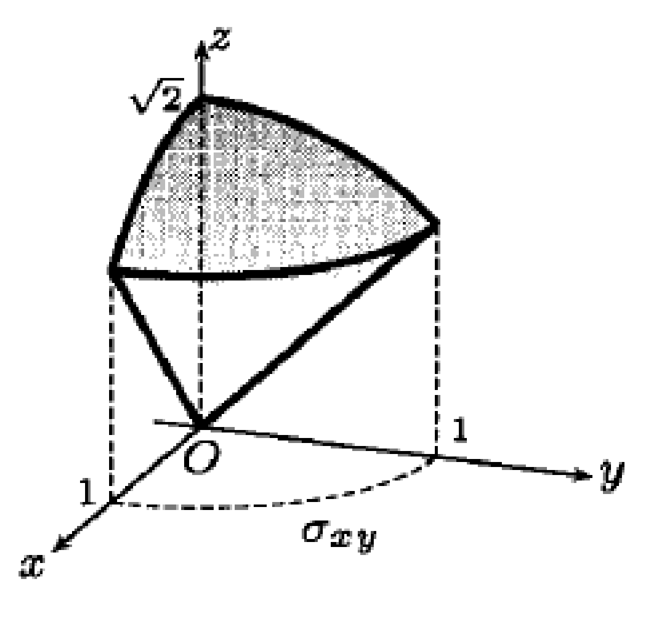
因此又可交换顺序得到所求的结果:

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi f(\zeta)(\xi-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \int_0^x f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \int_\zeta^x (\xi-\zeta)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^x f(\zeta)\left[\frac{1}{2}(\xi-\zeta)^2\right]\Bigg|_{\xi=\zeta}^{\xi=x}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2}\int_0^x f(\zeta)(x-\zeta)^2\,\mathrm{d}\zeta. \quad \square\end{aligned}$$

注　本题是 §8.10 的习题 4214 的特例.

习题 4088 变换为球坐标计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,\mathrm{d}z$.

解 1　记积分为 I. 这类题应从题给的三次积分确定积分区域, 然后根据区域和被积函数取适当的变量代换.



习题 4088 的附图

从外层和中层积分可以知道积分区域在坐标面 xOy 上的投影是单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 在第一象限的四分之一, 记为 σ_{xy}. 从里层积分知道曲顶为球面 $x^2+y^2+z^2=2$, 而曲底为锥面 $z^2=x^2+y^2$. 由于它们都容易用球坐标表示, 因此作球坐标代换是合适的.

作代换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi,$$

则积分区域为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$, $0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$, 雅可比行列式等于 $r^2\sin\varphi$, 因此积分为

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^4\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\Big)\cdot\frac{1}{5}4\sqrt{2} = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1). \quad \square\end{aligned}$$

解 2 本题用柱坐标代换也是方便的. 这时区域变为 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $r \leqslant z \leqslant \sqrt{2-r^2}$, 雅可比行列式等于 r, 于是得到

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{\pi}{6}\int_0^1 \left[r(2-r^2)^{\frac{3}{2}} - r^4\right]\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi}{6}\left[-\frac{1}{5}(2-r^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{r^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).\quad \square$$

习题 4098(a) 求 $F'(t)$, 设

$$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 f 为可微函数.

分析 这类题属于含参变量的重积分. 对于参变量出现在积分区域中的情况, 可以通过变量代换等方法解决. $\square$

解 1 作球坐标代换 $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$, 其中 $0 \leqslant r \leqslant t$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, 则就得到

$$F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r,$$

可见有 $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$. $\square$

解 2 利用 §8.1.6 的卡塔兰方法, 由于 (其中 $u \geqslant 0$)

$$G(u) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant u^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{4\pi u^3}{3},$$

因此就得到

$$F(t) = \int_0^t f(u^2)G'(u)\,\mathrm{d}u = 4\pi\int_0^t u^2 f(u^2)\,\mathrm{d}u,$$

以下同解 1. $\square$

解 3 作代换 $x = t\xi$, $y = t\eta$, $z = t\zeta$, $t > 0$, 则积分区域变成单位球 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leqslant 1$, 雅可比行列式等于 t^3, 从而就有

$$F(t) = \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant 1} f(t^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2))\,t^3\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta,$$

在积分号下求导得到

$$F'(t) = \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant 1} 2t(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)f'(t^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2))\,t^3\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$$
$$+ \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant 1} 3t^2 f(t^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta.$$

将上式右边的两个积分的变量再换为 x, y, z, 即作前述代换的逆代换, 则得到

$$F'(t) = \frac{2}{t} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} (x^2+y^2+z^2) f'(x^2+y^2+z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \frac{3}{t} F(t).$$

这个答案似乎比较复杂, 但用球坐标代换可以证明它与前两个解的答案是相同的:

$$F'(t) = \frac{4\pi}{t} \int_0^t [2r^4 f'(r^2) + 3r^2 f(r^2)] \, \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{t} \int_0^t [r^3 f(r^2)]' \, \mathrm{d}r = 4\pi t^2 f(t^2). \quad \square$$

注 解 3 的方法在求解类似的问题中有用, 因此写出供参考.

习题 4099 求

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} x^m y^n z^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

其中 m, n, p 为非负整数.

提示 当 m, n, p 中至少有一个为奇数时积分为 0. 可参考 §8.1.4 的习题 3977 中所用的方法. 对于 m, n, p 全为偶数的情况, 可以用球坐标代换作计算. $\square$

习题 4100 令 $x+y+z=\xi$, $y+z=\xi\eta$, $z=\xi\eta\zeta$, 计算狄利克雷积分

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \quad (p>0, q>0, r>0, s>0),$$

其中 V 是平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围的区域.

解 1 记积分为 I. 按照题中提出的代换有

$$z = \xi\eta\zeta, \quad y = \xi\eta(1-\zeta), \quad x = \xi(1-\eta),$$

其逆变换为 $\xi = x+y+z$, $\eta = \dfrac{y+z}{x+y+z}$, $\zeta = \dfrac{z}{y+z}$, 由此可见区域 V 变为 ξ, η, ζ 空间中的正方体

$$V_{\xi\eta\zeta} = \{(\xi, \eta, \zeta) \mid 0 \leqslant \xi \leqslant 1, 0 \leqslant \eta \leqslant 1, 0 \leqslant \zeta \leqslant 1\},$$

而雅可比行列式

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{vmatrix} 1-\eta & -\xi & 0 \\ \eta(1-\zeta) & \xi(1-\zeta) & -\xi\eta \\ \eta\zeta & \zeta\xi & \xi\eta \end{vmatrix} = \xi^2 \eta,$$

于是可计算得到

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{V_{\xi\eta\zeta}} [\xi(1-\eta)]^p [\xi\eta(1-\zeta)]^q (\xi\eta\zeta)^r (1-\xi)^s \cdot \xi^2 \eta \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^1 \xi^{p+q+r+2} (1-\xi)^s \, \mathrm{d}\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1} (1-\eta)^p \, \mathrm{d}\eta \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^q \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \mathrm{B}(p+q+r+3, s+1) \cdot \mathrm{B}(q+r+2, p+1) \cdot \mathrm{B}(r+1, q+1) \\ &= \frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \cdot \frac{\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)} \\ &== \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 (卡塔兰方法) 用命题 8.2, 取 $f(x,y,z) = x+y+z$ (与习题 4077 的解 3 相同), 有 $f(V) = [0,1]$, 又定义 $h(f) = (1-f)^s$, $g(x,y,z) = x^p y^q z^r$, 先计算在区域 $\{(x,y,z) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant t\}$ 上 g 的积分:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^t x^p \,\mathrm{d}x \int_0^{t-x} y^q \,\mathrm{d}y \int_0^{t-x-y} z^r \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{r+1} \int_0^t x^p \,\mathrm{d}x \int_0^{t-x} y^q (t-x-y)^{r+1} \,\mathrm{d}y \ \text{(作代换 } y=(t-x)u\text{)} \\
&= \frac{1}{r+1} \int_0^t x^p (t-x)^{q+r+2} \,\mathrm{d}x \int_0^1 u^q (1-u)^{r+1} \,\mathrm{d}u \ \text{(作代换 } x=tv\text{)} \\
&= \frac{1}{r+1} \cdot \mathrm{B}(q+1, r+2) t^{p+q+r+3} \int_0^1 v^p (1-v)^{q+r+2} \,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{r+1} \cdot \mathrm{B}(q+1, r+2) \cdot \mathrm{B}(p+1, q+r+3) t^{p+q+r+3} \\
&= \frac{1}{r+1} \cdot \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(r+2)}{\Gamma(q+r+3)} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+r+3)}{\Gamma(p+q+r+4)} t^{p+q+r+3} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+4)} t^{p+q+r+3}.
\end{aligned}$$

然后即可按照公式 (8.5) 得到

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (1-t)^s F'(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+4)} \cdot (p+q+r+3) \int_0^1 (1-t)^s t^{p+q+r+2} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \cdot \mathrm{B}(s+1, p+q+r+3) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \cdot \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(p+q+r+3)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \quad \square
\end{aligned}$$

注 本题是 §8.10 的习题 4217 中 $h(t) = 1-t$ 和 $n=3$ 的特例.

§8.7 利用三重积分计算体积 (习题 4101–4130)

内容简介 空间区域 V 的体积就是在该区域上恒等于 1 的函数的三重积分, 一般可在对区域形状作分析的基础上采用适当的方法求积.

在 §1.4 和 §2.12 中已经看到, 有一部分平面曲线在采用极坐标变量或其他参数方程表示后会变得容易分析. 对于空间曲面也有类似的情况, 即在直角坐标系中的某些曲面方程 $f(x,y,z)=0$ 在采用球坐标变量或其他变量表示后会容易理解其形状, 这对于确定积分限是很有帮助的.

(习题中的常数在无其他说明时均假设大于 0.)

习题 4104 求以 $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 为界的物体的体积.

解 1 (三重积分) 从两个方程消去 z 得到 $x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}$, 即是曲面的交线在坐标面 xOy 上的投影, 除去点 $x=y=0$ 之外就是圆 $\sqrt{x^2+y^2}=a$. 在此圆内有

$$\frac{1}{a}(x^2+y^2)\leqslant\sqrt{x^2+y^2},$$

可见适宜于用柱坐标代换积分如下:

$$\begin{aligned}V&=\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\,\mathrm{d}r\int_{r^2/a}^r\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^a r\Big(r-\frac{1}{a}r^2\Big)\,\mathrm{d}r\\&=2\pi\Big(\frac{a^3}{3}-\frac{1}{4a}\cdot a^4\Big)=\frac{\pi}{6}a^3.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 (二重积分) 在对于空间区域作分析的基础上也可按照曲顶曲底柱体的体积写成为二重积分

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a}\Big[\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{a}(x^2+y^2)\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

然后用极坐标代换得到

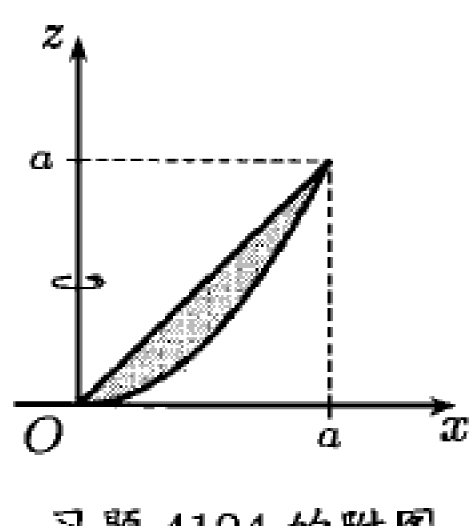
$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\Big(r-\frac{1}{a}r^2\Big)\,\mathrm{d}r\\&=2\pi\Big(\frac{a^3}{3}-\frac{1}{4a}\cdot a^4\Big)=\frac{\pi}{6}a^3.\quad\square\end{aligned}$$

解 3 (旋转体) 从所给的曲面方程即可知道所求的区域是旋转轴为 Oz 轴的旋转体 (参看 §6.1.2 的习题 3172), 令 $y=0$ 即可如附图所示作出在坐标面 xOz 上的阴影区

$$\{(x,z)\mid 0\leqslant x\leqslant a,\frac{1}{a}x^2\leqslant z\leqslant x\},$$

于是旋转体与平面 $Z=z\in[0,a]$ 的截面为圆环, 其内半径为 z, 外半径为 $\sqrt{az}$, 从而可写出圆环面积为

$$\pi az-\pi z^2,$$



习题 4104 的附图

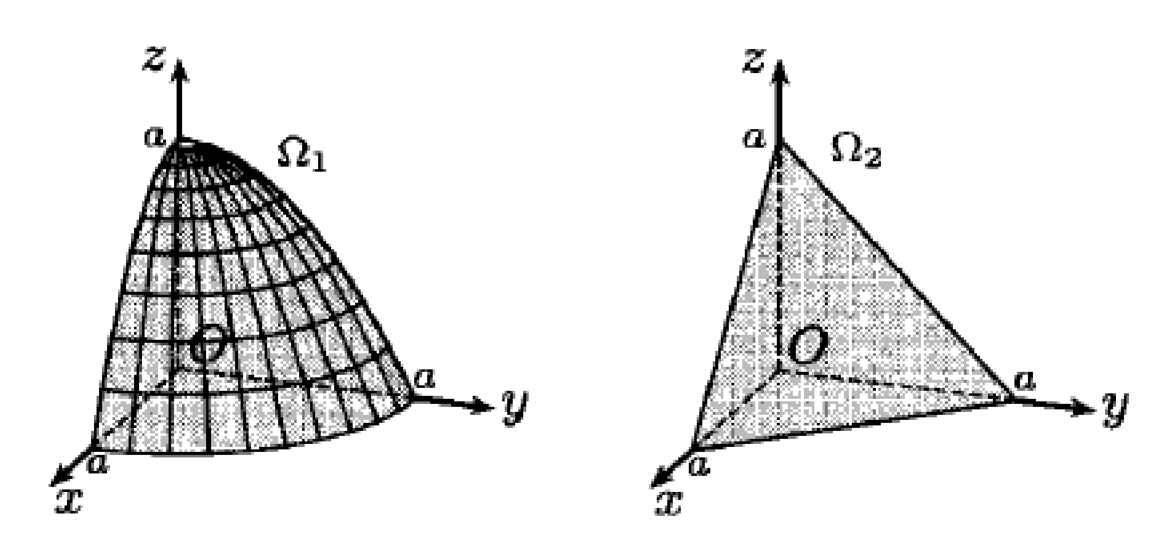
然后求积得到

$$V = \int_0^a (\pi a z - \pi z^2)\,\mathrm{d}z$$
$$= \pi\left(\frac{az^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{6}a^3. \quad \square$$

注 本题的解法很多, 以上三个解法代表了三种不同的思路, 其中每一个思路在实施时还可以有不同的做法. 此外, 还可以将解 2 和解 3 看成是对一般三重积分的两种典型的计算方法. 解 2 相当于在三重积分中先对 z 求积然后计算一个二重积分, 且于其中采用极坐标代换, 总体上看也就是解 1 所采用的柱坐标代换. 解 3 则相当于先对于 x, y 计算二重积分, 然后对 z 求积. 其中前者的计算利用该物体是围绕 Oz 轴而成的旋转体, 因此可直接写出其截面面积.

习题 4105 求以 $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(a > 0)$ 为界的物体的体积.

解 题设的第一个曲面 $z = a - \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$ 是开口向下而顶点位于点 $(0, 0, a)$ 处的旋转抛物面, 它与三个坐标面 $x = y = z = 0$ 界定了四个有界的空间区域, 将处于第一卦限的区域记为 Ω_1. 然后再看平面 $z = a - x - y$, 它与三个坐标面 $x = y = z = 0$ 界定了第一卦限的四面体区域



习题 4105 的附图

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant a - x - y\}.$$

由于在区域 Ω_2 内有 $0 \leqslant x \leqslant a$ 和 $0 \leqslant y \leqslant a$, 因此成立不等式

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} \leqslant x + y,$$

于是本题给定的区域可从

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant a - \frac{x^2 + y^2}{a}\}$$

减去 Ω_2 得到.

由于区域 Ω_1 和 Ω_2 在坐标面 xOy 上的投影不同, 因此不如分别求积再相减. 又因四面体 Ω_2 的体积可直接求出为 $\frac{1}{6}a^3$, 因此只需计算下列积分

$$\iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}V = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{a-(x^2+y^2)/a} \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^a r\left(a - \frac{1}{a}r^2\right)\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}r^2 - \frac{1}{4a}r^4\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{8}a^3,$$

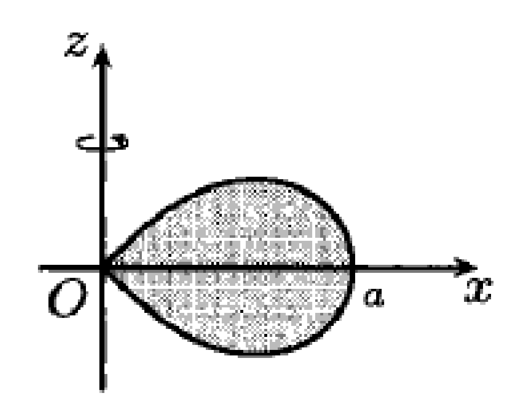
然后就得到所求体积为 $V = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{6}\right)a^3$. $\square$

习题 4108 用适当的坐标变换计算曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$ 所围的体积.

解 1 此曲面是坐标面 xOz 上的曲线 $(x^2+z^2)^2=a^2(x^2-z^2)$ 围绕 Oz 轴旋转所得的旋转曲面 (见附图). 用球坐标 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$ 代入曲面方程得到

$$r^2=a^2(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)=-a^2\cos 2\varphi,$$

可见变量的范围为 $\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant a\sqrt{-\cos 2\varphi}$. 在附图中作出了所围物体在坐标面 xOz 上的 $x\geqslant 0$ 部分的截面.



习题 4108 的附图

用球坐标代换求体积, 这时的雅可比行列式为 $r^2\sin\varphi$, 于是有

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{-\cos 2\varphi}}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}(-\cos\varphi)$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2u^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u\ (\text{然后作代换 } \sqrt{2}u=\sin\psi)$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\psi\,\mathrm{d}\psi=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}.\quad\square$$

解 2 利用该物体为旋转体, 用平面 $Z=z$ 与之相截得到的是圆环面, 这样就可转化为单重积分求体积.

如附图所示, 在 $y=0$ 时所得的曲线方程为 $(x^2+z^2)^2=a^2(x^2-z^2)$. 由此可确定上述圆环的外半径和内半径. 将它们分别记为 x_1 和 x_2, 则截面面积是 $\pi(x_1^2-x_2^2)$. 由于曲线方程是关于 x^2 的二次方程, 因此即可从其求根公式直接得到

$$x_1^2-x_2^2=2\sqrt{\frac{a^4}{4}-2a^2z^2},$$

并由此确定 z 的范围为 $[-\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{2\sqrt{2}}]$.

利用对称性就有

$$V=2\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{2}}}\pi(x_1^2-x_2^2)\,\mathrm{d}z=4\sqrt{2}a\pi\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{a^2}{8}-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

由于最后一个积分是半径为 $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ 的圆面积的四分之一, 因此得到

$$V=4\sqrt{2}a\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi a^2}{8}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}.\quad\square$$

习题 4111 求以曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$ 为界的物体的体积.

解 由曲面方程可见 $x\geqslant 0$. 由于方程中只出现 y^2 和 z^2, 因此物体关于坐标面 xOz 和 xOy 对称, 于是只要计算物体在第一卦限部分的体积再乘以 4 即可.

作广义球坐标代换

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y = br\sin\varphi\sin\theta,\quad z = cr\cos\varphi,$$

则代换的雅可比行列式为 $abcr^2\sin\varphi$. 这时曲面方程变成 $r^3 = \frac{a}{h}\sin\varphi\cos\theta$, 可见在第一卦限中 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{a}{h}\sin\varphi\cos\theta\right)^{\frac{1}{3}}$. 于是即可计算如下:

$$V = 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt[3]{(a/h)\sin\varphi\cos\theta}} r^2\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4a^2bc}{3h}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi a^2bc}{3h}.\quad\square$$

注　本题也可以用平行于坐标面 yOz 的平面 $X = x$ 与物体相截, 求出截面面积后用单重积分求出物体的体积.

习题 4116(b) 求以曲面 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h}-\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$ 为界的物体的体积.

解 1　本题用线性代换即可求解. 令

$$u = \frac{x}{a}+\frac{y}{b},\quad v = \frac{x}{h}-\frac{y}{k},\quad w = \frac{z}{c},$$

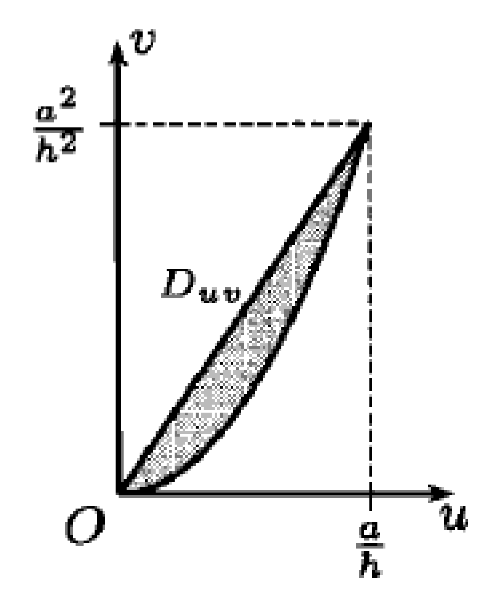
则可以计算得到 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = -\frac{ak+bh}{abchk}$, 因此在积分变换中需要的雅可比行列式的绝对值为

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}\right|} = \frac{abc}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}.$$

这时曲面方程变换为 $v = (u+w)^2$. 从上述变换式解出 x, y 为 u, v 的线性函数:

$$x = \frac{bu+kv}{\frac{b}{a}+\frac{k}{h}},\quad y = \frac{au-hv}{\frac{a}{b}+\frac{h}{k}},$$

即可知道约束条件 $y\geqslant 0$ 在变换后成为 $au-hv\geqslant 0$. 它与曲面在 $w = 0$ 时的限制 $v = u^2$ 就给出了坐标面 uOv 上的有界区域 (见附图):



习题 4116(b) 的附图

$$D_{uv} = \{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant\frac{a}{h}, u^2\leqslant v\leqslant\frac{a}{h}u\},$$

于其中 $x\geqslant 0$ 也成立, 而当 $(u,v)\in D_{uv}$ 时 $0\leqslant w\leqslant\sqrt{v}-u$.

于是即可求积如下:

$$V = \frac{abc}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}\int_0^{\frac{a}{h}}\mathrm{d}u\int_{u^2}^{\frac{au}{h}}\mathrm{d}v\int_0^{\sqrt{v}-u}\mathrm{d}w = \frac{abc}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}\int_0^{\frac{a}{h}}\mathrm{d}u\int_{u^2}^{\frac{au}{h}}(\sqrt{v}-u)\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{abc}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}\int_0^{\frac{a}{h}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{h}u^2+\frac{1}{3}u^3\right]\mathrm{d}u = \frac{abc}{60\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)}\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^4.\quad\square$$

解 2 由于变量 x, y, z 均大于等于 0, 作广义球坐标代换

$$x = ar\sin^2\varphi\cos^2\theta, \quad y = br\sin^2\varphi\sin^2\theta, \quad z = cr\cos^2\varphi,$$

则可计算得到其雅可比行列式为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} a\sin^2\varphi\cos^2\theta & b\sin^2\varphi\sin^2\theta & c\cos^2\varphi \\ 2ar\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta & 2br\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta & -2cr\cos\varphi\sin\varphi \\ -2ar\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta & 2br\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4abcr^2\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta.$$

这时曲面的方程变成 $r = \left(\frac{a}{h}\cos^2\theta - \frac{b}{k}\sin^2\theta\right)\sin^2\varphi$.

从题设的曲面方程可见在坐标面 xOy 的第一象限中 $\frac{x}{h} - \frac{y}{k} \geqslant 0$, 对于上述的广义球坐标变量则要求 $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 = \arctan\sqrt{\frac{ak}{bh}}$. 由此和上述曲面方程可知 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. 于是可如下计算体积:

$$V = 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\theta_0}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{[(a/h)\cos^2\theta-(b/k)\sin^2\theta]\sin^2\varphi} r^2\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\theta_0}\sin\theta\cos\theta\left(\frac{a}{h}\cos^2\theta - \frac{b}{k}\sin^2\theta\right)^3\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{abc}{15}\int_0^{\theta_0}\left[\frac{a}{h} - \left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\sin^2\theta\right]^3\mathrm{d}(\sin^2\theta)$$

$$= \frac{abc}{15}\cdot\frac{-1}{4\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)}\left[\frac{a}{h} - \left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\sin^2\theta\right]^4\Bigg|_0^{\theta_0} = \frac{abc}{60}\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}. \quad \square$$

习题 4117(b) 计算以曲面 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$ 为界的物体的体积.

分析 本题与 §4.3 的习题 4025 相同, 只是明确指出求第一卦限的部分. 从方法上看, 在 §4.3 要求用二重积分求体积, 而这里将体积看成为被积函数恒等于 1 的三重积分, 可用的变量代换就更为广泛了. □

习题 4123 计算以曲面 $\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $x = a$ 为界的物体的体积.

解 作线性代换

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{x}{a}+\frac{y}{b}, \quad w = \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c},$$

其雅可比行列式为 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \frac{1}{abc}$, 于是得到

$$\frac{D(x,y,z)}{(u,v,w)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}} = abc.$$

这时题中所给的曲面变成

$$v = \frac{2}{\pi} w \arcsin w, \quad v = 1, \quad u = 0, \quad u = 1.$$

又由反正弦函数的定义可知有限制条件 $-1 \leqslant w \leqslant 1$, 于是在 u, v, w 空间中在坐标面 uOw 上得到矩形

$$D_{uw} = \{(u,w) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant w \leqslant 1\}.$$

对于 $(u,w) \in D_{uw}$, 有 $\frac{2}{\pi} w \arcsin w \leqslant v \leqslant 1$ (当 $|w| \leqslant 1$ 时 $\frac{2}{\pi} w \arcsin w \leqslant 1$). 再利用区域对 w 的对称性, 就有

$$\begin{aligned} V &= 2abc \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}w \int_{(2/\pi) w \arcsin w}^1 \mathrm{d}v \\ &= 2abc \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{\pi} w \arcsin w\right) \mathrm{d}w \\ &= 2abc - \frac{4abc}{\pi} \int_0^1 w \arcsin w \,\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

对最后一个积分作代换 $t = \arcsin w$, 就有

$$\begin{aligned} \int_0^1 w \arcsin w \,\mathrm{d}w &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos t \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} t \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

因此得到 $V = \frac{3}{2} abc$. □

§8.8 三重积分在力学上的应用 (习题 4131–4160)

内容简介 本节是 §4.5 和 §8.5 的继续, 其中包括空间物体的质量、质心和转动惯量的计算以及在力学上的其他应用.

习题 4131–4142 是物体的质量和质心坐标的计算, 习题 4143–4149 是物体关于坐标平面和轴线的转动惯量的计算, 它们都按照有关公式转化为三重积分的计算. 由于这些习题中的积分区域都比较简单, 在计算方法上没有多少新的内容, 下面只看其中的一个习题, 然后主要讨论习题 4150 开始的几个题.

习题 4132 设一物体占有无界区域 $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$, 并且它的密度按规律 $\rho=\rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 而变化, 式中 $\rho_0>0$ 及 $k>0$ 为常数, 求该物体的质量.

解 本题的积分区域无界, 因此属于 §8.9 的广义三重积分, 但在对质量的积分中用球坐标代换即可将问题归结为 §4.4 中的广义单重积分, 计算上没有困难.

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1} \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz \\
&= \iiint\limits_{r\geqslant 1} r^2\sin\varphi\cdot\rho_0 e^{-kr}\,dr\,d\varphi\,d\theta \\
&= \rho_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^{+\infty}r^2e^{-kr}\,dr \\
&= 4\pi\rho_0\left[\left(-\frac{1}{k}r^2-\frac{2r}{k^2}-\frac{2}{k^3}\right)e^{-kr}\right]\Bigg|_1^{+\infty} \\
&= 4\pi\rho_0\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)e^{-k}.\quad\square
\end{aligned}
$$

习题 4150 设非均匀球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 的质量为 M, 并且球体内各点 $P(x,y,z)$ 的密度与该点至球心的距离成正比, 求该球体对其直径的转动惯量.

解 设密度 $\rho=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, k 为比例常数. 取转动轴线为 Oz 轴, 则转动惯量适宜用球坐标代换计算如下:

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \\
&= \iiint\limits_{0\leqslant r\leqslant R} kr^3\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^R r^5\,dr \\
&= k\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{R^6}{6} \\
&= \frac{4k\pi R^6}{9}.
\end{aligned}
$$

同样可用球坐标计算球体的质量为

$$\begin{aligned}M &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_{0\leqslant r\leqslant R} kr^3\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 4k\pi\cdot\frac{R^4}{4} = k\pi R^4.\end{aligned}$$

在质量为 M 已知时可由上述结果确定比例常数 $k=\dfrac{M}{\pi R^4}$, 因此转动惯量 $I_z=\dfrac{4MR^2}{9}$. □

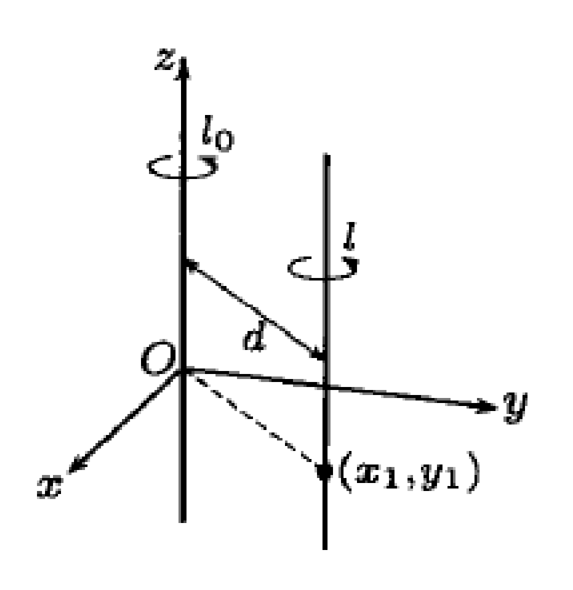
习题 4151 证明等式

$$I_l = I_{l_0} + Md^2,$$

其中 I_l 为物体对某轴 l 的转动惯量, I_{l_0} 为对平行于 l 并通过物体质心的轴 l_0 的转动惯量, d 为此两轴之间的距离, M 为物体的质量.

解 这是力学中关于空间物体的转动惯量的平行轴定理 (在 §8.5.1 的习题 4067 已经见过关于平面薄板的平行轴定理).

设物体所占空间区域为 Ω, 密度为 $\rho=\rho(x,y,z)$ $((x,y,z)\in\Omega)$. 将物体的质心取为原点, 将过质心的转轴 l_0 取为 Oz 轴, 这时 l_0 的直线方程为 $x=y=0$, 而与它平行的转轴 l 的方程为 $x=x_1$, $y=y_1$, 其中 x_1 和 y_1 不全为 0.



习题 4151 的附图

这时两条转轴之间的距离 $d=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, 在物体中的点 (x,y,z) 到转轴 l_0 的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$, 而到转轴 l 的距离为 $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$, 于是就可从转动惯量 I_l 出发作如下推导:

$$\begin{aligned}I_l &= \iiint\limits_{\Omega}\rho[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]\,\mathrm{d}V \\ &= \iiint\limits_{\Omega}\rho(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V - 2x_1\iiint\limits_{\Omega}\rho x\,\mathrm{d}V - 2y_1\iiint\limits_{\Omega}\rho y\,\mathrm{d}V + (x_1^2+y_1^2)\iiint\limits_{\Omega}\rho\,\mathrm{d}V \\ &= I_{l_0} + d^2M - 2x_1\iiint\limits_{\Omega}\rho x\,\mathrm{d}V - 2y_1\iiint\limits_{\Omega}\rho y\,\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

利用物体质心坐标 x_c, y_c 的计算公式

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho x\,\mathrm{d}V,\quad y_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho y\,\mathrm{d}V,$$

而将质心取为原点就表明上述两式的分子等于 0, 因此即从前式得到平行轴定理

$$I_l = I_{l_0} + d^2M. \quad \square$$

习题 4152 证明: 占有区域 V 的物体对过其质心 $O(0,0,0)$ 并与各坐标轴的夹角为 α,β,γ 的轴 l 的转动惯量等于

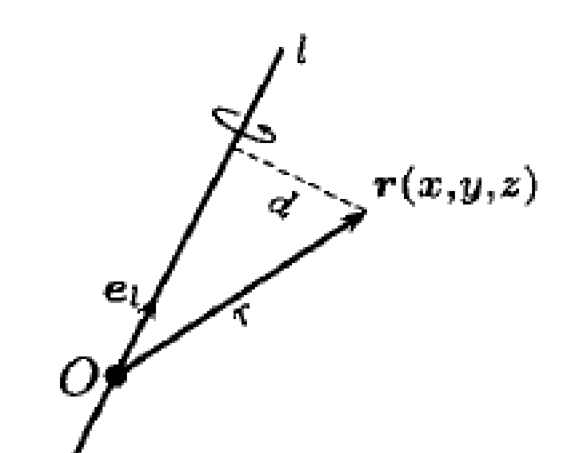
$$I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2K_{xz}\cos\gamma\cos\alpha,$$

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对坐标轴的转动惯量, 而

$$K_{xy} = \iiint\limits_V \rho xy\,\mathrm{d}V,\quad K_{yz} = \iiint\limits_V \rho yz\,\mathrm{d}V,\quad K_{xz} = \iiint\limits_V \rho zx\,\mathrm{d}V$$

为惯性积.

解 定义从原点到区域 V 内的点 (x,y,z) 的径向量为 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$, 其模长为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则如附图所示, 点 (x,y,z) 到转轴 l 的距离 $d=\sqrt{r^2-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_l)^2}$, 其中 $\boldsymbol{e}_l$ 是转轴方向的单位向量 $\pm(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 于是就得到



习题 4152 的附图

$$d^2 = x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2.$$

再利用 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 就有

$$d^2 = (y^2+z^2)\cos^2\alpha+(z^2+x^2)\cos^2\beta+(x^2+y^2)\cos^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta-2yz\cos\beta\cos\gamma-2zx\cos\gamma\cos\alpha,$$

将它代入

$$I_l = \iiint\limits_V \rho d^2\,\mathrm{d}V$$

并加整理即得所要求证的公式. □

习题 4153 求密度为 ρ_0 的均质圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$, $-h\leqslant z\leqslant h$ 对直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

解 本题可利用上一题的公式求解, 但直接计算似更简单. 先求出直线 $x=y=z$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt3}$. 于是点 (x,y,z) 到该直线的距离平方为

$$\begin{aligned}d^2 &= x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2\\ &= \frac13[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2]\end{aligned}$$

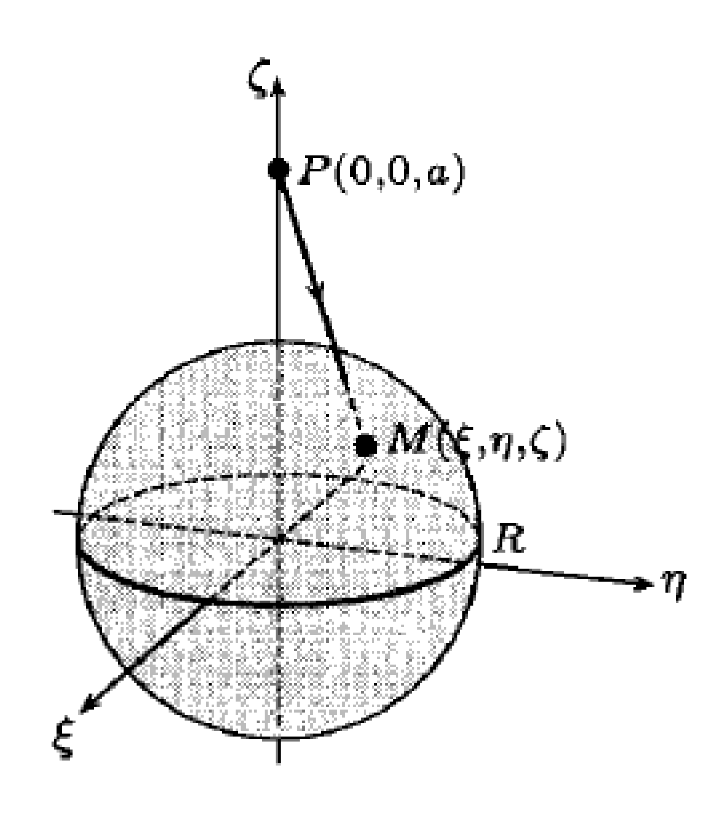
记密度常数为 ρ_0, 即可用柱坐标计算如下:

$$\begin{aligned}I &= \frac{\rho_0}{3}\iiint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2,|z|\leqslant h}[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2]\,\mathrm{d}V\\ &= \frac{\rho_0}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\mathrm{d}r\int_{-h}^h r(2r^2-r^2\sin2\varphi-2rz\cos\varphi-2rz\sin\varphi+2z^2)\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{2\pi\rho_0}{3}\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^h 4r(r^2+z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\rho_0}{3}\left(a^4h+\frac23a^2h^3\right).\end{aligned}$$

若圆柱体的质量 $M=2\pi a^2h\rho_0$ 已知, 则 $I=\dfrac{M}{3}\left(a^2+\dfrac23h^2\right)$. □

习题 4155 求密度为 ρ_0 的均质球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的牛顿引力势.

解 由于对称性, 不妨将点 $P(x,y,z)$ 取在 $O\zeta$ 轴上. 记 $a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 该点即是 $P(0,0,a)$. 在附图中作出了 $a>R$ 的情况.



习题 4155 的附图

球体内的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 到点 P 的距离为

$$d=\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2},$$

而引力势的计算公式可写为含参数 $a\geqslant 0$ 的积分

$$f(a)=\rho_0\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{d}.$$

在求出 $f(a)$ 后用 $a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 代入其中即可得到在点 $P(x,y,z)$ 处的引力势.

用球坐标代换[①]

$$\xi=r\sin\varphi\cos\theta,\quad \eta=r\sin\varphi\sin\theta,\quad \zeta=r\cos\varphi,$$

其雅可比行列式为 $r^2\sin\varphi$, 就得到

$$f(a)=\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}.$$

若 $a=0$ 则可直接得到 $f(0)=2\pi\rho_0R^2$.

在 $a>0$ 时则有

$$\begin{aligned}f(a)&=2\pi\rho_0\int_0^R r^2\left\{\left[\frac{1}{ar}(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\right\}\mathrm{d}r\\&=\frac{2\pi\rho_0}{a}\int_0^R r(r+a-|r-a|)\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

若 $0<a<R$, 则需要分段积分得到

$$\begin{aligned}f(a)&=\frac{2\pi\rho_0}{a}\left(\int_0^a 2r^2\,\mathrm{d}r+\int_a^R 2ar\,\mathrm{d}r\right)\\&=\frac{2\pi\rho_0}{a}\left[\frac{2a^3}{3}+a(R^2-a^2)\right]\\&=2\pi\rho_0\left(R^2-\frac{1}{3}a^2\right),\end{aligned}$$

其中最后的结果对于 $a=0$ 也适用.

若 $a\geqslant R$, 则得到

$$\begin{aligned}f(a)&=\frac{2\pi\rho_0}{a}\int_0^R 2r^2\,\mathrm{d}r\\&=\frac{4\pi\rho_0}{3a}R^3.\end{aligned}$$

综合以上就得到所求的牛顿引力势为

① 本题也可以用柱坐标代换求解, 但如后面的注 3 所示, 对于密度依赖于点到球心距离的非均质球的情况, 例如下一个习题 4156, 柱坐标代换是不合适的.

$$u(x,y,z)=\begin{cases}2\pi\rho_0\left[R^2-\dfrac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\right], & 0\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R,\\ \dfrac{4\pi\rho_0R^3}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & \sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant R.\end{cases}\qquad\square$$

注 1　$f(a)$ 作为含参变量的积分, 在 $a\in[0,R]$ 和 $[R,+\infty)$ 上表达式不同, 但在 $[0,+\infty)$ 上连续, 而且有连续的导函数.

这里要指出, 当 $a\in[0,R]$ 时, 从牛顿引力势的三重积分公式中可见被积函数 $\dfrac{1}{d}$ 无界, 因此这已经属于下一节 §8.9 中的广义三重积分. 利用 §8.9.3 的习题 4192 的结论, 可以保证其收敛性成立.

注 2　由于牛顿引力势的梯度就是引力, 因此从本题的结果即可导出球体对点 $P(x,y,z)$ 处的质点的引力. 以下将万有引力常数 G 和质点的质量均取为 1.

利用对称性, 将质点放在点 $P(0,0,a)$ 处, 则物体的引力即在 Oz 轴方向, 因此即是 $f'(a)$.

对于 $a\geqslant R$, 这时有

$$\begin{aligned}f'(a)&=-\frac{4\pi\rho_0R^3}{3a^2}\\&=-\frac{M}{a^2},\end{aligned}$$

其中 $M=\dfrac{4\pi\rho_0}{3}R^3$ 为球体质量. 由此可见引力方向为从质点指向球体中心, 其数值与将球体质量集中在球心时的引力相同.

对于 $0\leqslant a<R$, 则有

$$\begin{aligned}f'(a)&=-\frac{4\pi\rho_0a}{3}\\&=-\frac{M_a}{a^2}\ (\text{后一式对 } a>0 \text{ 有意义}),\end{aligned}$$

其中 $M_a=\dfrac{4\pi\rho_0a^3}{3}$ 是球体中半径等于 a 的那部分的质量. 由此可见, 当质点的位置在球体内部时, 若恰在球心, 则引力为 0, 否则, 在球体中与球心距离大于 a 的部分对质点的引力为 0.

注 3　若球体为非均质, 但密度函数只与点到球心的距离有关, 即 $\rho=\rho(r)$, 则上述注 2 中的结论仍然成立. 为此只要将本题的解中的 ρ_0 移到积分号下并换为 $\rho(r)$ 即可. 由于在上述解法中采用了球坐标代换, 因此即可得到所要的结论. 这时的物体质量为

$$M=\int_0^R4\pi\rho(r)r^2\,\mathrm{d}r.$$

最后要指出, 所有上述结论都是牛顿的发现, 并于 1687 年发表在他的名作《自然哲学之数学原理》中. 此书被公认为科学史上最重要的著作, 原文为拉丁文, 中译本见武汉出版社的 1992 年版, 最新的英译本为 1999 年版.

习题 4156　设球壳 $R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2$ 的密度 $\rho=f(R)$, 其中 f 为已知函数, 而 $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, 求该球壳在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿引力势.

提示 参考习题 4155 的解及其注 3. □

习题 4158 质量为 M 的均质球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0,0,a)$?

提示 本题已于习题 4155 的注 2 中用牛顿引力势解决, 但直接按照引力的积分公式进行计算也是一个很好的训练. 这样就不需要引力势的概念.

如习题 4155 的附图所示, 由于对称性, 只需要计算球体的引力在 Oz 轴方向的分量

$$F(a)=Gm\rho_0\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\frac{\zeta-a}{d^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 G 为引力常数, 密度常数 ρ_0 可用球体质量 M 表出, $d=\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2}$. □

注 如习题 4155 的注 3 所示, 本题可以将均质球体改为密度函数只与点到球心距离有关的非均质球体, 这时用球坐标代换即可解决问题.

习题 4159 求密度为 ρ_0 的均质圆柱体 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$, $0\leqslant\zeta\leqslant h$ 对单位质量的质点 $P(0,0,z)$ 的引力.

注 本题与 §8.5 的习题 4073 只是在记号和表达上略有不同, 实际上相同.

§8.9 广义二重和三重积分 (习题 4161–4200)

内容简介 这是 §4.4 的广义积分在重积分的推广, 其中包括收敛性的判定和广义重积分的计算.

作为广义积分的推广, 广义重积分的定义和处理方法与广义积分在许多方面是相似的. 首先分别处理两种特殊类型: (1) 积分区域无界, (2) 积分区域有界而被积函数无界, 也就是有奇点. 对于同时有积分区域无界和奇点的情况, 则可将积分区域适当分割后处理. 此外, 由于维数的增加, 广义重积分除了奇点之外还可能有奇线 (对于二重积分) 和奇面 (对于三重积分).

广义重积分与 §4.4 的广义积分比较, 有一个很不相同的性质, 它使得对于广义重积分的敛散性判定归结为非负函数的广义重积分的判定, 从而只需要用比较判别法. 这个性质对于各种类型和重数的广义重积分全都成立. 这就是下列命题, 其证明见 [11] 第三卷的 613 小节.

命题 8.5 广义重积分的可积与绝对可积等价.

8.9.1 无界区域上的广义二重积分 (习题 4161–4180)

习题 4161 设 $0 < m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M$, 研究广义重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的敛散性.

解 由命题 8.5 和不等式

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p} \leqslant \frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

可见本题的广义积分与 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}$ 同时收敛或同时发散. 现在定义递增的有界闭区域序列

$$D_n = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant n^2\} \ (n = 2,3,\cdots),$$

则当 $n \to \infty$ 时序列 $\{D_n\}$ 即可竭尽积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geqslant 1\}$①. 对于 D_n 上的积分用极坐标代换计算就有

$$\iint\limits_{D_n} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^n \frac{r\,\mathrm{d}r}{r^{2p}} = 2\pi \int_1^n \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}},$$

于是就将问题归结为广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}$ 的敛散性. 对它用比较判别法 (或者直接求积), 即可知道本题的答案为: 当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leqslant 1$ 时发散. □

① 与 §4.4 的非负函数的广义积分相同, 对于非负函数的广义重积分, 只要在一列竭尽积分区域的有界闭区域上的积分收敛就保证广义重积分收敛. 这就是习题 4166 的内容.

习题 4164 研究广义重积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0,q>0)$ 的敛散性.

解 由对称性可知, 问题等价于在第一象限中的积分 $\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$ 的敛散性.

记其积分区域为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1\}.$$

由于该区域的边界中的 $x+y=1$ 与被积函数的分母 x^p+y^q 不一致, 这使得今后的变量代换不方便, 为此将 D 分解为 D' 和 D'' 的并, 其中

$$D'=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2\},$$

$$D''=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2\}.$$

由于区域 D' 有界, 因此问题又等价于在区域 D'' 上的广义重积分的敛散性.

由于当 x,y 非负且 $x^p+y^q\geqslant 2$ 时, 不等式 $x+y\geqslant 1$ 必定成立 (用反证法即可知), 因此在 D'' 的定义中的条件 $x+y\geqslant 1$ 可以去掉.

定义递增的有界闭区域序列

$$D_n=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,2\leqslant x^p+y^q\leqslant n\}\ \ (n=3,4,\cdots)$$

则可见当 $n\to\infty$ 时该序列竭尽无界区域 D''.

对于在 D_n 上的积分作广义极坐标代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi,\quad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi,$$

则其雅可比行列式为

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\dfrac{2}{p}r^{\frac{2}{p}-1}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi & \dfrac{2}{q}r^{\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi\\ -\dfrac{2}{p}r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin\varphi & \dfrac{2}{q}r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi,$$

被积函数变为 $\dfrac{1}{r^2}$, 而积分区域 D_n 变成①

$$\{(r,\varphi)\mid\sqrt{2}\leqslant r\leqslant\sqrt{n},0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}.$$

于是得到

$$\iint\limits_{D_n}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\,\mathrm{d}r.$$

这时等号右边是两个积分的乘积. 第一个积分 (可用贝塔函数写出) 在 $p>0,q>0$ 时收敛, 而第二个积分当 $n\to\infty$ 时收敛的充要条件是 $\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}-3<-1$, 因此本题的广义重积分收敛的充要条件是 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}<1$. □

① 至此可以看出, 从区域 D 中挖去 D' 的目的是什么了. 这完全是为了使得留下的区域 D'' 在此变量代换后的边界容易处理一点.

习题 4165 研究广义重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x+y\geqslant 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的敛散性.

解 记积分区域为 $D=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$, 取递增的矩形区域序列 D_n $(n=2,3,\cdots)$, 其中

$$D_n=\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant n,-n\pi\leqslant y-x\leqslant n\pi\},$$

则当 $n\to\infty$ 时该区域序列竭尽积分区域 D. 若本题的广义重积分收敛, 则在 D_n 上的积分得到的数列 $\{I_n\}$ 应当收敛. 用线性代换

$$u=x+y,\quad v=y-x,$$

则区域 D_n 变为坐标面 uOv 上的矩形

$$\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant n,-n\pi\leqslant v\leqslant n\pi\},$$

而雅可比行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}=\frac{1}{2},$$

因此就有

$$\begin{aligned}I_n&=\iint\limits_{D_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_1^n\mathrm{d}u\int_{-n\pi}^{n\pi}\frac{\cos v-\cos u}{u^p}\,\mathrm{d}v\\&=-\frac{n\pi}{2}\int_1^n\frac{\cos u}{u^p}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

可见当 $n\to\infty$ 时对于每一个 p 值都不可能收敛, 因此本题的广义重积分对每个 p 值都是发散的. □

习题 4166 证明: 若函数 $f(x,y)$ 为非负的连续函数, 有界闭区域 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 组成区域 S 的任何一个竭尽递增序列, 则

$$\iint\limits_S f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

这里左端与右端同时有意义或无意义.

解 由于 $\displaystyle\iint\limits_{S_n}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 关于 n 为单调递增数列, 因此只有两种可能性, 即收敛于有限极限或发散于正无穷大. 本题的目的就是证明, 对于竭尽 S 的任何一个单调递增有界闭区域序列, 在区域序列上的积分值或者都收敛于相同的有限数, 或者都发散于正无穷大.

设对某一个合乎条件的区域序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$, 下列极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

是有限数, 则 $\displaystyle\iint\limits_{S_n}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant I$ 对每一个 n 成立, 且对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 n_0, 使得成立

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S_{n_0}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant I.$$

现设 $T_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是竭尽 S 的另一个递增有界闭区域序列, 则存在 N, 使得当 $n>N$ 时 $T_n\supset S_{n_0}$. 由于 f 非负, 因此就有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S_{n_0}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{T_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

另一方面, 对下标大于 N 的每一个 T_n, 存在 n_1, 使得 $T_n\subset S_{n_1}$, 于是又得到

$$\iint\limits_{T_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{S_{n_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant I.$$

综合以上就知道当 $n>N$ 时成立不等式

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{T_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant I.$$

因此就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{T_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I$.

由此又可见, 若有某个区域序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=+\infty$, 则任何其他区域序列也必定如此. 为此只要用反证法并重复前面的推导即可. □

注 在本题的证明中的关键在于, 当区域序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 单调递增且竭尽无界区域 S 时, 对于 S 内任意给定的有界闭区域 T, 存在 N, 使得 $S_N\supset T$.

应当指出, 竭尽条件 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n=S$ 以及序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的递增性质不足以保证上述结论成立. 例如, 设

$$S=\{(x,y)\mid x\geqslant 0\}$$

是右半闭平面,

$$S_n=\{(x,y)\mid (x-n)^2+y^2\leqslant n^2\}\ (n=1,2,\cdots)$$

是圆心为点 $(n,0)$ 和半径为 n 的闭圆序列, 则它是竭尽 S 的递增有界闭区域, 然而对于

$$T=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

就不可能存在 N, 使得 $S_N\supset T$.

回顾 [11] 等教科书中关于广义重积分的定义, 可以看到, 在竭尽无界区域的递增有界闭区域序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的定义中还有其他条件. 它的一个等价表述是: 若记

$$B_R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\},$$

为闭圆, 则对每个 n, 存在 R_n, 使得

$$S_n\supset S\cap B_{R_n},$$

且 $R_n\to+\infty\ (n\to\infty)$. 在这样的定义下习题 4166 中的证明过程就没有困难. 对于高于二重的广义重积分的竭尽序列也有类似的要求[①].

① 此外区域序列中的每个区域都应当是可求面积 (或者可求体积) 的区域. 在习题 4166 中没有说区域 S 无界. 若 S 为有界区域, 则只需要竭尽序列的每一个区域为可求面积即可.

习题 4167 证明

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{|x|\leqslant n,|y|\leqslant n}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi,$$

然而

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

(n 为正整数).

提示 对第一个等式可用 §7.3.2 的习题 3830 (菲涅尔积分), 对第二个等式可用极坐标代换. □

练习题 由习题 4167 可见广义重积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 发散. 试对此积分的发散性用其他方法作出证明.

习题 4168 证明: 尽管两个二次积分

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \text{ 及 } \int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

收敛, 但广义二重积分

$$\iint\limits_{x\geqslant1,y\geqslant1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

发散.

解 对两个二次积分可计算如下:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y&=\int_1^{+\infty}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_{y=1}^{y=+\infty}\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=-\arctan x\bigg|_1^{+\infty}=-\frac{\pi}{4},\\\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x&=\int_1^{+\infty}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=1}^{x=+\infty}\right)\mathrm{d}y\\&=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\arctan x\bigg|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(只要将第一个二次积分中的 x 与 y 对换即可得到第二个二次积分的值为 $\frac{\pi}{4}$①.)

为证题给的广义二重积分发散, 可用反证法. 设其收敛, 则从命题 8.5 知道

$$\iint\limits_{x\geqslant1,y\geqslant1}\frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

也收敛.

① 由两个二次积分的值不相等已经可以推出本题的广义二重积分发散. 实际上, 如该广义二重积分收敛, 则将被积函数取绝对值后的广义二重积分也收敛. 根据 [11] 第三卷的 614 小节中的讨论, 该二重积分即可转化为两个相等的二次积分. 又将原来的被积函数 f 分解为两个非负函数 $\frac{|f|+f}{2}$ 与 $\frac{|f|-f}{2}$ 之差, 就可以建立变号函数的收敛广义二重积分的两个二次积分相等的结论.

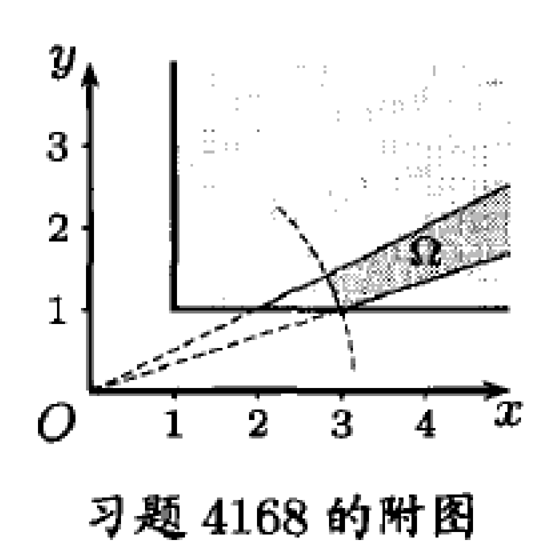
如附图所示，从无界的积分区域 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 1,y\geqslant 1\}$ 中取出一个无界子区域

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant 2y\leqslant x\leqslant 3y,x^2+y^2\geqslant 10\},$$

则下列广义二重积分

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

也收敛.



习题 4168 的附图

在区域 Ω 内 $x^2-y^2\geqslant 3y^2$, $x^2+y^2\leqslant 10y^2$, 因此有

$$\frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\geqslant\frac{3y^2}{10y^2(x^2+y^2)}=\frac{3}{10(x^2+y^2)},$$

于是可推出广义二重积分

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{3}{10(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

也收敛.

在上述积分收敛的前提下可以用极坐标代换计算得到

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{3}{10(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{10}\int_{\arctan(1/3)}^{\arctan(1/2)}\mathrm{d}\varphi\int_{\sqrt{10}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r}=+\infty,$$

由此引出矛盾. 可见题设的广义二重积分发散. □

以下的习题 4169–4180 均为无界区域上的广义二重积分的计算. 由习题 4168 以及上页的底注可见, 在广义二重积分的收敛性没有保证的前提下, 将它转化为二次积分进行计算是没有根据的. 然而, 如习题 4166 所示, 非负函数的广义重积分只可能或者收敛, 或者为 $+\infty$. 对于后者, 用广义二重积分的定义即可证明这时的二次积分均为 $+\infty$. 因此对于非负函数的广义二重积分, 可以不必先考虑其敛散性而直接用二次积分计算或者再作变量代换计算.

习题 4173 计算积分 $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

解 记积分为 I. 利用对称性可见, I 是 $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant x^2+1\}$ 上的积分的两倍. 化为先 y 后 x 的二次积分计算如下:

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2+x^4}=2\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\bigg|_{y=x^2+1}^{y=+\infty}\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x^2+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{x}\arctan\frac{x^2}{x^2+1}\bigg|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

对最后一式的积分可用配对法计算如下 (参见 §3.2.1 的习题 1884 的解 2):

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x}{x^2 + 1 + \frac{1}{2x^2}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{2x^2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{2x^2}}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2x}\right)}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2x}\right)^2 + (\sqrt{2}+1)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2x}\right)}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2x}\right)^2 - (\sqrt{2}-1)}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \arctan \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2x}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\bigg|_{+0}^{+\infty} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}} \ln\left|\frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2x} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}{x + \frac{\sqrt{2}}{2x} + \sqrt{\sqrt{2}-1}}\right|\Bigg|_{+0}^{+\infty}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \cdot \pi = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\,\pi. \quad \square$$

习题 4175 用极坐标计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 用极坐标代换就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\bigg|_0^{+\infty} = \pi. \quad \square$$

注 由于本题的广义二重积分又可如下化为二次积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

因此就得到在 §7.3.2 的习题 3803 中的欧拉–泊松积分 (也常称为概率积分):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

在 §7.2.3 的习题 3776.1 的注中已经浏览了该积分的几个计算方法, 并指出本题的方法为最简单. 这里补充不引入广义二重积分的做法. 为此定义以下集合:

$$B_R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\},$$

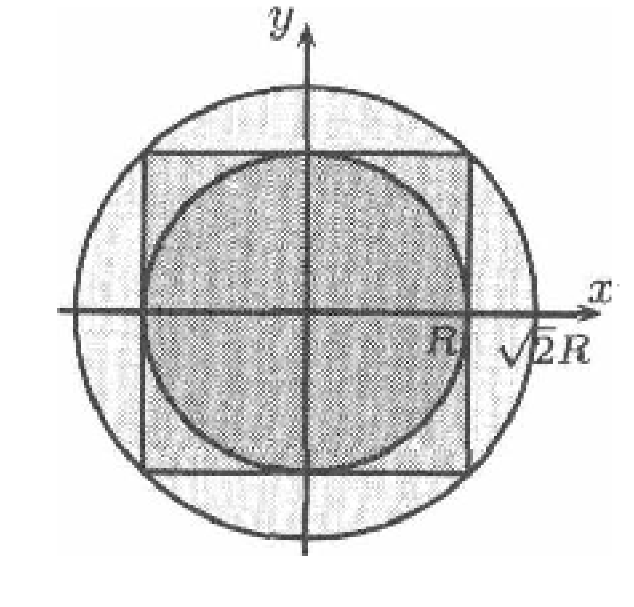
$$D_R = [-R,R] \times [-R,R] = \{(x,y) \mid |x| \leqslant R, |y| \leqslant R\},$$

$$B_{\sqrt{2}R} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2R^2\},$$

则如附图所示, 有 $B_R \subset D_R \subset B_{\sqrt{2}R}$, 于是就有

$$\iint\limits_{B_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{D_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \iint\limits_{B_{\sqrt{2}R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$



习题 4175 的附图

对左边和右边的积分用极坐标代换, 就得到夹逼不等式

$$\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}) \leqslant \left(\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \pi(1-\mathrm{e}^{-2R^2}),$$

最后令 $R\to+\infty$ 即可得到所要的结果.

习题 4176 用极坐标计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

提示 本题的广义二重积分的收敛性可通过将被积函数取绝对值后利用习题 4175 得到. □

习题 4178 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $a>0$, $ac-b^2>0$①.

解 记积分为 I. 分两步做. 第一步是作平移以消去指数中关于变量 x 和 y 的一次项. 为此要求 x_0, y_0, 使得成立

$$\begin{aligned}&ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f\\&=a(x-x_0)^2+2b(x-x_0)(y-y_0)+c(y-y_0)^2+f',\end{aligned}$$

其中右边最后的 f' 也待定. 将右边的平方和乘积项展开, 即得到关于 x_0, y_0 的线性方程

$$ax_0+by_0=-d, \quad bx_0+cy_0=-e.$$

且得到

$$f'=f-ax_0^2-2bx_0y_0-cy_0^2.$$

为简化对 f' 的计算, 同时也为将本题在 §8.10 的习题 4220 中推广到一般的 n 重积分作准备, 在此引入矩阵向量记号是适宜的. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}d\\ e\end{pmatrix},$$

则就得到

$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad f'=f-\begin{pmatrix}x_0 & y_0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=f-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

引入 (对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式) 加边的三阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^T & f\end{vmatrix},$$

并用 $-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^{-1}$ (的两个分量依次) 乘其前两行后加到第三行, 此时行列式的值不变, 前两行也不变, 但其第三行的前两个元变成 0 (记为 $\boldsymbol{0}^T$), 从而得到

① 为使得本题与今后的推广题 (§8.10 的习题 4220) 一致, 这里对习题作了改动, 即将原题的指数乘以 -1, 并将条件 $a<0$ 相应地改为 $a>0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^T & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & f - \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = \delta \cdot f',$$

其中记号 $\delta = ac - b^2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. (这些运算就是将原行列式 Δ 的第一行乘以 x_0 又将第二行乘以 y_0 一起加到第三行.) 于是得到所要求的 $f' = \Delta/\delta$.

对积分作平移 $u = x - x_0, v = y - y_0$, 其雅可比行列式等于 1, 于是得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(au^2+2buv+cv^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

现在实施第二步, 即对指数作配方得到

$$au^2 + 2buv + cv^2 = a\Big(u + \frac{b}{a}v\Big)^2 + a\Big(\frac{ac - b^2}{a^2}\Big)v^2,$$

然后再作代换

$$s = u + \frac{b}{a}v, \quad t = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}v = \frac{\sqrt{\delta}}{a}v,$$

则其雅可比行列式为

$$\frac{D(u,v)}{D(s,t)} = \frac{1}{\dfrac{D(s,t)}{D(u,v)}} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{\delta}}{a}} = \frac{a}{\sqrt{\delta}}.$$

于是即可利用概率积分得到本题的答案为

$$\begin{aligned} I &= \frac{a}{\sqrt{\delta}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a(s^2+t^2)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-as^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{a}s) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{a}t) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}}. \quad \square \end{aligned}$$

习题 4180 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

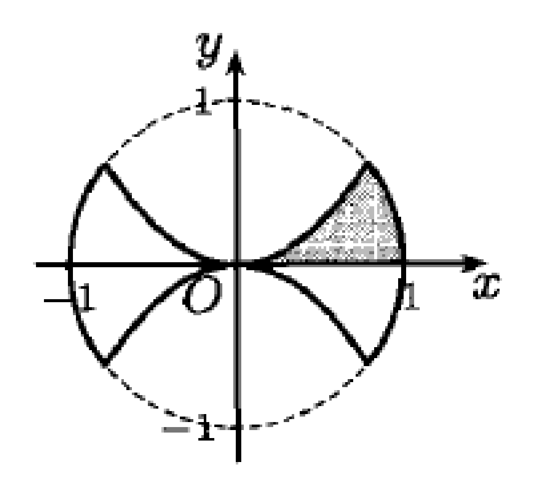
提示 仿照习题 4178 的第二步, 将指数配方后作代换即可求出. □

8.9.2 有界区域上的广义二重积分 (习题 4181–4190)

与 §4.4 的第二类广义积分类似, 这个小节的习题是有界区域上的无界函数的广义积分, 但除了奇点之外还可能出现奇线.

对于这类广义重积分, 命题 8.5 仍然成立, 同时对于被积函数非负的情况, 也只有积分收敛或发散于 $+\infty$ 两种可能性. 这时转化为二次积分以及进行变量代换都没有困难.

习题 4181 研究积分 $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$ 的敛散性, 其中区域 Ω 由条件 $|y| \leqslant x^2, x^2 + y^2 \leqslant 1$ 确定.



习题 4181 的附图

解 被积函数以原点 O 为奇点. 如附图所示, 利用区域和被积函数的对称性, 只需研究在第一象限部分的积分是否收敛即可. 又由于只有一个奇点, 只需考虑在区域

$$\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$$

上的函数 $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 是否可积. 将它写为二次积分就得到

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\bigg|_{y=0}^{y=x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\arctan x\,\mathrm{d}x,$$

由于这个积分的被积函数于 $[0,1]$ 上有界, 因此已是常义积分, 收敛不成问题. □

习题 4183 研究积分 $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0, q>0)$ 的敛散性.

提示 奇点为原点. 利用对称性, 只需研究第一象限部分上的积分的敛散性. 用广义极坐标代换, 并将在第一象限的区域边界改为 $x^p+y^q \leqslant 1$ 进行研究即可. □

习题 4184 研究积分 $\displaystyle\int_0^a\int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的敛散性, 其中 $0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$.

解 若 $p\leqslant 0$, 则为常义积分.

对于 $p>0$, 被积函数有奇线 $y=x$ $(0\leqslant x\leqslant a)$. 此时由于广义重积分的绝对可积与可积等价, 且有

$$\frac{m}{|x-y|^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y)|}{|x-y|^p} \leqslant \frac{M}{|x-y|^p},$$

因此本题的积分与 $\displaystyle\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^p}$ 同时收敛或同时发散.

利用对称性, 则只需要讨论区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant x\}$ 上的可积性. 作代换 $u=x$, $v=x-y$, 则其雅可比行列式的绝对值为 1, 区域 D 变为 $0\leqslant u\leqslant a$, $0\leqslant v\leqslant u$, 于是可计算得到

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^p} = \int_0^a \mathrm{d}u \int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{v^p}.$$

若 $p\geqslant 1$, 则内层积分对于每个 $u\in(0,a]$ 都发散. 若 $0<p<1$, 则有

$$\int_0^a \mathrm{d}u \int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{v^p} = \frac{1}{1-p}\int_0^a u^{1-p}\,\mathrm{d}u,$$

这已是常义积分. 因此本题的答案是当 $p<1$ 时积分收敛, $p\geqslant 1$ 时积分发散. □

习题 4186 证明: 若 1) 函数 $\varphi(x,y)$ 在有界区域 $a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$ 上连续; 2) 函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant A$ 上连续; 3) $p<1$, 则积分

$$\int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\,\mathrm{d}y$$

收敛.

提示 本题为二次积分. 由于 $\varphi(x,y)$ 在题设的有界区域上连续, 因此存在 $M>0$, 使得 $|\varphi(x,y)|\leqslant M$. 于是只需要证明积分

$$\int_a^A \mathrm{d}x\int_b^B \frac{1}{|f(x)-y|^p}\,\mathrm{d}y$$

收敛. 若 f 的值域与 $[b,B]$ 之交为空集, 则该积分收敛是显然的. 否则, 可如习题 4184 那样, $p<1$ 已保证里层积分收敛, 然后求积并证明外层积分也收敛. □

习题 4189 计算积分 $\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,, 其中区域 Ω 是由直线 $y=0$, $y=x$, $x=\pi$ 围成的.

解 记积分为 I. 由于本题的被积函数常负, 因此可以与非负的情况一样处理.

作代换 $u=x-y$, $v=x+y$, 即是 $x=\dfrac{1}{2}(u+v)$, $y=\dfrac{1}{2}(v-u)$. 这时的雅可比行列式为 $\dfrac{1}{2}$, 区域 Ω 变为坐标面 uOv 上由 $u=0$, $u=v$, $u+v=2\pi$ 所限制的区域 Ω', 于是可计算如下:

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega'}\ln\sin u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin u\,\mathrm{d}u\int_u^{2\pi-u}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-u)\ln\sin u\,\mathrm{d}u \quad (\text{然后利用 §4.2.5 的命题 4.10})$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,\mathrm{d}u=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2. \quad (\text{其中引用 §4.4.1 的习题 2353(a) 的欧拉积分})$$ □

8.9.3 广义三重积分 (习题 4191–4200)

这里同时有无界区域和有界区域上的广义三重积分, 后者除了奇点、奇线之外还可能有奇曲面. 《习题集》在本小节的习题一般均为前两节的习题在三维空间中的推广.

习题 4192 研究积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\dfrac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 的收敛性, 其中 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

解 根据命题 8.5 和关于 $\varphi(x,y,z)$ 的条件知道本题的积分与将函数 φ 改为恒等于 1 后的积分的敛散性相同. 对后者用球坐标代换就有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}$$

$$=4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}},$$

由此可见, 当 $2p-2<1$, 即 $p<\dfrac{3}{2}$ 时积分收敛, 而当 $p\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时积分发散. □

注 在 §8.8 的习题 4155 (以及其他类似的习题) 中已经出现了广义重积分 (见该题的注 1), 它们的共同之处都是在被积函数的分母上出现了有界物体内部各点到物体内的某个固定点的距离而引起的. 它们的收敛性都可以用本题的结论得到保证.

习题 4199 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$.

解 1 由于被积函数可分离, 化为三次积分后引用概率积分的已知值即可得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz\\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^3 = \pi^{\frac{3}{2}}.\quad \square\end{aligned}$$

解 2 用球坐标代换可求积如下:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{+\infty} r^2e^{-r^2}\,dr\\ &= 4\pi\left(-\frac{r}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,dr\right)\\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \pi^{\frac{3}{2}}.\quad \square\end{aligned}$$

习题 4200 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 为正定二次型.

解 用 $\boldsymbol{A}$ 表示三阶对称阵 $(a_{ij})_{3\times3}$. 由高等代数知识知道存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}=(u_{ij})_{3\times3}$, 使得

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\},$$

其中右边是三阶对角阵, 其对角线上的元素 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由 $P(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型的题设条件, 可见 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值都是正数.

作线性齐次变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{s}$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$, $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,s_3)^T$, 也就是

$$x_1=u_{11}s_1+u_{12}s_2+u_{13}s_3,$$

$$x_2=u_{21}s_1+u_{22}s_2+u_{23}s_3,$$

$$x_3=u_{31}s_1+u_{32}s_2+u_{33}s_3,$$

则雅可比行列式 $\dfrac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(s_1,s_2,s_3)}=|\boldsymbol{U}|=\pm1$, 因此取绝对值后就是 1. 这时二次型 $P(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{s}=\lambda_1s_1^2+\lambda_2s_2^2+\lambda_3s_3^2$.

记所要求的积分为 I, 于是可计算如下:

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda_1s_1^2+\lambda_2s_2^2+\lambda_3s_3^2)}\,ds_1\,ds_2\,ds_3\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1s_1^2}\,ds_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1s_2^2}\,ds_2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1s_3^2}\,ds_3\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_1}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_3}} = \pi^{\frac{3}{2}}\cdot(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由于有 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 因此最后得到 $I=\sqrt{\dfrac{\pi^3}{|\boldsymbol{A}|}}$. $\square$

§8.10 多重积分 (习题 4201–4220)

内容简介 本节的多数习题为重数为 n 的多重积分计算或公式证明. 这方面的参考书是 [11] 第三卷的 §18.5, 其中的 4 个小节包含了丰富的内容和例题.

在本节的部分计算题中, 于 §8.1.6 由习题 3983 引入的卡塔兰方法将起重要作用, 它在合适的条件下可将 n 重积分转化为单重积分. 为方便起见将其公式 (8.5) 复述如下:

$$\int_D h(f(x))g(x)\,\mathrm{d}x = \int_m^M h(t)F'(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中左边为 n 维空间的区域 D 上的 n 重积分, $f(D)=[m,M]$, $h=h(f)$ 为一元函数, $F(t)$ 由以下的 n 重积分计算得到:

$$F(t) = \int_{D\cap\{m\leqslant f(x)\leqslant t\}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

习题 4202 设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为区域 $0\leqslant x_i\leqslant x$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 内的连续函数, 证明等式

$$\int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f\,\mathrm{d}x_n = \int_0^x \mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x \mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\,\mathrm{d}x_1 \quad (n\geqslant 2).$$

解 1 [9] 引入两个积分区域

$$\Omega_1 = \{(x_1,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_1\leqslant x, 0\leqslant x_2\leqslant x_1,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_n\leqslant x, x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\cdots,x_2\leqslant x_1\leqslant x\},$$

则等式两边恰好是函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在这两个区域上的 n 重积分转化而得到的 n 次积分:

$$\iint\cdots\int_{\Omega_1} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f\,\mathrm{d}x_n,$$

$$\iint\cdots\int_{\Omega_2} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_0^x \mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x \mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\,\mathrm{d}x_1 \quad (n\geqslant 2).$$

以下将证明 $\Omega_1=\Omega_2$, 这样就完成了本题的等式的证明.

若 $(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_1$, 则由 Ω_1 的定义就得到

$$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant x,$$

于是从 Ω_2 的定义可见 $(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_2$.

反之, 若 $(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_2$, 则由 Ω_2 的定义同样可得到

$$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant x,$$

于是从 Ω_1 的定义可见也有 $(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_1$. □

解 2 [5] 对于 $n=2$, 等式为

$$\int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \int_0^x \mathrm{d}x_2\int_{x_2}^x f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1,$$

即熟知的狄利克雷公式 (见 §8.1.2 的习题 3923).

现设 $n=k$ 时等式成立. 对 $n=k+1$ 可将其等式左边记为 I, 并改写为

$$I = \int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_k} f\,\mathrm{d}x_{k+1} = \int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\left(\int_0^{x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_0^{x_k} f\,\mathrm{d}x_{k+1}\right)\mathrm{d}x_2,$$

其中右边的括号内是 x_1, x_2 的二元函数. 对此二次积分用狄利克雷公式, 即可写成为

$$I = \int_0^x \mathrm{d}x_2 \Big[\int_{x_2}^x \Big(\int_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 \cdots \int_0^{x_k} f\,\mathrm{d}x_{k+1}\Big)\mathrm{d}x_1\Big].$$

由于方括号内的 k 次积分的最外层积分 (即对 x_1 从 x_2 到 x 的积分) 的积分限与 k 次积分的其余变量无关, 因此可以移到最内层, 并得到

$$I = \int_0^x \mathrm{d}x_2 \int_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 \cdots \int_0^{x_k} \Big(\int_{x_2}^x f\,\mathrm{d}x_1\Big)\mathrm{d}x_{k+1}.$$

由于上式的括号内是以 $x_2, \cdots, x_{k+1}$ 为自变量的函数, 用归纳假设就可得到所要的等式:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x \mathrm{d}x_{k+1} \int_{x_{k+1}}^x \mathrm{d}x_k \cdots \int_{x_3}^x \Big(\int_{x_2}^x f\,\mathrm{d}x_1\Big)\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_0^x \mathrm{d}x_{k+1} \int_{x_{k+1}}^x \mathrm{d}x_k \cdots \int_{x_3}^x \mathrm{d}x_2 \int_{x_2}^x f\,\mathrm{d}x_1, \end{aligned}$$

这样就完成了数学归纳法的证明. □

解 3 在 f 连续的条件下也可以用微分法作出证明.

用数学归纳法. 对于 $n = 2$ 如解 2 所述即是狄利克雷公式 (见 §8.1.2 的习题 3923).

现设本题的等式对于 $n = k$ 已成立. 对于 $n = k+1$, 将等式的左边和右边分别记为 $L(x)$ 和 $R(x)$, 即有

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 \cdots \int_0^{x_k} f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}, \\ R(x) &= \int_0^x \mathrm{d}x_{k+1} \int_{x_{k+1}}^x \mathrm{d}x_k \int_{x_k}^x \mathrm{d}x_{k-1} \cdots \int_{x_2}^x f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}x_1. \end{aligned}$$

根据 f 的连续性可知 $L(x)$ 和 $R(x)$ 都是 x 的连续可微函数. 为求 $L'(x)$, 将它改写为

$$L(x) = \int_0^x \Big[\int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 \cdots \int_0^{x_k} f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}\Big]\mathrm{d}x_1,$$

于是只要将大括号内的被积函数中出现两处的积分变量 x_1 换为 x 就得到

$$L'(x) = \int_0^x \mathrm{d}x_2 \int_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 \cdots \int_0^{x_k} f(x, x_2, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}.$$

又将 $R(x)$ 改写为

$$R(x) = \int_0^x \Big[\int_{x_{k+1}}^x \mathrm{d}x_k \int_{x_k}^x \mathrm{d}x_{k-1} \cdots \int_{x_2}^x f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}x_1\Big]\mathrm{d}x_{k+1},$$

这时由于变量 x 同时出现在 (最外层的) 积分上限和大括号内的被积函数中, 因此 $R'(x)$ 分为两项. 其中第一项是将大括号内的 x_{k+1} 换为 x, 由于这时的积分上限与下限相等, 因此等于 0. 第二项则是对积分号下的 x 求导. 后者同样可分为两项, 其第一项是将 x_k 换为 x, 从而又等于 0, 第二项则是对积分号下的 x 求导. 依此类推可以发现所有这些"第一项"都等于 0, 只留下将最内层的积分 $\int_{x_2}^x f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\,\mathrm{d}x_1$ 对 x 求导得到 $f(x, x_2, \cdots, x_{k+1})$, 从而减少了一层积分. 于是得到

$$\begin{aligned} R'(x) &= \int_0^x \Big[\int_{x_{k+1}}^x \mathrm{d}x_k \int_{x_k}^x \mathrm{d}x_{k-1} \cdots \int_{x_3}^x f(x, x_2, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}x_2\Big]\mathrm{d}x_{k+1} \\ &= \int_0^x \mathrm{d}x_{k+1} \int_{x_{k+1}}^x \mathrm{d}x_k \int_{x_k}^x \mathrm{d}x_{k-1} \cdots \int_{x_3}^x f(x, x_2, \cdots, x_{k+1})\,\mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

比较 $L'(x)$ 和 $R'(x)$, 可见根据归纳法假设, 对每个 x 都成立 $L'(x) = R'(x)$①.

最后利用 $L(0) = R(0)$, 从而就得到 $L(x) = R(x)$, 即完成了数学归纳法的证明. □

习题 4203 证明:

$$\int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)\,\mathrm{d}t_n = \frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}^n,$$

其中 f 为连续函数.

解 用数学归纳法. 对 $n = 1$ 等式平凡成立. 设 $n = k$ 时等式成立, 则对于 $n = k+1$ 就有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})\,\mathrm{d}t_{k+1}\\
&= \int_0^t f(t_1)\left[\int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2)\cdots f(t_{k+1})\,\mathrm{d}t_{k+1}\right]\mathrm{d}t_1 = \int_0^t f(t_1)\cdot\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}^k \mathrm{d}t_1\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\left\{\int_0^{t_1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}^{k+1}\Bigg|_{t_1=0}^{t_1=t} = \frac{1}{(k+1)!}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}^{k+1}. \quad \square
\end{aligned}$$

习题 4205 计算 n 重积分 $I_n = \displaystyle\iint\cdots\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

解 1 这是求 n 维单纯形 (或简称为单形) 的 n 维体积. 对于 $n = 1, 2, 3$, 容易知道有 $I_1 = a$, $I_2 = \frac{1}{2}a^2$, $I_3 = \frac{1}{6}a^3$. 可以猜测有公式 $I_n = \frac{1}{n!}a^n$. 现设此公式对 $n = k$ 已成立. 对 $n = k+1$ 则可求积如下:

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \int_0^a \mathrm{d}x_1 \iint\cdots\int\limits_{\substack{x_2\geqslant 0,\cdots,x_{k+1}\geqslant 0\\ x_2+\cdots+x_{k+1}\leqslant a-x_1}} \mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{k+1}\\
&= \int_0^a \frac{1}{k!}(a-x_1)^k\,\mathrm{d}x_1 = -\frac{1}{(k+1)!}(a-x_1)^{k+1}\Big|_0^a = \frac{1}{(k+1)!}a^{k+1},
\end{aligned}$$

可见所猜测的公式是正确的. □

解 2 所求的 I_n 是 a 的函数, 记 $I_n = I_n(a)$. 作代换 $x_1 = au_1$, $x_2 = au_2, \cdots, x_n = au_n$, 则雅可比行列式为 a^n, 于是得到

$$I_n(a) = \iint\cdots\int\limits_{\substack{u_1\geqslant 0, u_2\geqslant 0,\cdots,u_n\geqslant 0\\ u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant 1}} a^n\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n = I_n(1)a^n.$$

然后可求出 $I_n(1)$ 的递推关系为:

$$\begin{aligned}
I_{n+1}(1) &= \iint\cdots\int\limits_{\substack{u_1\geqslant 0, u_2\geqslant 0,\cdots,u_{n+1}\geqslant 0\\ u_1+u_2+\cdots+u_{n+1}\leqslant 1}} \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_{n+1} = \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \iint\cdots\int\limits_{\substack{u_2\geqslant 0,\cdots,u_{n+1}\geqslant 0\\ u_2+\cdots+u_{n+1}\leqslant 1-u_1}} \mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_{n+1}\\
&= \int_0^1 I_n(1-u_1)\,\mathrm{d}u_1 = \int_0^1 I_n(1)(1-u_1)^n\,\mathrm{d}u_1 = \frac{1}{n+1}I_n(1).
\end{aligned}$$

再利用 $I_1(1) = 1$ 即可得到 $I_n(1) = \frac{1}{n!}$, 因此所求的 $I_n = \frac{1}{n!}a^n$. □

① 从题设来看 x 是与 f 的自变量以及所有的积分变量无关的固定数, 但同时又表明对于所有比这个固定数小的 x 而言, 等式仍然成立. 当 $n = k+1$ 时, $f(x, x_2, \cdots, x_{k+1})$ 可看成为 $x_2, \cdots, x_{k+1}$ 的 k 元函数.

习题 4207 计算 n 重积分

$$I_n = \underset{\substack{x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} \sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 用卡塔兰方法 (见 §8.1.6 的命题 8.2), 也就是用等值面 $x_1+\cdots+x_n=t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 对积分区域 D 切片 (参见 §8.6 的习题 4077 的解 3).

这时 $f(x_1,\cdots,x_n)=x_1+\cdots+x_n$, $f(D)=[0,1]$, $h(f)=\sqrt{f}$, $g\equiv 1$, 于是可引用习题 4205 的结论得到

$$F(t) = \underset{\substack{x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant t}}{\iint\cdots\int} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}t^n\ \ (0\leqslant t\leqslant 1).$$

利用 $F'(t)=\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ 就可用公式 (8.5) 得到

$$I_n=\int_0^1\sqrt{t}\cdot\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})(n-1)!}.\quad\square$$

习题 4210 求以曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\ \ x_n=a_n$$

为界的 n 维圆锥的体积.

解 不妨设题中出现的常数均大于 0. 作代换 $x_i=a_iu_i$ $(i=1,\cdots,n)$, 而所求的体积等于上述代换的雅可比行列式 $a_1\cdots a_n$ 乘以 $a_1=\cdots=a_n=1$ 时的体积, 而后者可如下计算:

$$\underset{\substack{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant x_n^2\\ 0\leqslant x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^1\mathrm{d}x_n\underset{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant x_n^2}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$=\int_0^1 V_{n-1}(x_n)\,\mathrm{d}x_n,$$

其中的 $V_{n-1}(x_n)$ 是半径为 x_n 的 $n-1$ 维球的体积, 它在下一个习题 4211 中求出为

$$V_{n-1}(x_n)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}x_n^{n-1},$$

可见本题的答案为

$$V=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}a_1\cdots a_n}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.\quad\square$$

习题 4211 求 n 维球体 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$ 的体积.

解 1 将所求体积记为 $V_n(a)$, 通过作代换 $x_i=au_i$ $(i=1,\cdots,n)$, 即可知 $V_n(a)$ 等于该代换的雅可比行列式 a^n 乘以半径等于 1 的球体体积, 即有 $V_n(a)=V_n(1)a^n$.

$V_n(1)$ 的递推公式可如下得到:

$$V_n(1)=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x_1\underset{x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1-x_1^2}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)\mathrm{d}x_1$$

$$=2V_{n-1}(1)\int_0^1(1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x_1=V_{n-1}(1)\int_0^1(1-t)^{\frac{n-1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=V_{n-1}(1)\cdot\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=V_{n-1}(1)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

将上式改写为

$$V_n(1)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=V_{n-1}(1)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\cdot\pi^{\frac{1}{2}}$$

$$=\cdots=V_1(1)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}=\pi^{\frac{n}{2}},$$

于是可得到所求的 n 维球体的体积为

$$V_n(a)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}=\begin{cases}\dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}a^n}{n!!}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}a^n}{n!!}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}\qquad\square$$

注　几个熟知的特例为: $V_1(a)=2a$ 是区间 $[-a,a]$ 的长度, $V_2(a)=\pi a^2$ 是半径为 a 的圆面积, $V_3(a)=\dfrac{4\pi a^3}{3}$ 是半径为 a 的球体积.

解 2　作 n 维的球坐标代换

$$x_1=r\cos\varphi_1,$$

$$x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$$

则区域 $x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$ 变成为 $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi\cdots$, $0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi$. 代换的雅可比行列式为 $r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}$①. 于是即可计算得到

$$V=\int_0^a r^{n-1}\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\sin^{n-3}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_2\cdots\int_0^\pi\sin\varphi_{n-2}\,\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-1}.$$

利用

$$\int_0^\pi\sin^k x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k x\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{k+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)},$$

就有

① 这个雅可比行列式的计算比较复杂, 在 [11] 第三卷 676 小节的例题 12) 中介绍了一个思路曲折而计算简单的方法, 此处从略.

$$V=\frac{a^n}{n}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot 2\pi=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.\quad\square$$

习题 4213 计算 $\displaystyle\iint\cdots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$.

解 记积分为 I. 用卡塔兰方法. 记积分区域为 D, 令 $f(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_n^2$, 则 $f(D)=[0,1]$. 又令 $h(f)=(1-f)^{-\frac{1}{2}}$. 从习题 4211 得到

$$F(t)=\iint\cdots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant t}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

于是按照公式 (8.5) 得到

$$I=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}F'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\frac{n}{2}\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{n}{2}-1}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\frac{n}{2}\cdot\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)=\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.\quad\square$$

习题 4214 证明等式:

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\,\mathrm{d}x_n=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}u.$$

解 利用习题 4202 提供的等式即可计算如下:

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\,\mathrm{d}x_n=\int_0^x f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^x\mathrm{d}x_2\int_{x_2}^x\mathrm{d}x_1$$

$$=\int_0^x f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^x(x-x_2)\mathrm{d}x_2$$

$$=\int_0^x f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_4}^x\mathrm{d}x_3\left[-\frac{1}{2}(x-x_2)^2\right]\Bigg|_{x_2=x_3}^{x_2=x}$$

$$=\int_0^x f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_4}^x\frac{1}{2}(x-x_3)^2\,\mathrm{d}x_3$$

$$=\cdots\cdots=\int_0^x f(x_n)\cdot\frac{1}{(n-1)!}(x-x_n)^{n-1}\,\mathrm{d}x_n$$ (再将 x_n 改记为 u). $\square$

注 本题还有其他解法, 例如: (1) 记要求证明的等式左边为 $F(x)$, 右边为 $G(x)$, 则有 $F(0)=F'(0)=\cdots=F^{(n-1)}(0)=0$, $G(0)=G'(0)=\cdots=G^{(n-1)}(0)=0$, $F^{(n)}(x)=G^{(n)}(x)=f(x)$, 可见等式成立①; (2) 用数学归纳法. $\square$

习题 4216 证明狄利克雷公式:

$$\iint\cdots\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}\quad(p_1,p_2,\cdots,p_n>0).$$

① 实际上本题的等式右边就是函数 $F(x)$ 的泰勒公式的积分型余项, 见 §5.5.6 的习题 2899.3 的解.

解 记区域

$$S_n(t) = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, x_1 + \cdots + x_n \leqslant t\},$$

则本题的积分区域为 $S_n(1)$.

若将本题的积分区域改为 $S_n(t)$, 并将积分记为 $I_n(t)$, 则作代换 $x_i = tu_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 后即可得到

$$I_n(t) = t^{p_1+\cdots+p_n} I_n(1).$$

由此即可导出递推公式如下:

$$\begin{aligned} I_n(1) &= \int_0^1 x_n^{p_n-1} \underset{S_{n-1}(1-x_n)}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} \\ &= I_{n-1}(1)\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+\cdots+p_{n-1}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} \\ &= I_{n-1}(1)\cdot \mathrm{B}(p_n, p_1+\cdots+p_{n-1}+1) \\ &= I_{n-1}(1)\cdot \frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+p_n+1)}. \end{aligned}$$

于是就得到

$$\begin{aligned} I_n(1)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+p_n+1) &= I_{n-1}(1)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)\cdot\Gamma(p_n) \\ &= \cdots = I_1(1)\Gamma(p_1+1)\cdot\Gamma(p_n)\Gamma(p_{n-1})\cdots\Gamma(p_2). \end{aligned}$$

由于

$$I_1(1)\Gamma(p_1+1) = p_1\Gamma(p_1)\int_0^1 x_1^{p_1-1}\,\mathrm{d}x_1 = \Gamma(p_1),$$

因此代入前式并加整理就得到所要求证的等式. □

习题 4217 证明刘维尔公式:

$$\underset{\substack{x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} h(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1 h(t)t^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\,\mathrm{d}t \quad (p_1, p_2, \cdots, p_n > 0)$$

(其中 $h(u)$ 为连续函数)①.

解 记积分为 I. 用卡塔兰方法, 并采用上一题中的记号 $I_n(t)$ 和 $S_n(t)$. 取 $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$, $f(S_n(1)) = [0, 1]$, $g(x_1, \cdots, x_n) = x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}$, 则可直接引用上一题的狄利克雷公式得到

$$\begin{aligned} F(t) &= \underset{S_n(t)}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\ &= I_n(t) = t^{p_1+\cdots+p_n}I_n(1) \quad (0\leqslant t\leqslant 1). \end{aligned}$$

按照公式 (8.5) 就有

① 为了与卡塔兰公式 (8.5) 的记号不发生混淆, 将原题中的函数 f 改记为 h, 并将公式右边的积分变量 u 改为 t.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 h(t)F'(t)\,\mathrm{d}t = I_n(1)(p_1+\cdots+p_n)\int_0^1 h(t)t^{p_1+\cdots+p_n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}\cdot(p_1+\cdots+p_n)\int_0^1 h(t)t^{p_1+\cdots+p_n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1 h(t)t^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\,\mathrm{d}t. \quad \square \end{aligned}$$

习题 4218 将区域 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqslant R^2$ 上的 n 重积分 $(n \geqslant 2)$

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

(其中 $f(u)$ 为连续函数) 化为一重积分.

提示 应用卡塔兰方法, 习题 4211 已为此作好了准备. $\square$

习题 4219 计算半径为 R, 密度为 ρ_0 的均质球体对自身的引力势, 即求积分

$$u = \frac{\rho_0^2}{2}\underset{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}{\iiiiiint}\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

解 先考虑球体 $x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leqslant R^2$ 在坐标为 (x_1,y_1,z_1) 的点处的引力势. 利用 §8.8 的习题 4155 的计算结果, 由于该点不越出球外, 因此就知道所求的引力势为

$$2\pi\rho_0\left[R^2 - \frac{1}{3}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\right].$$

然后在球体 $x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leqslant R^2$ 上积分即可. 于是就得到

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho_0^2}{2}\underset{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}{\iiiiiint}\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}} \\ &= \pi\rho_0^2\underset{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}{\iiint}\left[R^2 - \frac{1}{3}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1. \end{aligned}$$

利用半径为 t $(0 \leqslant t \leqslant R)$ 的球体积为 $F(t) = \dfrac{4\pi t^3}{3}$, 其导函数 $F'(t) = 4\pi t^2$, 即可用卡塔兰方法得到

$$u = \pi\rho_0^2\int_0^R\left(R^2 - \frac{1}{3}t^2\right)\cdot 4\pi t^2\,\mathrm{d}t = \frac{16\pi^2\rho_0^2R^5}{15}. \quad \square$$

习题 4220 设 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 为正定二次型, 计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 (本题是 §8.9.1 的习题 4178 的推广, 建议读者先回顾该题的解法.)

记积分为 I. 引入向量矩阵记号 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)^T$, 则在指数的括号内的 n 元二次式可写为二次三项式

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c.$$

以下分两步. 第一步是作平移以消去上式中的一次项, 即要求 $\boldsymbol{x}_0$ 以得到

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + c',$$

由此可确定

$$\boldsymbol{x}_0 = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad c' = c - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

引入对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的 $n+1$ 阶的加边行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^T & c \end{vmatrix},$$

并用 $-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^{-1}$ (的 n 个分量依次) 乘以该行列式的前 n 行后加到最后一行, 这时该行列式的值不变, 前 n 行也不变, 而最后一行的前 n 个元都变成 0 (记为 $\boldsymbol{0}^T$), 于是得到

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^T & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & c - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \end{vmatrix} = \delta \cdot (c - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}),$$

其中 δ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 于是得到 $c' = \Delta/\delta$.

由此对积分作平移代换 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, 其雅可比行列式等于 1, 则就有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}+c)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\mathrm{d}x_n \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\cdots\mathrm{d}u_n. \end{aligned}$$

第二步利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定, 其特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 均大于 0, 且存在正交阵 $\boldsymbol{U}$, 使得

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\},$$

其中右边的记号是对角线为 n 个特征值而其他元均等于 0 的对角阵. 此外, 还知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\delta = \lambda_1\cdots\lambda_n$.

作正交变换 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{s}$, 其雅可比行列式等于 $\boldsymbol{U}$ 的行列式, 因此等于 1, 于是就可利用概率积分计算如下 (对于 $n = 3$ 参见 §8.9.3 的习题 4200):

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{s}}\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\cdots\mathrm{d}s_n \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda_1 s_1^2+\cdots+\lambda_n s_n^2)}\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\cdots\mathrm{d}s_n \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_1 s_1^2}\,\mathrm{d}s_1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_n s_n^2}\,\mathrm{d}s_n \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}} = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}}\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}}. \quad \square \end{aligned}$$

§8.11 曲线积分 (习题 4221–4295)

内容简介 本节的前两个小节分别为第一型曲线积分和第二型曲线积分, 又将涉及全微分和原函数计算的习题单列为第三小节.

8.11.1 第一型曲线积分 (习题 4221–4247)

第一型曲线积分的形式在平面上为 $\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$, 在空间为 $\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$, 其积分元为 $\mathrm{d}s$, 积分与曲线 C 的取向无关. 在被积函数 f 恒等于 1 时, 该积分就是曲线 C 的弧长. 由此可知, 非负函数的第一型曲线积分必定非负. 在力学中沿曲线分布的质量计算和质心坐标计算等都可归结为第一型曲线积分.

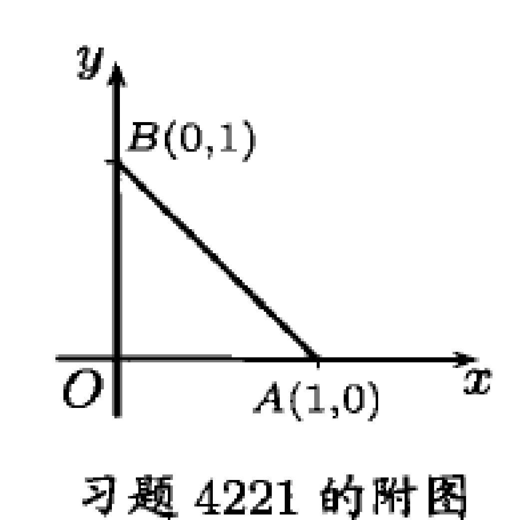
在第一型曲线积分的计算中, 首先要对曲线取合适的参数表示式, 然后计算出弧长微分 $\mathrm{d}s$, 从而归结为普通的定积分. 其中要注意的是, 无论曲线的起点和终点是如何给定的, 参数变化的范围总是取为从小到大, 这样就可以保证非负函数的第一型曲线积分必定非负.

习题 4221 计算第一型曲线积分 $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$, 其中 C 是以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

解 利用第一型曲线积分的可加性, 有

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s = \left\{\int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BO}}\right\}(x+y)\,\mathrm{d}s,$$

因此只要分段计算即可.



习题 4221 的附图

在 $\overline{OA}$ 上, $x=x$, $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$, 于是有

$$\int_{\overline{OA}} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

在 $\overline{AB}$ 上 $x=x$, $y=1-x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, 而弧长微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y_x'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x,$$


于是有

$$\int_{\overline{AB}} (x+y)\,\mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_0^1 \mathrm{d}x = \sqrt{2}.$$

在 $\overline{BO}$ 上 $x=0$, $y=y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$, 于是有

$$\int_{\overline{BO}} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

将以上三段的积分相加就得到

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s = 1+\sqrt{2}. \quad \square$$

注 在本题中对于 $\overline{AB}$ 取 x 为参数从 0 到 1 时, 动点描出的是从点 B 到 A, 而对于 $\overline{BO}$ 取参数 y 从 0 到 1 时, 动点描出的是从点 O 到 B.

习题 4225 计算第一型曲线积分 $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解 1 记积分为 I. 本题的内摆线也称星形线, 其图像见第一册附录一的习题 370.1(d) (参见 §8.12 的习题 4319 及其附图). 利用对称性, 只需要计算在第一象限的曲线段上的积分再乘以 4 即可. 对这段曲线可用 x 为参数, $0 \leqslant x \leqslant a$, 用隐函数求导法得到 $y'_x = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, 求出弧长微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y_x'^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x,$$

然后即可积分得到

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^a (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = 4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a \left[x+(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^2 x^{-\frac{1}{3}}\right]\mathrm{d}x \\ &= 4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a \left(2x+a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x = 4a^{\frac{1}{3}}\left(a^2+\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a^2\right) = 4a^{\frac{7}{3}}. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 用星形线的参数方程

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$$

则当 t 从 0 到 2π 时即描出完整的内摆线. 计算得到

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,\mathrm{d}t = 3a|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t,$$

而被积函数变成 $a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t+\sin^4 t)$.

利用对称性就可计算积分如下:

$$\begin{aligned} I &= 12a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t\cos t+\cos^5 t\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= 12a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{1}{6}\sin^6 t-\frac{1}{6}\cos^6 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}. \quad \square \end{aligned}$$

习题 4228 计算第一型曲线积分 $\int_C x\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为对数螺线 $r = a\mathrm{e}^{k\varphi}$ $(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分.

解 对数螺线的图像见第一册附录一的习题 371.1(d). 从题设条件可知所求的曲线段的参数为 $-\infty < \varphi \leqslant 0$. 当 φ 从 0 递减趋于 $-\infty$ 时对数螺线以顺时针方向绕原点作无限次旋转.

按照极坐标下的弧长微分公式计算得到

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2+r_\varphi'^2}\,\mathrm{d}\varphi = a\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{e}^{k\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

这时的曲线积分为广义积分, 可计算如下:

$$\int_C x\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0} a\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi \cdot a\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{e}^{k\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2k\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= a^2\sqrt{1+k^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{2k\varphi}}{1+4k^2}(2k\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\Bigg|_{-\infty}^{0} \quad (\text{参见 §3.1.6 的习题 1828})$$
$$= \frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}. \quad \square$$

习题 4232 求空间曲线 $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t,\ y=\mathrm{e}^{-t}\sin t,\ z=\mathrm{e}^{-t}\ (0\leqslant t<+\infty)$ 的弧长.

解 计算弧长微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{(-\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t)^2+(-\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t)^2+(-\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

于是得到曲线弧长为

$$s = \int_0^{+\infty}\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}s = \sqrt{3}. \quad \square$$

注 本题的空间曲线在坐标面 xOy 上的投影即是习题 4228 的对数螺线 (其中取 $a=k=1$), 因此它是从 $t=0$ 的点 $(1,0,1)$ 开始围绕 Oz 轴作无限次旋转且趋于原点的曲线. 如本题所示, 它的长度却是有限数. 又可计算出, 由于 e^{-t} 的快速下降, 在 t 从 0 到 2π 的第一圈曲线段的长度在总长度中的比例已经超过 99.8%.

习题 4234 求空间曲线 $(x-y)^2=a(x+y),\ x^2-y^2=\dfrac{9}{8}z^2$ 从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长.

解 为简化计算, 作等比例变换 $x=a\xi,\ y=a\eta,\ z=a\zeta$, 则方程变为 $(\xi-\eta)^2=\xi+\eta$, $\xi^2-\eta^2=\dfrac{9}{8}\zeta^2$. 又若将 ξ,η,ζ 重新记为 x,y,z, 则其中的参数 a 就变成 1. 注意在此变换下曲线的弧长也发生比例为 a 的变化.

由此可见只要求出上述变换后的曲线从原点到点 $A_1\left(\dfrac{x_0}{a},\dfrac{y_0}{a},\dfrac{z_0}{a}\right)$ 的弧长, 然后乘以 a 即可得到所要求的答案.

现于题设的曲线方程中令 $a=1$, 将第一式的 $x+y=(x-y)^2$ 代入第二式, 即得到 $(x-y)^3=\dfrac{9}{8}z^2$, 这样就解出

$$x-y=\frac{1}{2}(3z)^{\frac{2}{3}}, \quad x+y=\frac{1}{4}(3z)^{\frac{4}{3}}.$$

取 z 为曲线的参数, 即有 $x=x(z), y=y(z)$. 将上述两式对 z 求导得到

$$x_z'-y_z'=(3z)^{-\frac{1}{3}}, \quad x_z'+y_z'=(3z)^{\frac{1}{3}}.$$

将它们平方后相加再除以 2, 得到 $x_z'^2+y_z'^2$, 然后即可得到

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x_z'^2+y_z'^2+1}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(3z)^{-\frac{1}{3}}+(3z)^{\frac{1}{3}}\right]\mathrm{d}z.$$

于是弧长为

$$s=a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{z_0}{a}}\left[(3z)^{-\frac{1}{3}}+(3z)^{\frac{1}{3}}\right]\mathrm{d}z$$
$$=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(3^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^{\frac{z_0}{a}}$$
$$=\frac{3a}{4\sqrt{2}}\left[2\cdot3^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{z_0}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\left(\frac{z_0}{a}\right)^{\frac{4}{3}}\right].\quad\square$$

习题 4236 求空间曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\cosh\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)=a$ 从点 $A(a,0,0)$ 到点 $B(x,y,z)$ 的弧长.

解 用柱坐标, 则曲线方程变为 $r^2+z^2=a^2$, $r\cosh\varphi=a$. 用 z 为参变量, 则要计算 r,φ 对 z 的导数. 从 $r^2+z^2=a^2$ 求得 $r'_z=-\frac{z}{r}$, 从 $r\cosh\varphi=a$ 求得 $r'_z\cosh\varphi+r\sinh\varphi\cdot\varphi'_z=0$, 因此得到

$$r\varphi'_z=-r'_z\cdot\frac{r\cosh\varphi}{r\sinh\varphi}=-r'_z\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}=-r'_z\cdot\frac{a}{|z|}.$$

于是可求出弧长微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\,\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}z^2}=\sqrt{r'^2_z+r^2\varphi'^2_z+1}\,\mathrm{d}z$$
$$=\sqrt{\frac{z^2}{r^2}\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)+1}\,\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}a}{r}\,\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{a^2-z^2}}\,\mathrm{d}z.$$

对于 $z>0$ 的情况, 从点 $(a,0,0)$ 到点 (x,y,z) 时参数 z 递增, 因此弧长为

$$s=\sqrt{2}a\int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{a^2-z^2}}=\sqrt{2}a\arcsin\frac{z}{a}.$$

对于 $z<0$, 则参数应当从 z 到 0, 因此积分与上述结果差一个符号.

合并两种情况即得到统一的答案

$$s=\sqrt{2}a\arcsin\frac{|z|}{a}.\quad\square$$

习题 4238 设空间曲线 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, 计算第一型曲线积分 $\displaystyle\int_C x^2\,\mathrm{d}s$.

解 1 曲线 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的大圆. 从两个方程消去 z 得到 $x^2+xy+y^2=\dfrac{a^2}{2}$, 即曲线 C 在坐标面 xOy 上的投影, 它是一个椭圆. 将它配方写成

$$(y+\frac{x}{2})^2+\frac{3}{4}x^2=\frac{a^2}{2}.$$

然后即可参数化为

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos t,\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin t-\frac{1}{\sqrt{6}}a\cos t,$$

又从 $z=-x-y$ 得到

$$z=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin t-\frac{1}{\sqrt{6}}a\cos t.$$

参数的变化范围为 $0\leqslant t\leqslant2\pi$. 求出它们的导数

$$x_t' = -\sqrt{\frac{2}{3}}a\sin t, \quad y_t' = \frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}a\sin t, \quad z_t' = -\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}a\sin t,$$

即可得到

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}t.$$

最后求得积分为

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi a^3}{3}. \quad \square$$

解 2 利用曲线 C 关于变量 x, y, z 的对称性, 有

$$\begin{aligned}\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \int_C y^2\,\mathrm{d}s = \int_C z^2\,\mathrm{d}s \\ = \frac{1}{3}\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_C \mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}|C|,\end{aligned}$$

其中 $|C|$ 是曲线 C 的长度. 由于平面 $x+y+z=0$ 经过球心 $(0,0,0)$, 因此曲线 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的大圆, 其半径为 a, 可见 $|C| = 2\pi a$. 于是答案为 $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. $\square$

习题 4240 设 C 为 $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ 从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(a,a,\sqrt{2}a)$ 的一段曲线, 计算第一型曲线积分 $\displaystyle\int_C z\,\mathrm{d}s$.

解 (概要) 仿照习题 4234 的预处理方法, 可见只要对于 $a=1$ 求出弧长后再乘以 a^2 即得所求.

用 x 为参数, 就有 $y=\sqrt{x}$, $z=\sqrt{x^2+x}$. 计算得到 $\mathrm{d}s = \dfrac{\sqrt{8x^2+9x+2}}{2z}\,\mathrm{d}x$, 于是所求的积分为

$$\begin{aligned}&\int_C z\,\mathrm{d}s = a^2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{8x^2+9x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a^2}{4\sqrt{2}}\int_0^1\sqrt{\left(2\sqrt{2}x+\frac{9}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{17}{32}}\,\mathrm{d}\left(2\sqrt{2}x+\frac{9}{4\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{a^2}{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}x+\frac{9}{4\sqrt{2}}\right)\sqrt{8x^2+9x+2} - \frac{17}{64}\ln\left(2\sqrt{2}x+\frac{9}{4\sqrt{2}}+\sqrt{8x^2+9x+2}\right)\right]\Bigg|_0^1 \\ &= a^2\left(\frac{25\sqrt{19}}{64} - \frac{9\sqrt{2}}{64} - \frac{17\sqrt{2}}{512}\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right). \quad \square\end{aligned}$$

习题 4241–4247 为第一型曲线积分在力学上的应用, 即对于分布在曲线上的质量计算其总质量、质心坐标、静矩和转动惯量的计算, 本书不再举例.

8.11.2 第二型曲线积分 (习题 4248–4257, 4277–4283)

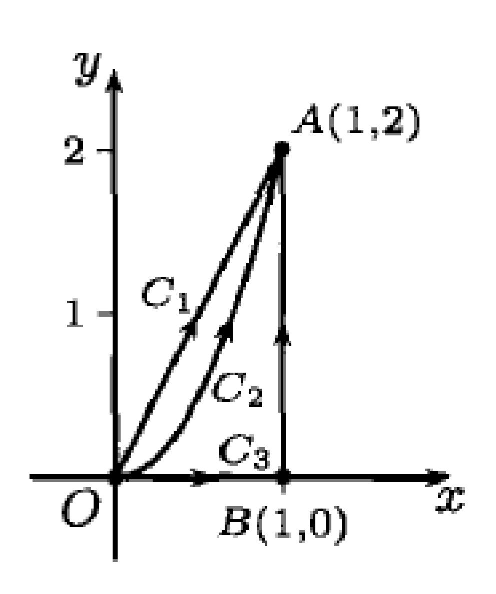
第二型曲线积分是曲线积分中的主要概念, 这一小节主要是基本的计算题, 而将有关全微分和原函数的习题放到下一小节中. 在第二型曲线积分理论中的核心内容是格林公式, 见下一节.

第二型曲线积分与积分路径的指定取向有关, 若方向改为反向, 则积分值反号. 在将积分路径参数化时, 参数的递增方向与指定的取向一致或相反都是允许的, 但为避免错误起见还是经常取前者为妥.

习题 4248 设点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(1,2)$, 且 OA 为: (a) 直线段; (b) 以 Oy 为轴的抛物线段; (c) Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 组成的折线, 计算第二型曲线积分

$$\int_{OA} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$$

解 在附图中作出了从点 O 到点 A 的三条路径.



习题 4248 的附图

(a) 积分路径为直线段 OA, 记为 C_1, 则可取 x 为参数, $y=2x$, 于是积分可计算如下:

$$\int_{C_1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x\cdot 2 - 2x\cdot 1)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(b) 积分路径为抛物线段 OA, 记为 C_2. 仍取 x 为参数, $y=2x^2$, 则积分可计算如下:

$$\int_{C_2} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x\cdot 4x - 2x^2\cdot 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

(c) 积分路径为折线 OBA, 记为 C_3. 在直线段 OB 上取 x 为参数, $y=0$, 在直线段 BA 上取 y 为参数, $x=1$, 则积分可计算如下

$$\begin{aligned}\int_{C_3} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &= \int_{OB} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + \int_{BA} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (x\cdot 0 - 0\cdot 1)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (1\cdot 1 - y\cdot 0)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y = 2.\end{aligned}$$ □

习题 4249 对于上题中所指示的路径 (a), (b), (c), 计算

$$\int_{OA} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x.$$

解 仍用上题中的记号和参数化方法, 就有

$$\begin{aligned}\int_{C_1} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x\cdot 2 + 2x\cdot 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x\,\mathrm{d}x = 2,\\ \int_{C_2} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x\cdot 4x + 2x^2\cdot 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 6x^2\,\mathrm{d}x = 2,\\ \int_{C_3} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x &= \int_{OB} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \int_{BA} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (x\cdot 0 + 0\cdot 1)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (1\cdot 1 + y\cdot 0)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y = 2.\end{aligned}$$ □

注 本题的三个不同路径上的积分相等不是偶然的, 由于被积表达式是 xy 的全微分, 因此积分值即是 $(xy)\Big|_{A(1,2)} - (xy)\Big|_{O(0,0)} = 2$ (见下一小节).

习题 4252 计算第二型曲线积分 $\oint_C (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为依逆时针方向通过的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

解 取椭圆的参数方程

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

则参数递增方向与 C 依逆时针方向一致. 记积分为 I, 则可计算如下:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t - b\sin t)(b\cos t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} [ab\cos^2 t - (a^2+b^2)\sin t\cos t - ab\sin^2 t]\,\mathrm{d}t = 0. \quad \square \end{aligned}$$

注 由于本题的被积表达式为全微分:

$$(x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Big(\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}\Big)$$

因此在封闭路径上的积分必然等于 0.

习题 4254 计算第二型曲线积分 $\displaystyle\oint_C \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 C 为依逆时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 取圆周的参数方程为 $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, 则参数递增方向与圆周的逆时针方向一致. 记积分为 I, 则可计算如下:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)(a\cos t)}{a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (-1)\,\mathrm{d}t = -2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

注 将被积表达式记为 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, 则可见有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{-x+y}{x^2+y^2}\Big) \\ &= \frac{(x^2+y^2) - 2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2) - 2x(-x+y)}{(x^2+y^2)^2} = 0, \end{aligned}$$

因此满足全微分条件. 然而在本题的闭路包围的区域中有奇点 $(0,0)$, 即不是单连通区域. 全微分条件的满足并不保证在此区域上存在单值的原函数, 因此积分不一定等于 0. 本题的原函数为

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{Arctan}\frac{y}{x},$$

其中的第二项为 -1 乘以幅角 (也就是极坐标中的极角). 这就解释了围绕原点逆时针方向一周的积分等于 -2π.

习题 4277 证明: 下面的估计对于曲线积分是正确的:

$$\Big|\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\Big| \leqslant LM,$$

其中 L 为积分路径的长度, $M = \max\sqrt{P^2+Q^2}$ (在弧 C 上).

解 设曲线 C 以弧长为参数的方程为 $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, 且 s 的递增方向与 C 的给定取向一致. 于是有

$$\left|\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right| = \left|\int_0^L \left[P(x(s),y(s))x'(s) + Q(x(s),y(s))y'(s)\right]\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant \int_0^L \left|P(x(s),y(s))x'(s) + Q(x(s),y(s))y'(s)\right|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \int_0^L \sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{x'^2(s)+y'^2(s)}\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^L \sqrt{P^2+Q^2}\,\mathrm{d}s \leqslant LM,$$

其中利用了取弧长 s 为参数时有 $x'^2(s)+y'^2(s)=1$. □

习题 4281 计算沿空间曲线的第二型曲线积分 $\oint_C (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\tan\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, 且若从 x 轴的正向看去为逆时针方向.

解 从圆周 C 的方程中消去 x, 就得到它在坐标面 yOz 上的投影

$$y^2(1+\cot^2\alpha)+z^2=a^2.$$

根据题设中 C 的取向, 它在 yOz 上的投影应当是逆时针方向, 因此即参数化为为 $y=a\sin\alpha\cos t$, $z=a\sin t$, 其中参数的递增与投影曲线的方向一致, 并得到 $x=a\cos\alpha\cos t$, 参数 t 从 0 到 2π.

记积分为 I, 即可计算如下:

$$I = a^2\int_0^{2\pi}[(\sin\alpha\cos t-\sin t)(-\cos\alpha\sin t)+(\sin t-\cos\alpha\cos t)(-\sin\alpha\sin t)$$
$$+(\cos\alpha\cos t-\sin\alpha\cos t)\cos t]\,\mathrm{d}t$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}[(\cos\alpha-\sin\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha\sin t\cos t]\,\mathrm{d}t = 2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha).\quad □$$

8.11.3 全微分与原函数 (习题 4258–4276, 4284–4295)

本小节为全微分和原函数的计算[①].

对于平面上的第二型曲线积分 $\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, 若于包含积分路径的区域 V 内存在单值的函数 $u=u(x,y)$, 使得成立

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y,$$

则称该曲线积分的被积表达式为全微分, 并称 $u(x,y)$ 为原函数 (也称为势函数). 这时积分的值只与路径 C 的起点和终点有关, 而与路径的形状无关. 特别是由此可知当 C 为封闭路径, 且它所包围的区域为单连通时, 其上的曲线积分必定等于 0.

若 C 的起点为 $A(x_0,y_0)$, 终点为 $B(x_1,y_1)$, 则有

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y = u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0).$$

因此也可将上式左边记为 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$.

① 在上一小节的习题 4249, 4252, 4254 也已涉及全微分和原函数的概念.

对于平面上的单连通区域, 若 $P(x,y),Q(x,y)$ 连续可微, 则被积表达式 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 为全微分的充要条件是在该区域内成立恒等式

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{8.8}$$

这个条件的必要性是明显的, 因为从 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$ 即可看出 (8.8) 就是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

即两个二阶混合偏导数在连续时必定相等. 反之, 用格林公式可以证明, 条件 (8.8) 对于在单连通区域上存在原函数也是充分的.

在确定原函数 u 的存在性后, 可以从 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$ 求原函数.

对于空间的第二型曲线积分 $\displaystyle\int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, 同样可引入全微分和原函数的概念. 在包含积分路径 C 的区域满足单连通条件和 P,Q,R 均连续可微的条件下, 与 (8.8) 相应的全微分的充要条件为

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial z}\equiv\frac{\partial R(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial R(x,y)}{\partial x}\equiv\frac{\partial P(x,y)}{\partial z},\quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{8.9}$$

与 (8.8) 的必要性相同, 条件 (8.9) 就是 u 的二阶混合偏导数与求导的顺序无关的推论.

习题 4258 验证被积表达式为全微分, 并计算曲线积分 $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x$.

解 1 由 $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=x$, 可见有 $P'_y=1=Q'_x$, 因此被积表达式是全微分.

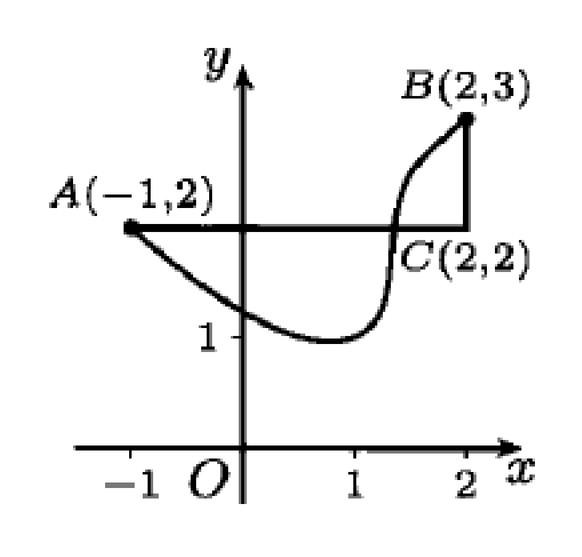
由 $u'_x=P(x,y)=y$ 可见 $u(x,y)=xy+\varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 待定. 再代入 $u'_y=Q(x,y)$ 中, 可见 $[xy+\varphi(y)]'_y=x+\varphi'(y)=x$, 即得 $\varphi(y)=C$.

取 $C=0$ 时的原函数 $u(x,y)=xy$, 就有

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=xy\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)}=6-(-2)=8.\quad\square$$

解 2 在验证被积表达式为全微分之后, 并不一定要求出原函数才能计算所要求的积分. 为此可利用积分只与路径的起点和终点有关, 即可选取合适的路径来进行计算.

在附图中画出了连接点 $A(-1,2)$ 和 $B(2,3)$ 的一条示意性质的光滑曲线和经过点 $C(2,2)$ 的折线 ACB, 显然后者更便于计算.



习题 4258 的附图

具体的计算如下:

$$\begin{aligned}\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x&=\Big(\int_{AC}+\int_{CB}\Big)x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{2}2\,\mathrm{d}x+\int_2^3 2\,\mathrm{d}y=6+2=8.\quad\square\end{aligned}$$

注 本题的积分表达式非常简单, 读者可能直接看出 xy 即是一个原函数而得解, 在以上两个解法中强调的是方法的一般性, 使得求解其他类似习题时都可仿效.

习题 4262 验证被积表达式为全微分, 并计算曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 由于对 f 未假设连续可微条件, 因此不能用条件 (8.8). 然而因被积表达式可写成 $f(x+y)\,\mathrm{d}(x+y)$, 而 f 连续, 因此 $f(u)$ 的原函数为

$$F(u)=\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t+C.$$

取其中 $C=0$ 的原函数, 并用 $u=x+y$ 代入就得到本题的曲线积分的原函数. 这样就可计算积分如下:

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=F(u)\Big|_{u=0}^{u=a+b}=\int_0^{a+b} f(t)\,\mathrm{d}t. \quad \square$$

习题 4268 验证被积表达式为全微分, 并沿着不与 Oy 轴相交的积分路径计算下列曲线积分

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y.$$

解 记积分表达式为 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$

即满足条件 (8.8). 由于积分路径的起点和终点都在 $x>0$ 的半平面内, 它是单连通区域, 因此被积表达式为全微分.

以下将分别用习题 4258 的解 1 和解 2 中的方法计算所要求的积分.

方法一是通过原函数来计算曲线积分. 从 $u'_x=P$ 即可得到

$$u=x+y\sin\frac{y}{x}+\varphi(y),$$

其中 φ 待定. 将此式代入 $u'_y=Q$ 就有

$$\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}+\varphi'(y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},$$

可见 $\varphi'(y)=0$, 即得 $\varphi(y)=C$. 取 $C=0$ 时的原函数为 $u=x+y\sin\dfrac{y}{x}$. 记所要求的曲线积分为 I, 于是就可计算得到

$$I=u\Big|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=(2+\pi)-1=1+\pi.$$

方法二是利用在全微分情况下第二型曲线积分只与路径的起点和终点有关, 根据本题的起点为 $(1,\pi)$, 终点为 $(2,\pi)$, 可见只要用连接它们的直线段作为积分路径即可. 这时 $y=\pi$, $\mathrm{d}y=0$, x 从 1 到 2, 计算特别简单. 记积分为 I, 于是就有

$$I=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=1+\pi\sin\frac{\pi}{x}\Big|_1^2=1+\pi. \quad \square$$

习题 4272 设 $\mathrm{d}z = \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$, 求原函数 z.

解 由于 $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$ 等价于 $x = y = 0$, 因此将所给条件写为 $\mathrm{d}z = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 后, P 与 Q 的定义域为去心平面 (即坐标面 xOy 中去掉原点后的所有点的集合), 它是一个非单连通区域.

验证条件 (8.8), 有

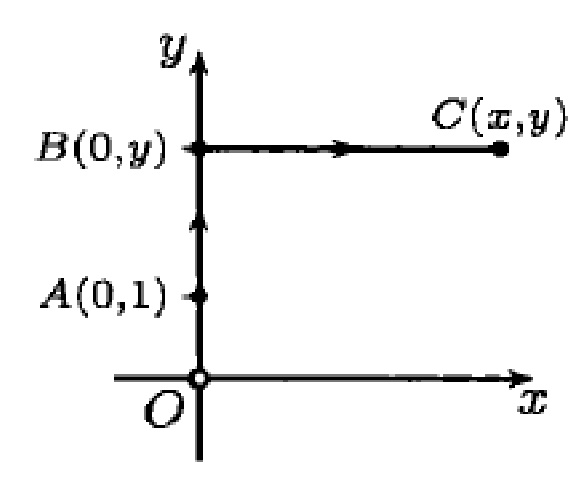
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{3x^2 - 2xy + 3y^2} - \frac{y(-2x + 6y)}{(3x^2 - 2xy + 3y^2)^2} = \frac{3x^2 - 3y^2}{(3x^2 - 2xy + 3y^2)^2},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{3x^2 - 2xy + 3y^2} + \frac{x(6x - 2y)}{(3x^2 - 2xy + 3y^2)^2} = \frac{3x^2 - 3y^2}{(3x^2 - 2xy + 3y^2)^2},$$

可见全微分条件满足.

这时在去心平面的任何一个单连通区域 (例如矩形区域) 内原函数的存在性是有保证的. 下面将使用在矩形区域内的求原函数的计算方法①.

如附图所示, 以点 $A(0,1)$ 为起点通过折线 ABC 上的积分计算点 $C(x,y)$ 处的原函数 $z(x,y)$ 的值. 由于在直线段 AB 上 $x = 0$, $\mathrm{d}x = 0$, 而在直线段 BC 上 $\mathrm{d}y = 0$, 因此有

$$z(x,y) = \int_1^y Q(0,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^x P(x,y)\,\mathrm{d}x = y\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$$
$$= \frac{y}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{8y^2}{9}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3x - y}{2\sqrt{2}y}.$$



习题 4272 的附图

显然将上述表达式加上任意常数 C 也是原函数. □

注 用上述解法可以在原点之外的每个点 (x,y) 处求出原函数, 然而所得到的答案并不统一. 例如上面所得的原函数只适用于 $y = 0$ 之外的情况. 这样就产生了一个问题, 即对于去心平面整体而言, 本题是否存在单值的原函数? (在前面 §8.11.2 的习题 4254 中已经看到可能出现非单值的原函数.)

对于非单连通区域上的原函数的存在问题可以参考 [11] 第三卷的 562 小节, 其中指出, 在全微分条件 (8.8) 满足时, 围绕奇点的正向 (即逆时针方向) 简单闭路上的积分等于常值, 并称为循环常数. 只有当所有循环常数都等于 0 时才可能存在单值的原函数. (习题 4254 已经提供了满足全微分条件但循环常数不等于 0 的例子.)

对本题来说, 只有一个奇点 $(0,0)$. 为了求出它的循环常数, 只需要求出在椭圆 $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$ 上沿逆时针方向的积分. 它可以计算如下

$$\oint\limits_{3x^2-2xy+3y^2=1} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \oint\limits_{3x^2-2xy+3y^2=1} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

既然循环常数不等于 0, 可见在去心平面上不存在单值的原函数.

在上述计算中利用了第二册中的下列两点内容:

(1) 将 §4.5 的面积计算公式 (4.14) 翻译成为第二型曲线积分, 就有

① 在习题 4258, 4268 中求原函数主要通过不定积分计算, 而这里则是定积分计算.

$$\oint_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = -2S,$$

其中 S 是闭路 C 所围的面积 (参见后面 §8.12.2 的公式 (8.10)).

(2) §4.5 的习题 2406, 其中计算得到椭圆 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ ($A>0, AC-B^2>0$) 的面积等于 $\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. 对本题有 $A=C=3$, $B=-1$, 因此椭圆面积 $S=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

习题 4276 设 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\Big(\ln\dfrac{1}{r}\Big)\mathrm{d}x - \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\Big(\ln\dfrac{1}{r}\Big)\mathrm{d}y$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 求原函数 z.

解 将题设条件记为 $\mathrm{d}z = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^{n+m+2}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m}}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big) = -\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\Big(\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\Big),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^{n+m+2}}{\partial x^{n}\partial y^{m+2}}\Big(-\ln\frac{1}{r}\Big) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\Big(\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}\Big),$$

由于有 $(\ln r)''_x = \dfrac{y^2-x^2}{r^4}$, $(\ln r)''_y = \dfrac{-y^2+x^2}{r^4}$, 因此全微分条件 $P'_y = Q'_x$ 满足.

利用与上述计算相同的方式可将 P, Q 改写为

$$\begin{aligned}P &= \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\Big(-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\Big)\Big]\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\Big(\frac{x^2-y^2}{r^4}\Big)\Big],\\ Q &= \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\Big(-\ln\frac{1}{r}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\Big(\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}\Big)\Big]\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\Big(\frac{x^2-y^2}{r^4}\Big)\Big],\end{aligned}$$

可见所求的原函数为

$$z = \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\Big(\frac{x^2-y^2}{r^4}\Big) + C. \quad \square$$

习题 4284 计算曲线积分 $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z$.

解 记 $P=x$, $Q=y^2$, $R=-z^3$, 则有

$$P'_y = Q'_x = 0, \quad Q'_z = R'_y = 0, \quad R'_x = P'_z = 0,$$

因此满足全微分条件 (8.9). 由于 P, Q, R 的定义域可取为全空间, 因此存在单值原函数.

以下的曲线积分计算如习题 4258 那样可以用两种方法.

方法一是通过原函数来计算被积表达式为全微分的第二型曲线积分. 设 $u=u(x,y,z)$ 为原函数, 则从 $u'_x = x$ 得到 $u=\dfrac{x^2}{2}+\varphi(y,z)$. 代入 $u'_y = y^2$ 得到 $\varphi'_y = y^2$, 因此有 $\varphi = \dfrac{y^3}{3}+\psi(z)$, 于是 $u=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}+\psi(z)$. 再代入 $u'_z=-z^3$ 得到 $\psi'_z=-z^3$, 因此有 $\psi(z) = -\dfrac{z^4}{4}+C$. 取 $C=0$ 就得到一个原函数

$$u(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^4}{4},$$

于是即可求出所要求的积分为

$$\begin{aligned}\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,\mathrm{d}x+y^2\,\mathrm{d}y-z^3\,\mathrm{d}z&=\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^4}{4}\Big)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}\\&=\Big(2-\frac{1}{2}\Big)+\Big(9-\frac{1}{3}\Big)-\Big(64-\frac{1}{4}\Big)=-53\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

方法二是利用积分只与路径的起点和终点有关, 而与路径的形状无关, 选取适当的路径以简化计算. 对本题可如下计算:

$$\begin{aligned}\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,\mathrm{d}x+y^2\,\mathrm{d}y-z^3\,\mathrm{d}z&=\Big(\int_{(1,1,1)}^{(2,1,1)}+\int_{(2,1,1)}^{(2,3,1)}+\int_{(2,3,1)}^{(2,3,-4)}\Big)x\,\mathrm{d}x+y^2\,\mathrm{d}y-z^3\,\mathrm{d}z\\&=\int_1^2 x\,\mathrm{d}x+\int_1^3 y^2\,\mathrm{d}y+\int_1^{-4}(-z^3)\,\mathrm{d}z=-53\frac{7}{12}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 4295 求当单位质量从点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 时, 引力 $F=\dfrac{G}{r^2}$ 对它所作的功, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, G 为引力常数.

解 写出力 F 的向量形式

$$\boldsymbol{F}=\frac{Gx}{r^3}\boldsymbol{i}+\frac{Gy}{r^3}\boldsymbol{j}+\frac{Gz}{r^3}\boldsymbol{k},$$

即可将所作的功表示为第二型曲线积分

$$W=\int_{M_1M_2}\frac{G}{r^3}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z),$$

其中 M_1M_2 代表从点 M_1 到 M_2 的某条路径.

利用微分关系 (参看 §6.2.2 的习题 3225)

$$\mathrm{d}\Big(\frac{G}{r}\Big)=-\frac{G}{r^3}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z),$$

可见前述积分的被积表达式为全微分, 积分只与路径的起点和终点有关, 且已知 $-\dfrac{G}{r}$ 即是一个原函数, 因此可计算如下:

$$\begin{aligned}W&=\int_{M_1M_2}\frac{G}{r^3}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)\\&=\int_{M_1}^{M_2}\frac{G}{r^3}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)=\Big(-\frac{G}{r}\Big)\Big|_{M_1}^{M_2}\\&=G\Big(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\Big).\quad\square\end{aligned}$$

注 本题的力学意义是明显的. $-\dfrac{G}{r}$ 即是引力 $\boldsymbol{F}$ 的引力势. 在力学中将作功与路径无关的力称为保守力, 而对保守力可引入势函数 (也可引入势能或位能等), 保守力从一点到另一点所作的功等于势函数在两点之差. 引力即是一种保守力.

§8.12 格林公式 (习题 4296–4325)

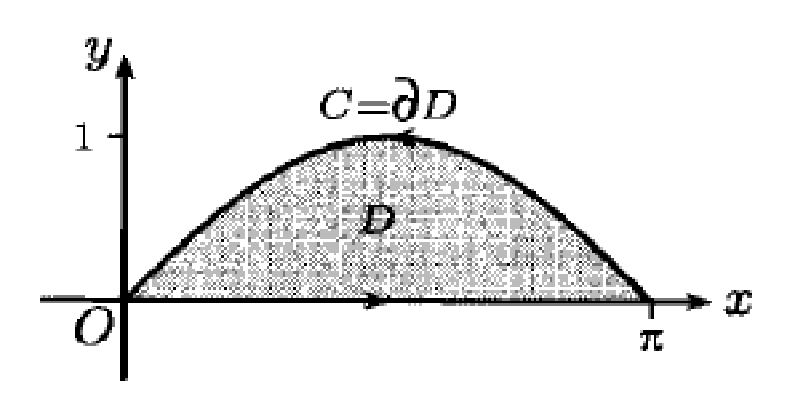
内容简介 格林公式建立了曲线积分与二重积分之间的联系, 是曲线积分理论的核心. 前两个小节为其应用, 第三小节为两型曲线积分的转换与格林公式的第二形式.

8.12.1 格林公式的应用 (习题 4296–4307, 4320.2–4322)

习题 4300 应用格林公式计算曲线积分

$$\oint_C \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\,\mathrm{d}x-(y-\sin y)\,\mathrm{d}y],$$

其中 C 为区域 $0\leqslant x\leqslant \pi$, $0\leqslant y\leqslant \sin x$ 的边界, 并且取正向.



习题 4300 的附图

解 1 记积分为 I. 对于 $P(x,y)=\mathrm{e}^x(1-\cos y)$ 和 $Q(x,y)=-\mathrm{e}^x(y-\sin y)$ 计算

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^x(y-\sin y)-\mathrm{e}^x\sin y=-\mathrm{e}^x y,$$

又将闭路 C 包围的区域记为 D, 于是根据格林公式有

$$\begin{aligned}I&=-\iint_D \mathrm{e}^x y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\int_0^\pi \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y\,\mathrm{d}y\\&=-\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^\pi \mathrm{e}^x(\cos 2x-1)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^\pi-1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{5}(\cos 2x+2\sin 2x)\Big|_0^\pi\\&=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^\pi-1)+\frac{1}{20}(\mathrm{e}^\pi-1)=-\frac{1}{5}(\mathrm{e}^\pi-1).\quad\square\end{aligned}$$

解 2 不用格林公式可计算如下. 先从被积表达式中分出 $\mathrm{e}^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}y$. 由于它是全微分 $\mathrm{d}[\mathrm{e}^x(1-\cos y)]$, 因此在闭路 C 上的积分等于 0. 然后计算

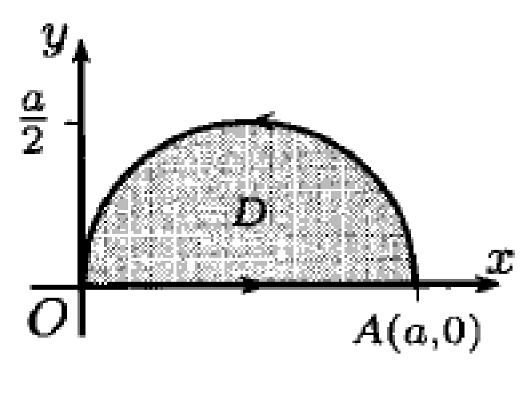
$$\begin{aligned}I&=-\oint_C \mathrm{e}^x y\,\mathrm{d}y\\&=-\int_\pi^0 \mathrm{e}^x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin 2x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\mathrm{e}^x}{10}(-2\cos 2x+\sin 2x)\Big|_0^\pi=-\frac{1}{5}(\mathrm{e}^\pi-1).\quad\square\end{aligned}$$

习题 4303 计算曲线积分

$$\int_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y,$$

其中 AmO 为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 按照《习题集》的提示, 如附图所示添加从 $O(0,0)$ 到 $A(a,0)$ 的直线段, 与题设的上半圆 AmO 形成取正向的闭路 C. 又将它包围的区域记为 D.



习题 4303 的附图

对 $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-my$ 和 $Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y-m$ 计算

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-(\mathrm{e}^x\cos y-m)=m.$$

记所要求的积分为 I, 根据格林公式得到

$$\oint_C(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y$$
$$=I+\int_{OA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y=\iint_D m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

由于在直线段 OA 上 $y=0$, $\mathrm{d}y=0$, 因此其积分等于 0, 从而就得到 $I=\dfrac{\pi ma^2}{8}$. □

注 添加积分路径形成闭路是应用格林公式的重要技巧之一.

习题 4305 求两个二阶可微的连续函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$, 使得曲线积分

$$I=\oint_C P(x+\alpha,y+\beta)\,\mathrm{d}x+Q(x+\alpha,y+\beta)\,\mathrm{d}y$$

对于任何封闭围线 C 都与常数 α 和 β 无关.

解 由于可取任意 (分段光滑的) 闭路 C, 因此根据格林公式就知道对于具有分段光滑边界的任何区域 D, 二重积分

$$I=\iint_D\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

均与 α,β 无关, 也就是有 $\dfrac{\partial I}{\partial\alpha}=0$ 和 $\dfrac{\partial I}{\partial\beta}=0$.

对于坐标面 xOy 上的任何点 (x_0,y_0), 取以该点为中心而其边平行于坐标轴的正方形区域为 D, 相应的二重积分为 I, 则对 I 求关于 α 和 β 的偏导时可通过积分号求偏导[①]. 利用以点 (x_0,y_0) 为中心的正方形的任意性, 可见该表达式于 (x_0,y_0) 处关于 α 和 β 的偏导数均等于 0. 又利用点 (x_0,y_0) 的任意性, 可见处处成立有

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial y}\right]=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial y}\right]=0.$$

由于参数 α 和 β 只以 $x+\alpha$ 和 $y+\beta$ 的形式出现, 因此对 α 和 β 求导与对 x 和 y 求导, 或者对 $x+\alpha$ 和 $y+\beta$ 求导都得到相同的结果. 从而上述两个等式可改写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]=0.$$

由此可见, 上述方括号内的表达式是个常数, 即有

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=k.$$

① 为此只要将二重积分写为二次积分后即可得到证明.

将上式改写为①

$$\frac{\partial[Q(x,y)-kx]}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=0,$$

由 §8.11.3 的全微分条件 (8.8) 即可知道存在函数 $u(x,y)$, 使得成立

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q-kx.$$

反之可见这也是充分条件, 即只要对任意的三阶连续可微函数 $u(x,y)$ 按照上述公式得到的 P,Q 都合乎要求. 这就得到了满足本题要求的所有解. □

习题 4307 (高斯积分) 计算

$$I=\oint_C \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 C 为不经过坐标原点的简单封闭围线, 且取正向.

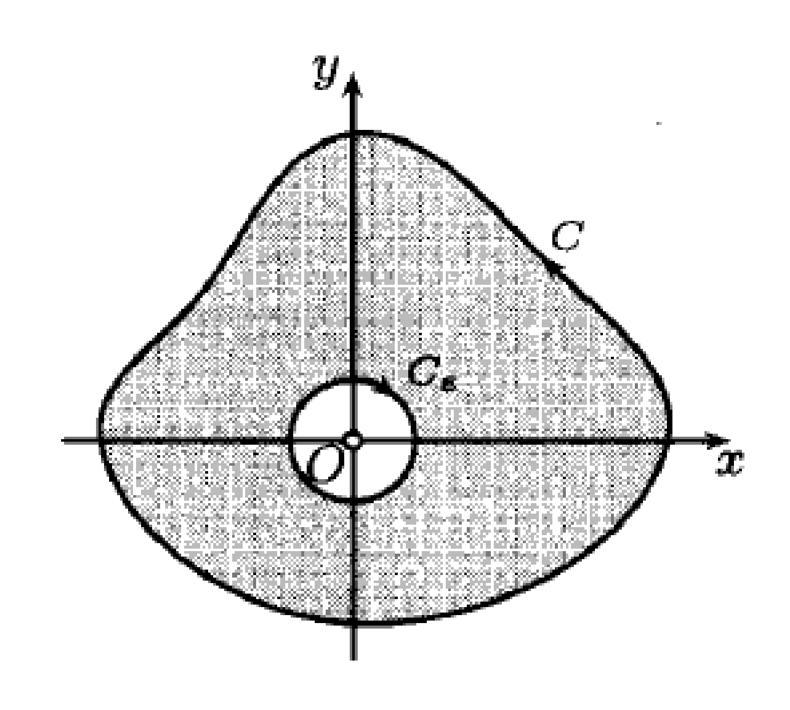
解 对于 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ 和 $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ 计算得到

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=0,$$

因此若闭路 C 既不经过原点, 也不包含原点为其内点, 则积分 $I=0$. 这可以从格林公式得到, 也可以从 §8.11.3 的全微分条件 (8.8) 推出.

对于闭路 C 包含原点为其内点的情况, 由于 P,Q 在原点处没有定义, 因此不能直接应用格林公式. 这里需要新的方法.

这就是对于闭路 C 内去掉原点后的非单连通区域, 如附图所示, 采用在 C 内挖去一个以原点为圆心的小圆. 该小圆的边界 C_ε 的方程为 $x^2+y^2=\varepsilon^2$. 由于在 C 内部的原点到 C 的距离大于 0, 只要取 $\varepsilon>0$ 充分小就可以使得圆 C_ε 也在 C 的内部.



习题 4307 的附图

对圆 C_ε 取顺时针方向, 将介于 C 和 C_ε 之间的区域 (即附图中的灰色区域) 记为 D_ε, 则其边界 $\partial D_\varepsilon=C\cup C_\varepsilon$, 且对于它们的指定取向而言, 格林公式仍然成立, 即成立

$$\oint_{C\cup C_\varepsilon}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

利用第二型曲线积分对于路径的可加性得到

$$\oint_{C\cup C_\varepsilon}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_C\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\oint_{C_\varepsilon}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0,$$

① 另一种方法是改写为 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial[P(x,y)+ky]}{\partial y}=0$, 得到等价的条件, 即存在 u 满足 $\frac{\partial u}{\partial x}=P+ky$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$.

如前所述, C_ε 为顺时针方向. 将它的反向曲线记为 C_ε^*, 并利用第二型曲线积分对于反向路径的积分反号的性质, 就可得到

$$\oint_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_{C_\varepsilon^*} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon^*} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon^2 = 2\pi,$$

其中利用了 $\oint_{C_\varepsilon^*} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 即是 C_ε^* 所围的圆面积 $\pi\varepsilon^2$ 的两倍. 这最后一步计算也可以用 C_ε^* 的参数方程表示 $x=\varepsilon\cos t, y=\varepsilon\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 直接进行如下:

$$\oint_{C_\varepsilon^*} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}[\varepsilon\cos t\cdot\varepsilon\cos t - \varepsilon\sin t\cdot(-\varepsilon\sin t)]\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 2\pi,$$

这里参数的递增方向与 C_ε^* 取逆时针方向的规定是一致的.

综合以上知道, 当 C 不包围原点时积分 $I=0$, 而当 C 包围原点时积分 $I=2\pi$. □

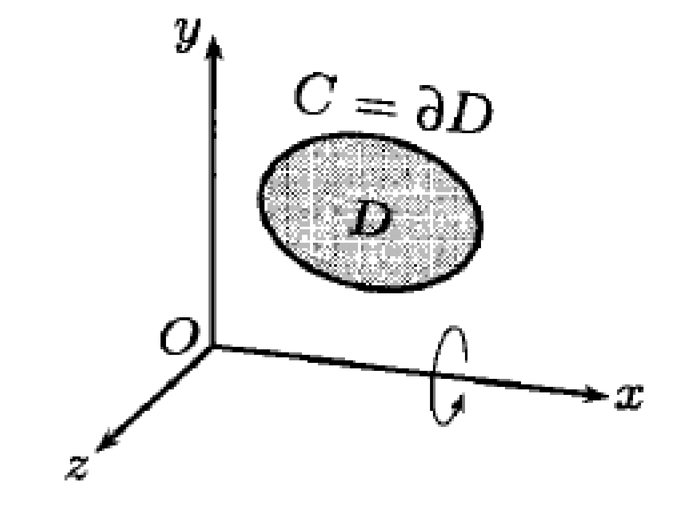
注 1 如 §8.11.3 的习题 4272 的注中所说, 若具备关于奇点的循环常数的概念 (参见 [11] 第三卷的 562 小节), 则本题就变得非常简单. 由于本题的被积表达式满足全微分的条件, 而原点是 P,Q 的奇点, 因此当闭路 C 不围绕奇点时积分为 0, 而当 C 围绕奇点时, 积分值就等于该奇点的循环常数 2π.

注 2 在习题 4303 的注中已经指出, 添加积分路径以形成闭路是应用格林公式的重要技巧之一. 通过本题可以指出, 对于区域中的奇点采用挖洞的方法是应用格林公式中的另一个重要技巧.

注 3 本题有明显的几何意义, 参见 §8.13 的习题 4329 后的注 2.

习题 4320.2 证明: 位于上半平面 $y\geqslant 0$ 的简单封闭曲线 C 绕 Ox 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V = -\pi\oint_C y^2\,\mathrm{d}x.$$



习题 4320.2 的附图

解 如附图所示, 记闭路 C 所围区域为 D, 将它绕 Ox 轴旋转所得的旋转体记为 Ω, 然后对公式右边的曲线积分用格林公式得到

$$-\pi\oint_C y^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

另一方面, 体积 V 等于在空间区域 Ω 上恒等于 1 的函数的三重积分. 对此积分作柱坐标代换

$$x=u,\quad y=v\cos\theta,\quad z=v\sin\theta,$$

则代换的雅可比行列式等于 v, 而积分区域 Ω 变成 $(u,v)\in D$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 于是得到

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\iint_D v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\pi\iint_D v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

再将 u, v 换为 x, y 即得所求的公式. □

注 1 在 §4.7.3 中虽然当时还没有曲线积分工具, 但已经在命题 4.15 中引入了旋转体的三个公式, 其中之一就是本习题要求证的公式. 为方便起见, 将该节的公式 (4.17) 按照曲线积分形式和本题的符号列出如下:

$$\begin{aligned} V &= -\pi \oint_C y^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \oint_C xy\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{2} \oint_C 2xy\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注 2 本题的旋转体的体积计算也容易用古尔丹第二定理得到, 见 §4.9 的习题 2506 及其在 §4.7 中的应用.

习题 4321 若 $X = ax + by$, $Y = cx + dy$, 且 C 为包围坐标原点的简单封闭曲线 $(ad - bc \neq 0)$, 计算

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X\,\mathrm{d}Y - Y\,\mathrm{d}X}{X^2 + Y^2},$$

解 记 $\Delta = ad - bc$. 利用一阶全微分的形式不变性, 从被积表达式为 $\mathrm{d}\arctan\dfrac{Y}{X}$, 可见将 X, Y 的表达式代入被积表达式中后仍然是全微分. (也可以通过计算直接验证全微分条件 (8.8) 成立.) 由于在 $\Delta \neq 0$ 的条件下原点 $O(0,0)$ 是唯一的奇点, 根据格林公式, 被积表达式围绕原点的简单封闭曲线上的积分相等 (即循环常数). 仿照习题 4307 中的方法, 在曲线 C 的内部取 $\varepsilon > 0$ 充分小的封闭曲线

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = \varepsilon^2,$$

并将其正向曲线记为 C_ε, 则在将 X, Y 的表达式代入被积表达式的分子后就得到

$$I = \frac{\Delta}{2\pi} \oint_{C_\varepsilon} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2} = \frac{\Delta}{2\pi\varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

其右边最后一个曲线积分就是 C_ε 所围的面积的两倍. 为计算这个积分可以利用代换

$$X = ax + by, \quad Y = cx + dy.$$

这时易见有 $\dfrac{D(X,Y)}{D(x,y)} = ad - bc = \Delta$, 因此得到 $\dfrac{D(x,y)}{D(X,Y)} = \dfrac{1}{\Delta}$. 将 C_ε 包围的区域记为 D_ε, 则上述代换将 D_ε 变成 XOY 平面上的圆 $X^2 + Y^2 \leqslant \varepsilon^2$. 于是有

$$\begin{aligned} \oint_{C_\varepsilon} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &= 2\iint_{D_\varepsilon} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{|\Delta|} \iint_{X^2+Y^2 \leqslant \varepsilon^2} \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = \frac{2\pi\varepsilon^2}{|\Delta|}. \end{aligned}$$

综合以上计算即可得到 $I = \operatorname{sgn}\Delta$. □

注 计算椭圆 $X^2 + Y^2 = \varepsilon^2$ 的面积的另一个方法是利用 §4.5 的习题 2406 的结果. 为此只要写出方程

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 = \varepsilon^2,$$

就可知道这个二次曲线为椭圆. 按照习题 2406 的记号有

$$A=\frac{a^2+c^2}{\varepsilon^2}, B=\frac{ab+cd}{\varepsilon^2}, C=\frac{b^2+d^2}{\varepsilon^2},$$

即可计算得到椭圆面积为 $\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}=\dfrac{\pi\varepsilon^2}{|\Delta|}$.

习题 4322 若 $X=\varphi(x,y)$, $Y=\psi(x,y)$, 简单围线 C 包围坐标原点, 而曲线 $\varphi(x,y)=0$ 和 $\psi(x,y)=0$ 在围线 C 以内有几个单交点, 计算积分

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{X\,\mathrm{d}Y-Y\,\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}.$$

解 (概要) 本题是习题 4321 的推广, 以下只指出要点.

(1) 对于函数 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 均假设满足连续可微的要求.

(2) 可以利用一阶全微分的形式不变性或直接计算证明被积表达式为全微分.

(3) 单交点的条件表明在满足方程组 $\varphi(x,y)=\psi(x,y)=0$ 的点 (x_0,y_0) 处, 雅可比行列式 $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\neq 0$.

(4) 利用单交点条件可以推出方程组 $\varphi(x,y)=\psi(x,y)=0$ 在曲线 C 所包围的区域内只有有限个零点.

(5) 设 (x_0,y_0) 为上述零点之一, 则根据数学分析教科书中的隐函数组或反函数组存在定理可知, 当 $\varepsilon>0$ 充分小时, 点集 $\{(x,y)\mid \varphi^2(x,y)+\psi^2(x,y)=\varepsilon^2\}$ 在点 (x_0,y_0) 的邻近定义了一条简单封闭曲线[①], 将其正向曲线记为 C_ε.

(6) 对 C 所围区域内的有限个奇点均用充分小的上述 C_ε 包围, 然后在挖去它们所围的部分后对所余的多连通区域 (见附图的阴影区) 上用格林公式, 从而将积分计算变成有限个闭路 C_ε 上的积分计算. 对每个积分可以用代换 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 作计算. □

习题 4322 的附图

8.12.2 面积计算 (习题 4308–4320.1)

习题 4308–4319 都是平面图形的面积计算, 其中所用的面积计算公式为格林公式的推论:

$$S=\oint_C x\,\mathrm{d}y=-\oint_C y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x. \tag{8.10}$$

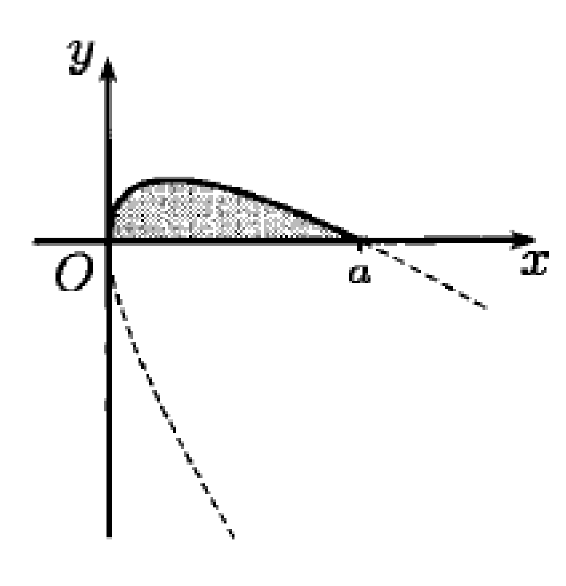
若平面图形的边界曲线用参数 $x=x(t), y=y(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ 表出, 则上述公式就转化为 §4.5 中的公式 (4.14) (见命题 4.14). 因此本节的这部分的习题与 §4.5 的习题 2413–2430 的性质是相似的, 有几个习题是重复的.

习题 4310 利用曲线积分计算由轴 Ox 与 $(x+y)^2=ax$ $(a>0)$ (抛物线) 所围的面积.

[①] 可由参数方程 $x=x(t), y=y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示的曲线, 若 $x(t), y(t)$ 连续, 除了 $x(\alpha)=x(\beta)$, $y(\alpha)=y(\beta)$ 之外无自交点, 则称为简单封闭曲线, 简称单闭曲线.

解 1 令 $y = tx$ 引入参数 t, 代入方程得到

$$x = \frac{a}{(1+t)^2}, \quad y = \frac{at}{(1+t)^2}.$$



习题 4310 的附图

在附图中作出曲线的图像, 可见参数 t 的范围为从 0 递增趋于 $+\infty$ 时描出上述抛物线段. 所要求面积的区域的另一段边界是在 Ox 轴上的直线段 $0 \leqslant x \leqslant a$. 由于 $y = 0$ 和 $\mathrm{d}y = 0$, 在此直线段上的积分在公式 (8.10) 中为 0, 因此在用该公式计算面积时只需要对于抛物线段求积. 如 §4.5 中所指出, 这时只要对 $x^2(t)$ 积分即可:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^4} = \frac{a^2}{2}\Big[-\frac{1}{3(1+t)^3}\Big]\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{6}a^2. \quad \Box \end{aligned}$$

解 2 更简单的方法是由抛物线方程解得 $y = \sqrt{ax} - x$, 然后直接积分得到

$$S = \int_0^a (\sqrt{ax} - x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^2. \quad \Box$$

习题 4311 利用曲线积分计算由曲线 $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$ (笛卡儿叶形线) 所围的面积.

解 笛卡儿叶形线的图像见第一册附录一的习题 370.1(b) 和附录二的习题 1541, 对于该曲线的分析见 §1.4.4 和 §2.12.3 中对于该两题的解.

令 $y = tx$ 以引入参数 t, 则得到参数方程

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

从对于该曲线的分析知道, 当参数 t 从 0 递增趋于 $+\infty$ 时得到本题的叶形线. 将它记为 C. 则所围面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{2}\Big(-\frac{1}{1+t^3}\Big)\Big|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}. \quad \Box \end{aligned}$$

注 求叶形线的面积也出现在《习题集》的 §4.5 的习题 2426 中, 只是该题要求用极坐标作计算. 当然用极坐标表示曲线也是一种参数化方法.

习题 4313 利用曲线积分计算由曲线 $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ 及坐标轴所围的面积.

解 用 $y = tx$ 引入参数方程

$$x = \frac{1+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t(1+t^2)}{1+t^3},$$

并由该曲线的图像 (见 §8.2 的习题 3992 的附图) 可见参数 t 的范围为从 0 递增趋于 $+\infty$. 所围区域在坐标轴上有两个直线段边界. 在它们上的积分于公式 (8.10) 中均为 0, 因此就有

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t.$$

利用贝塔函数的无限区间积分形式 (见 §7.4 的 (7.18))

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u,$$

将 S 的积分中的被积函数的分子展开, 并作代换 $t^3=u$, 就有

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}\frac{(1+2u^{\frac{2}{3}}+u^{\frac{4}{3}})u^{-\frac{2}{3}}}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{6}\left[\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)+2\mathrm{B}(1,1)+\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.\quad\square\end{aligned}$$

在以下的习题 4314–4317 中, 曲线方程分别为

4314 : $(x+y)^{n+m+1}=ax^ny^m\ (a>0,n>0,m>0)$,

4315 : $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1\ (a>0,b>0,n>0)$,

4316 : $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}\ (a>0,b>0,n>1)$,

4317 : $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n\ (a>0,b>0,c>0,n>0)$,

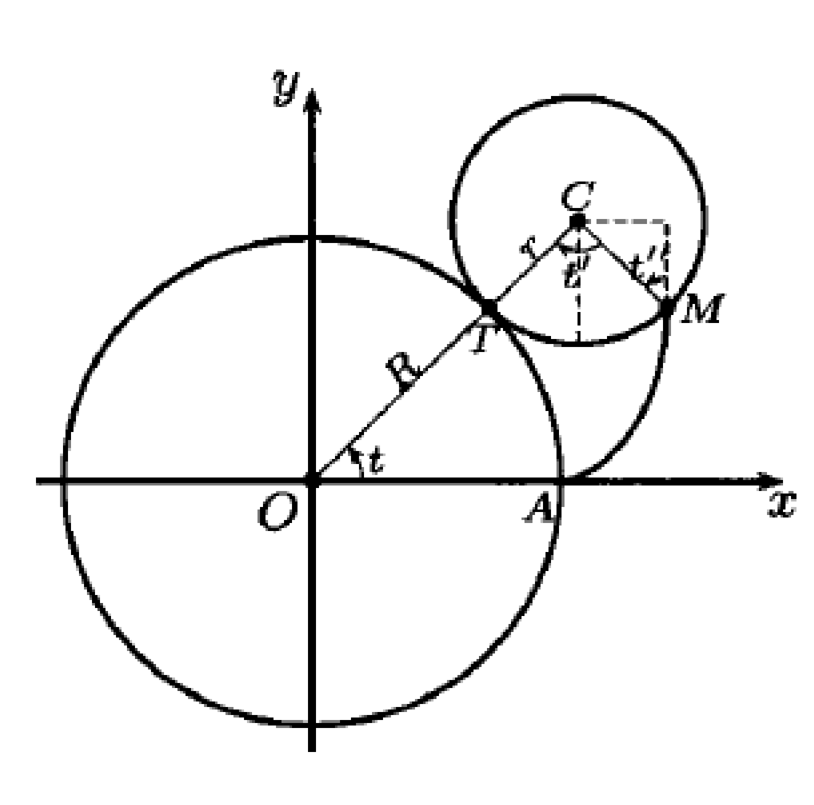
其中所要求的区域面积应限制为第一象限部分的面积 [5], 具体计算不难, 从略.

习题 4318 一半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周外部滚动而无滑动, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为外摆线 (或外旋轮线).

假定比值 $\frac{R}{r}=n$ 是整数 $(n\geqslant 1)$, 求外摆线所围的面积.

研究特殊情况 $r=R$ (心脏线).

解 如附图所示, O 是半径为 R 的固定圆周的圆心, C 是半径为 r 的动圆周的圆心, 设动圆周的起始位置是 C 在 Ox 轴上的点 $(R+r,0)$ 处, 这时动圆周上的点 M 与固定圆周上的点 $A(R,0)$ 重合. 将两个圆周相切的点记为 T, 将 $\angle AOT$ 取为参数 t. 问题是求点 M 的坐标 $(x(t),y(t))$. 在附图中作出了外摆线从 A 到 $M(x(t),y(t))$ 的一段弧.



习题 4318 的附图 1

记 $\angle TCM=t'$, 则由于题设动圆周没有滑动, 因此固定圆周上的弧 $\overset{\frown}{AT}$ 的长度与动圆周上的弧 $\overset{\frown}{TM}$ 的长度相等, 即有 $Rt=rt'$. 于是得到 $t'=\frac{R}{r}t$.

圆心 C 的坐标为 $((R+r)\cos t, (R+r)\sin t)$. 又过点 C 和 M 作两条竖直的虚线, 将它们与半径 CM 的夹角记为 t'', 则有

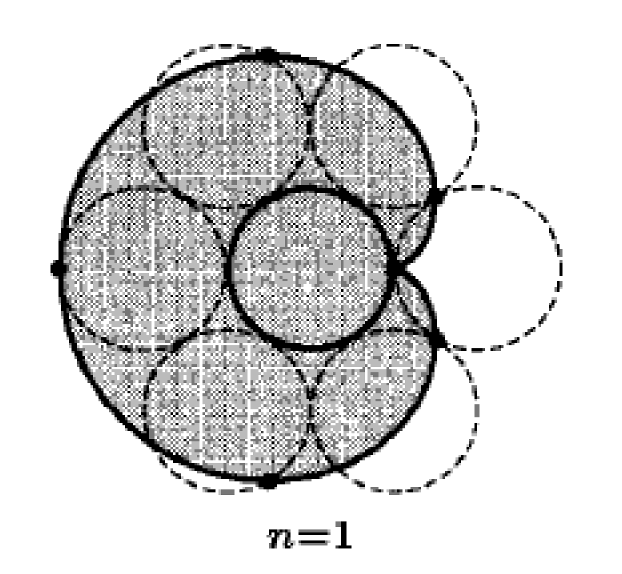
$$t'' = t' - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = t + t' - \frac{\pi}{2} = \frac{R+r}{r}t - \frac{\pi}{2}.$$

于是即可确定点 M 的坐标为

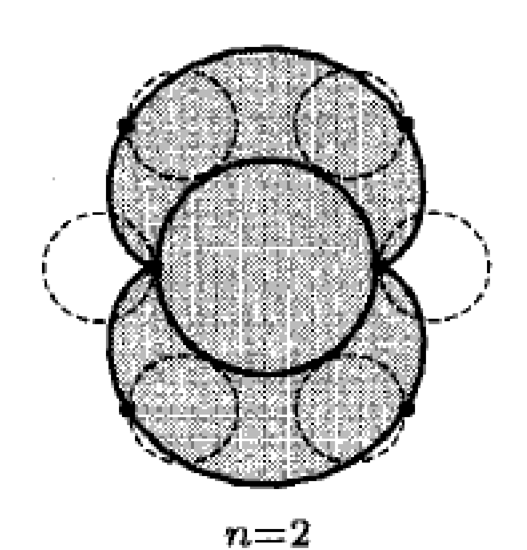
$$x(t) = (R+r)\cos t + r\sin\left(\frac{R+r}{r}t - \frac{\pi}{2}\right) = (R+r)\cos t - r\cos\left(\frac{R+r}{r}t\right),$$

$$y(t) = (R+r)\sin t - r\cos\left(\frac{R+r}{r}t - \frac{\pi}{2}\right) = (R+r)\sin t - r\sin\left(\frac{R+r}{r}t\right).$$

当 $\dfrac{R}{r} = n$ 为正整数时, 即得到封闭的外摆线. 在附图 2 中作出了 $n=1$ 和 $n=2$ 的外摆线, 分别称为心脏线和肾脏线. 其中还画出了动圆周的 6 个位置, 它们与参数 t 的 6 个等间距点相对应, 并标出起始位置为 $(R,0)$ 的点 M 在旋转时于动圆周上的位置.



$n=1$



$n=2$

习题 4318 的附图 2

当 $\dfrac{R}{r} = n$ 时的封闭外摆线的面积可用上述方程计算如下:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}r^2(n^2+3n+2)\int_0^{2\pi}(1-\cos nt)\,\mathrm{d}t = \pi r^2(n^2+3n+2).$$

对于 $R=r$ 的特殊情况, 即 $n=1$, 因此就得到心脏线包围的面积 $S = 6\pi r^2$. □

注 在 $R=r$ 时的心脏线的参数方程为

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t, \quad y = 2r\sin t - r\sin 2t,$$

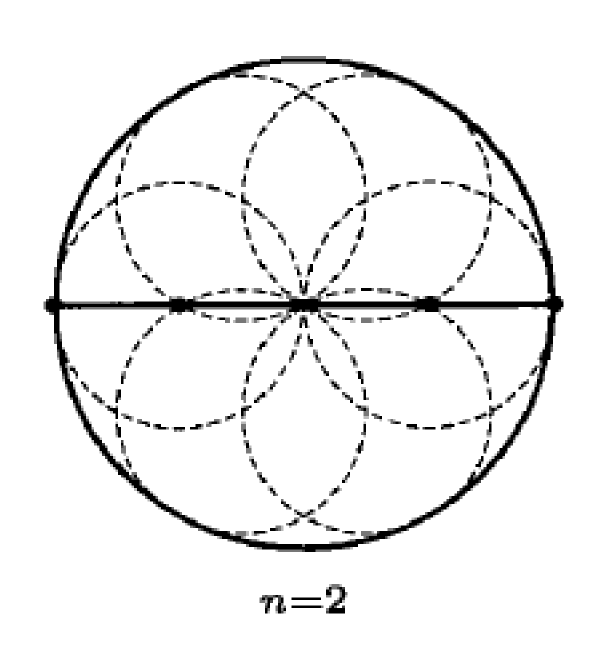
它的图像与常用的极坐标方程 $r = a(1+\cos\varphi)$ 的图像相同, 只是所用的参数和位置有不同, 后者的图像见于第一册附录一的习题 371.1(e) 和附录二的习题 1546(b). 按照极坐标方程计算心脏线的面积见于《习题集》的习题 2419 (参见 §4.9 的习题 2512 的解).

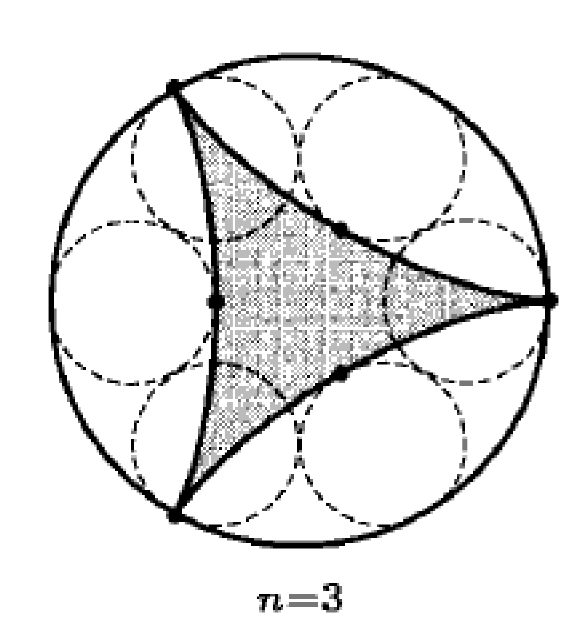
习题 4319 一个半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周内部滚动而无滑动时, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为内摆线.

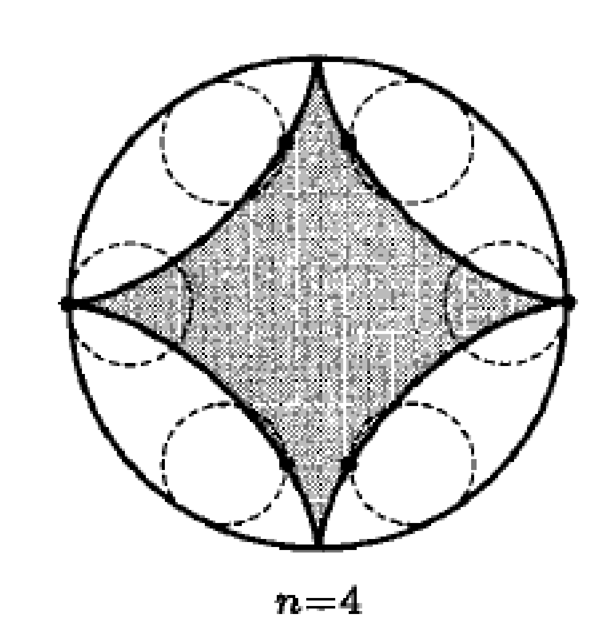
假定比值 $\dfrac{R}{r} = n$ 是整数 $(n \geqslant 2)$, 求内摆线所围的面积.

研究特殊情况 $r = \dfrac{R}{4}$ (星形线).

提示 与外摆线的习题 4318 类似, 从几何上求出曲线的参数方程后求积即可. 在附图中作出了 $n = 2, 3, 4$ 的三种内摆线的图像. $n=2$ 时的内摆线为固定圆周的一个直径. 这个结果称为哥白尼定理. $n=3$ 时的内摆线有三个尖点, 称为施泰纳曲线. $n=4$ 时即得到星形线. 内摆线所围面积为 $S = \pi r^2(n^2-3n+2)$ $(n \geqslant 2)$. □


$n=2$


$n=3$


$n=4$

习题 4319 的附图

习题 4320.1 求圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截部分的面积.

解 1 用 §8.4 的曲面面积计算方法可求解如下. 利用对称性, 只需计算维维亚尼体在第一卦限的侧面积①. 将它投影到坐标面 xOz 上, 得到区域 $D_{xz}=\{(x,z)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-ax}\}$. 以 x,z 为自变量, y 为因变量, 则有 $y=\sqrt{ax-x^2}$.

由 $y'_x=\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$, $y'_z=0$, 得到曲面的面积元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

于是即可求得曲面面积为

$$S=4\iint\limits_{D_{xz}}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=2a\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\mathrm{d}z=2a^{\frac{3}{2}}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=4a^2.\quad\square$$

解 2 利用对称性可将所求面积表示为第一型曲线积分

$$S=2\oint_C z\,\mathrm{d}s,$$

其中 C 为坐标面 xOy 上的圆周 $x^2+y^2=ax$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

用极坐标可将 C 表示为 $r=a\cos\theta$, 于是弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2}=\sqrt{r'^2_\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta=a\,\mathrm{d}\theta.$$

然后用 $x=r\cos\theta=a\cos^2\theta$, $y=r\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$ 即可得到 $z=a\cos\theta$, 而积分为

$$S=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=4a^2.\quad\square$$

注 本题是曲面面积计算, 放在标题为格林公式的这一节似乎不妥. 若在解 2 中将第一型曲线积分转化为第二型曲线积分后再用格林公式, 则计算也不便捷.

8.12.3 两型曲线积分的转换与格林公式的第二形式 (习题 4323–4325)

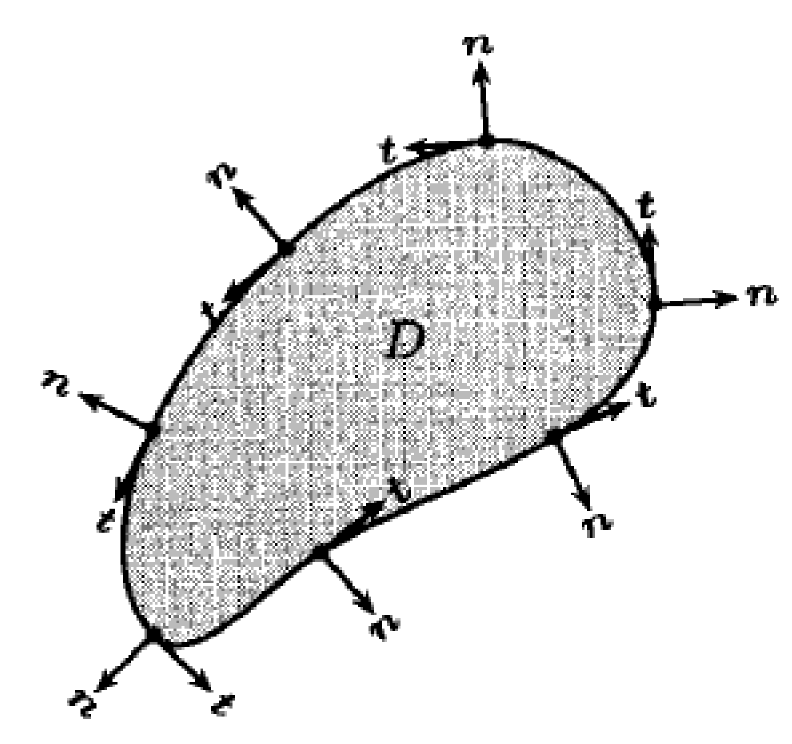
格林公式的常见形式为 (相对于下面的第二形式可将它称为第一形式)

① 参见 §4.7.2 的习题 2466 及其附图, 其中计算了维维亚尼体的体积. §8.3 的习题 4016 计算了球体中挖去两个维维亚尼体后所余的体积. §8.4.1 的习题 4040 计算了维维亚尼体的曲顶和曲底的面积.

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

它建立了第二型曲线积分与二重积分的联系. 然而在本小节的习题和今后的许多重要应用中, 往往更需要建立第一型曲线积分与二重积分的联系. 为此在本小节先讨论两型曲线积分的转换, 然后给出格林公式的第二形式, 它在本书以下的许多问题中有用.

在封闭曲线上的第一型曲线积分中往往会出现曲线的切向量和外法向量. 记曲线 C 所围区域为 D. $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 分别是曲线 C 上的点 (x,y) 处的正方向的单位切向量和单位外法向量, 则如附图所示, 在曲线 C 取正向时, 由于在每一个点 $(x,y)\in C$ 的邻近, 区域 D 总是处于切向量 $\boldsymbol{t}$ 的左侧, 因此指向 D 的外侧的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 必在 $\boldsymbol{t}$ 的右侧.



封闭围线的切向量与外法向量

于是将切向量 $\boldsymbol{t}$ 按照顺时针方向旋转 90° 就得到外法向量 $\boldsymbol{n}$. 若记 α 为切向量 $\boldsymbol{t}$ 的方位角, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} &= (\cos\alpha, \sin\alpha), \\ \boldsymbol{n} &= \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\alpha, -\cos\alpha). \end{aligned} \tag{8.11}$$

若以曲线 C 上的某个点沿正向起算的弧长 s 为参数, 曲线 C 的参数方程为 $x = x(s)$, $y = y(s)$, 则从弧长微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + y_x'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \tan^2\alpha}\,\mathrm{d}x$ 可见有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha$. 又从 $y_x' = \tan\alpha$ 得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$. 于是可将 (8.11) 写为

$$\boldsymbol{t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right), \quad \boldsymbol{n} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right). \tag{8.12}$$

由此就可导出格林公式的第二形式, 它建立了第一型曲线积分与二重积分之间的联系. 为今后引用方便将它列为下列命题.

命题 8.6 (格林公式的第二形式) 格林公式与下列公式等价:

$$\oint_C [P\cos(\boldsymbol{n},x) + Q\cos(\boldsymbol{n},y)]\,\mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{8.13}$$

其中 $C = \partial D$, $\boldsymbol{n}$ 为指向 D 的外侧的单位法向量.

证 为从格林公式推出 (8.13), 可用 (8.12) 将其左边积分的被积表达式改写如下:

$$[P\cos(\boldsymbol{n},x) + Q\cos(\boldsymbol{n},y)]\,\mathrm{d}s = P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x,$$

然后应用格林公式 (的常见形式) 即可得到 (8.13).

另一方面, 利用 (8.12) 又可以从 (8.13) 推出格林公式的常见形式:

$$\begin{aligned} \oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= \oint_C \left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \\ &= \oint_C \big[-P\cos(\boldsymbol{n},y) + Q\cos(\boldsymbol{n},x)\big]\,\mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad \square \end{aligned}$$

习题 4323 证明: 若 C 为封闭围线, $\boldsymbol{l}$ 为任意方向, 则

$$\oint_C \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = 0,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为围线 C 的外法向量.

解 1 将 C 的正向单位切向量记为 $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, 又将 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位向量记为 (l_x, l_y), 则由 (8.11) 即有

$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}) = l_x\sin\alpha - l_y\cos\alpha.$$

由 (8.12) 有

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}y = \sin\alpha\,\mathrm{d}s,$$

因此就可以用格林公式计算得到

$$\begin{aligned}\oint_C \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s &= \oint_C (l_x\sin\alpha - l_y\cos\alpha)\,\mathrm{d}s = \oint_C l_x\,\mathrm{d}y - l_y\,\mathrm{d}x \\ &= \iint\limits_D \left[\frac{\partial l_x}{\partial x} - \frac{\partial(-l_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

这里最后利用了方向 $\boldsymbol{l}$ 为固定的常向量, 因此 l_x 和 l_y 都是常数. □

解 2 直接用格林公式的第二形式 (8.13), 即有

$$\begin{aligned}\oint_C \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s &= \oint_C [l_x\cos(\boldsymbol{n},x) + l_y\cos(\boldsymbol{n},y)]\,\mathrm{d}s \\ &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial l_x}{\partial x} + \frac{\partial l_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$ □

注 从场论的角度看, 本题可解释为在不可压缩流体平面流动中, 流速为常向量 $\boldsymbol{l}$ 的流体通过任何封闭围线的流量为 0.

习题 4324 求积分

$$I = \oint_C [x\cos(\boldsymbol{n},x) + y\cos(\boldsymbol{n},y)]\,\mathrm{d}s$$

之值, 式中 C 是有界区域 S 的边界, 它是简单封闭曲线, 而 $\boldsymbol{n}$ 是它的外法向量.

解 1 设 $\boldsymbol{n}$ 为曲线 C 的单位长度的外法向量, $\boldsymbol{t}$ 为 C 的单位长度的正向切向量, 则从 (8.11) 即可计算如下:

$$I = \oint_C [x\cos(\boldsymbol{t},y) - y\cos(\boldsymbol{t},x)]\,\mathrm{d}s = \oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 2|S|,$$

即区域 S 的面积 $|S|$ 的两倍. □

解 2 直接用格林公式的第二形式 (8.13), 就得到

$$I = \oint_C [x\cos(\boldsymbol{n},x) + y\cos(\boldsymbol{n},y)]\,\mathrm{d}s = \iint\limits_S 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2|S|.$$ □

§8.13 曲线积分在物理学上的应用 (习题 4326–4340)

内容简介 本节的习题多数为证明题, 其中包括了二维调和函数的一些基本性质.

习题 4327 计算单层的对数势

$$u(x,y)=\oint_C \kappa\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}s,$$

式中 $\kappa=$ 常数, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, 设围线 C 是圆周 $\xi^2+\eta^2=R^2$.

解 1 由于对称性, 满足 $x^2+y^2=\rho^2\ (\rho\geqslant 0)$ 的点 (x,y) 处具有相同的势, 因此以下只对点 $(\rho,0)$ 作计算.

将积分路径 C 参数化为 $\xi=R\cos\theta$, $\eta=R\sin\theta$, 于是 $\mathrm{d}s=R\,\mathrm{d}\theta$, 即有

$$\begin{aligned}u(\rho,0)&=-\kappa R\int_0^{2\pi}\ln\sqrt{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}\,\mathrm{d}\theta\\&=-2\pi\kappa R\ln R-\kappa R\int_0^{\pi}\ln(1-2b\cos\theta+b^2)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

其中 $b=\rho/R\geqslant 0$.

上式的最后一个积分即是泊松积分 (见 §4.1.1 的习题 2192, §5.8.1 的习题 3049 以及 §7.1.2 的习题 3733), 因此有

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2b\cos\theta+b^2)\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & 0\leqslant b\leqslant 1,\\ 2\pi\ln b, & b>1.\end{cases}$$

综合以上并将 ρ 换为 $\sqrt{x^2+y^2}$ 就得到

$$u(x,y)=\begin{cases}2\pi\kappa R\ln\dfrac{1}{R}, & 0\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 2\pi\kappa R\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>R^2.\end{cases}\qquad\square$$

解 2 利用 §6.2.4 的习题 3307, $\ln\frac{1}{r}$ 为调和函数. 当 $x^2+y^2>R^2$ 时, 用后面的习题 4336 (调和函数的平均值定理), 即在圆周 C 上的积分等于圆周长乘以调和函数在圆心处的值, 就可得到与解 1 相同的结果:

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\oint_C \kappa\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}s\\&=2\pi R\kappa\cdot\ln\frac{1}{r}\Big|_{\xi=\eta=0}\\&=2\pi R\kappa\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

这样即可推出解 1 中的泊松积分在 $b>1$ 时的值. 如习题 3733 等所示, 由此可导出泊松积分在 $0\leqslant b<1$ 时的值. 至于 $b=1$ 时的积分值可从 §4.4.1 的习题 2353 (欧拉积分) 得到. 这样也就可得到 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$ 时的 $u(x,y)$. $\square$

习题 4328 采用极坐标 ρ 和 φ 计算单层对数势

$$I_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\psi \text{ 和 } I_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\psi,$$

式中 r 为点 (ρ,φ) 与动点 $(1,\psi)$ 之间的距离, m 为正整数.

提示　可利用 §5.6.1 的习题 2969 和 2970 中的函数的傅里叶级数展开式以逐项求积. □

习题 4329 (高斯积分) 计算积分

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s,$$

式中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的长度, 此向量连接点 $A(x,y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi,\eta)$, $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 与曲线 C 在点 M 的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

解　写出 $\boldsymbol{r}=(\xi-x,\eta-y)$, 则就有

$$u(x,y)=\oint_C\left[\frac{\xi-x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},\xi)+\frac{\eta-y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},\eta)\right]\mathrm{d}s.$$

以下分几种情况.

(1) 点 $A(x,y)$ 在围线 C 之外. 即 C 所围区域为 D, 用格林公式的第二形式 (8.13) 于上式右边即可得到

$$u(x,y)=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r^2}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

由计算得到

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r^2}\right)=\frac{1}{r^2}-\frac{2(\xi-x)}{r^3}\cdot\frac{\xi-x}{r}=\frac{1}{r^4}[-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2],$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r^2}\right)=\frac{1}{r^2}-\frac{2(\eta-y)}{r^3}\cdot\frac{\eta-y}{r}=\frac{1}{r^4}[-(\eta-y)^2+(\xi-x)^2],$$

可见 $u(x,y)=0$.

(2) 点 $A(x,y)$ 在围线 C 的内部. 采用 §8.12.1 的习题 4307 中的挖洞法, 取 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得以 (x,y) 为圆心以 $\varepsilon>0$ 为半径的圆 C_ε 落在 C 的内部, 并取 C_ε 的方向为顺时针方向. 又将其反向的圆周记为 C_ε^*. 在区域 D 挖去 C_ε 的内部所余区域上用格林公式的第二形式, 则所得的二重积分为 0, 因此有

$$\oint_{C\cup C_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s+\oint_{C_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s=0.$$

于是得到

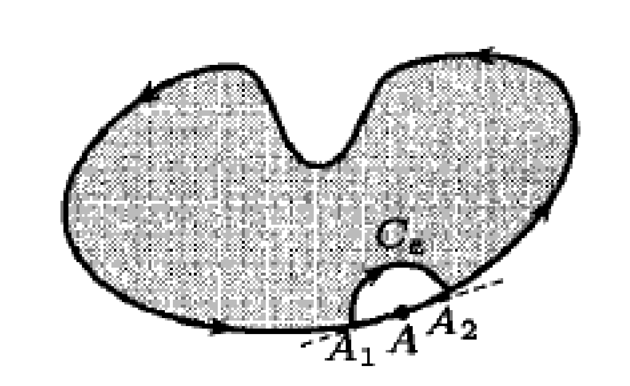
$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s=\oint_{C_\varepsilon^*}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s.$$

由于当 $(\xi,\eta)\in C_\varepsilon^*$ 时 $\boldsymbol{r}$ 与该点的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 同方向, 因此 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=1$. 又因这时 $r=\varepsilon$, 因此就得到

$$u(x,y)=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{C_\varepsilon^*}\mathrm{d}s=\frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon}=2\pi.$$

(3) 点 $A(x,y)$ 在围线 C 上. 这时被积函数 $\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}$ 于点 A 邻近无界, 定义 $u(x,y)$ 的第一型曲线积分是在广义积分的极限意义上来定义的.

由于 C 为光滑曲线, 在点 A 处有切线 (在附图中用虚直线表示). 以点 A 为圆心, 用充分小的 $\varepsilon>0$ 为半径作处于区域 D 内的圆弧, 与围线 C 交于点 A_1 和 A_2, 使得在 C 上从 A_1 到 A 再到 A_2 的顺序与 C 的正向一致.



习题 4329 的附图

现在将上述半径为 $\varepsilon>0$ 且从 A_1 到 A_2 的圆弧记为 C_ε, 且将其反向弧记为 C_ε^*, 又将围线 C 上从 A_2 沿正方向到 A_1 的一段弧记为 $C-\widehat{A_1A_2}$. 然后如附图所示, 对于由 $C-\widehat{A_1A_2}$ 与 C_ε 围成的灰色区域可以如情况 (1) 和 (2) 那样用格林公式, 即可得到

$$\int_{C-\widehat{A_1A_2}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s+\int_{C_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s=0,$$

这样就得到

$$\int_{C-\widehat{A_1A_2}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s=\int_{C_\varepsilon^*}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\varepsilon}\int_{C_\varepsilon^*}\mathrm{d}s.$$

最后令 $\varepsilon\to0$, 这时上式左边的弧 $\widehat{A_1A_2}$ 收缩为点 A, 因此就得到 $u(x,y)$, 而右边的积分值趋于以 ε 为半径的半个圆周的长度, 因此其极限等于 π. □

注 1　在情况 (3) 中曲线 C 的光滑性条件起了关键作用. 在 [32] 的例题 24.3.2 中对 C 只假设分段光滑, 并讨论了当点 A 在围线 C 上且分别具有两个单侧切线的情况. 计算表明这时的 $u(x,y)=\theta$, 其中 θ 是角 $\angle A_1AA_2$ 当 $\varepsilon\to0$ 时的极限, 即从点 A 向两侧引出的切线之间的夹角.

注 2　利用公式 (8.11) 或 (8.12) 可将高斯积分用第二型曲线积分写出, 则得到

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\xi-x}{r^2}\,\mathrm{d}\eta-\frac{\eta-y}{r^2}\,\mathrm{d}\xi,$$

可见这与 §8.12.1 的习题 4307 相似. 由于这时的原函数即是 $\mathrm{Arctan}\frac{\eta-y}{\xi-x}$, 因此高斯积分有明显的几何意义. 设想眼睛处于点 $A(x,y)$ 的位置去看封闭曲线 C 上的动点 (ξ,η). 若点 $A(x,y)$ 在 C 之外, 则当动点沿曲线 C 正向一周时, 视角的总增量为 0, 而当点 $A(x,y)$ 于 C 之内时, 则视角的总增量为 2π. 对于点 $A(x,y)$ 在曲线 C 上的情况, 则当曲线在该点光滑时视角的总增量为 π. 注 1 所补充的情况也有明显的几何意义.

习题 4331　满足 $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 的二阶可微函数 $u=u(x,y)$ 称为调和函数. 证明: 当且仅当以下条件成立时 u 才是调和函数:

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s=0,$$

式中 C 为任意封闭围线, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此围线之外法线方向的导数.

解　本题的条件需要加强: (1) 对函数 $u=u(x,y)$ 要求二阶连续可微, (2) 对任意的封闭围线 C 要求它至少分段光滑.

利用方向导数的计算公式有

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, y),$$

然后即可用格林公式的第二形式 (8.13) 得到

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \oint_C \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, y)\right]\mathrm{d}s = \iint\limits_D \Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{8.14}$$

由此公式可见, 若 u 为调和函数, 则对于任意的封闭围线 C, 左边的积分总是等于 0. 反之, 若在某个点处 $\Delta u \neq 0$, 则作围绕该点的充分小的围线, 就会导致在此围线上的积分不等于 0. □

注 (8.14) 是研究调和函数时的常用公式之一. 对三维情况的类似公式见 §8.16 的习题 4393 的公式 (a).

习题 4332 证明:

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_S u\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s,$$

式中光滑围线 C 是有界区域 S 的边界.

提示 对右边第二项如习题 4331 那样用格林公式的第二形式 (8.13) 即可. □

注 此题所要证明的公式是格林第一恒等式 (也称为格林第一公式) 的特例. 为方便起见, 将该恒等式列出如下:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_S v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s, \tag{8.15}$$

可见取 $v = u$ 时就得到习题 4332 的结果, 而取 $v \equiv 1$ 就得到公式 (8.14). 其证明留作一个练习题. 对三维情况的类似公式见 §8.16 的习题 4393 的公式 (b) 和 (8.28).

习题 4333 证明: 若一函数在有界区域 S 内及其边界 C 上为调和函数, 则此函数单值地由它在边界 C 上的值确定.

提示 用习题 4332 提供的公式即可. 这里补充指出, 本题表明在有界区域 S 的边界上给定 u 的值后, 在 S 内满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的解必定是唯一的. □

习题 4334 证明平面上的格林第二恒等式 (也称为格林第二公式):

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix}\mathrm{d}s, \tag{8.16}$$

式中光滑围线 C 是有界区域 S 的边界, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导数.

提示 至少有两个证明方法. (1) 写出格林第一恒等式, 又将其中的 u, v 对换, 两式相减即得.

(2) 对本题的右边用格林公式的第二形式即得. □

习题 4335 利用格林第二恒等式证明: 若 $u = u(x, y)$ 是有界闭区域 S 内的调和函数, 则

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

式中 C 为区域 S 的边界, n 为围线 C 的外法向量, (x, y) 为区域 S 的内点,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

为点 (x, y) 与围线 C 上的动点 (ξ, η) 之间的距离.

解 由 §6.2.4 的习题 3307 知道 $\ln\dfrac{1}{r}$ 在 S 内除了奇点 (x, y) 之外为调和函数 (参见习题 4327 的解). 为克服奇点带来的问题, 采用前面已多次使用过的挖洞方法.

取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得以 (x, y) 为圆心和以 ε 为半径的圆落在区域 S 的内部. 将该圆周取顺时针方向记为 C_ε, 又将其反向圆周记为 C_ε^*. 然后在区域 S 挖去以 C_ε 为边界的圆后的区域上对于 u 和 $v = \ln\dfrac{1}{r}$ 用格林第二恒等式, 这时 (8.16) 的左边为 0, 而右边是在 C 和 C_ε 上的积分之和. 利用在 C_ε^* 上的积分与在 C_ε 上的积分相反, 因此就得到

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\oint_{C_\varepsilon^*} \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

余下的问题只是对于右边积分的简单计算.

由于在 C_ε^* 上 $\ln r = \ln\varepsilon$, 应用习题 4331 就知道上式右边括号内的第二项的积分等于 0. 又从 $\dfrac{\partial \ln r}{\partial n} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r}{\partial n}$, 而在圆周上的外法线方向与从圆心出发的矢径方向一致, 因此 $\dfrac{\partial r}{\partial n} = 1$. 于是就可计算得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\varepsilon^*} \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_{C_\varepsilon^*} u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x+\varepsilon\cos\theta, y+\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

最后令 $\varepsilon \to 0$, 利用含参变量常义积分的连续性, 此极限可以通过积分号, 于是就得到极限值为 $u(x, y)$. □

注 上述证明的最后一步也可以用下一题的平均值定理得到.

习题 4336 (平均值定理) 证明对于调和函数 $u(M) = u(x, y)$ 有

$$u(M) = \frac{1}{2\pi R}\oint_C u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s,$$

其中 C 是以点 M 为圆心以 R 为半径的圆周.

解 由题意可见, 若将 $R > 0$ 变小, 则结论仍然成立. 因此只需要证明函数

$$I(r) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s$$

在 $r \in (0, R]$ 上恒等于 $u(M)$ 即可, 其中围线 C_r 是以点 M 为圆心以 r 为半径的圆周.

将 C_r 参数化为

$$\xi = x + r\cos\theta, \quad \eta = y + r\sin\theta,$$

则就有 $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$, 于是得到

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

利用含参变量的常义积分的性质 (参见 §7.1), 可见 $I(r)$ 在 $r\in[0,R]$ 上连续, 在 $(0,R)$ 上可导, 并可在积分号下求导得到

$$I'(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u'_\xi\cos\theta+u'_\eta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

由于在圆周 C_r 上单位外法向量就是 $(\cos\theta,\sin\theta)$, 因此上式右边括号内就是方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$. 于是可以将上式右边的积分改写为第一型曲线积分并得到

$$I'(r)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s=0,$$

其中最后一步利用 u 为调和函数以及习题 4331 的结论.

由此可见 $I(r)$ 在 $[0,R]$ 上是常值函数, 从而得到 $I(R)=I(0)=u(M)$. □

注 1　利用习题 4335 的结论也可给出本题的平均值定理的一个证明. 为此只要在该题中取 C 为以点 $M(x,y)$ 为圆心以 R 为半径的逆时针方向的圆周, 并利用习题 4331 的结论即可计算得到.

注 2　平均值定理之逆也正确. 换言之, 若函数 $u(x,y)$ 在区域 S 上连续, 且在区域内的任何一个圆的圆心处的值等于它在圆周上的值的平均值, 则 $u(x,y)$ 为调和函数. 这有多种证明方法, 例如见 [21] 的例 200 之 2).

习题 4337 (极大值原理) 证明: 有界闭区域内的非常数调和函数 $u(x,y)$ 在此区域的内点处不能达到其最大值和最小值.

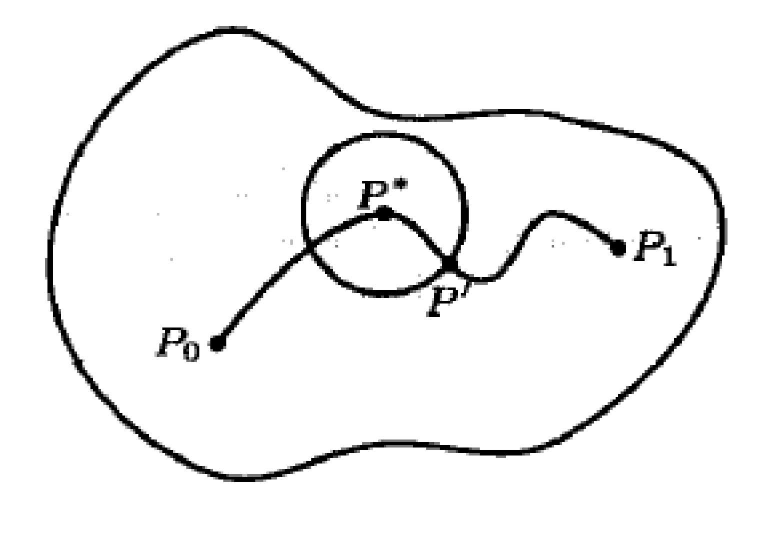
解　不妨只对最大值作出证明. 设非常数的 $u(x,y)$ 于有界闭区域 S 上为调和函数. 利用有界闭区域上的连续函数的最值定理, 存在 $M=\max\limits_{(x,y)\in S}u(x,y)$.

用反证法. 设于区域 S 的某个内点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有 $u(P_0)=M$, 则因 u 不是常值函数, 存在点 $P_1(x_1,y_1)\in S$, 使得 $u(P_1)<M$. 由闭区域为开区域的闭包的定义可知, 不妨设点 P_1 也是 S 的内点.

如附图所示, 在区域 S 内作连接点 P_0 和 P_1 的一条连续曲线 Γ, 要求其上的所有点都是区域 S 的内点, 其参数方程为

$$\Gamma: x=x(t),y=y(t),0\leqslant t\leqslant T,$$

且有 $x_0=x(0)$, $y_0=y(0)$, $x_1=x(T)$, $y_1=y(T)$.



习题 4337 的附图

考虑函数 $u(x,y)$ 在曲线 Γ 上的取值. 因 $u(P_0)=M$ 是 $u(x,y)$ 在 S 上的最大值, 令

$$t^*=\max_{t\in[0,T]}\{u(x(t),y(t))\},$$

则有 $0\leqslant t^*<T$. 将参数 t^* 对应的点记为 $P^*(x(t^*),y(t^*))$. 由于 P^* 是 S 的内点, 存在以 P^* 为圆心以 $\varepsilon>0$ 为半径的充分小的圆周 C_ε, 它完全落在区域 S 内.

这时圆周 C_ε 与曲线段

$$\{(x(t), y(t)) \mid t^* < t \leqslant T\}$$

至少有一个交点. 将它记为 P', 则 $u(P') < M$.

由 $u(x,y)$ 的连续性可见, 在圆周 C_ε 上邻近点 P' 的一段圆弧上, 不等式 $u(x,y) < M$ 成立. 由此可见有下列不等式成立:

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_{C_\varepsilon} u(x,y)\,\mathrm{d}s < M.$$

可是根据平均值定理, 左边的积分应当等于调和函数 $u(x,y)$ 在圆心 P^* 处的值 $u(x(t^*), y(t^*))$. 而根据点 t^* 的定义, 这个值等于 M, 引出矛盾. □

习题 4338 证明黎曼公式:

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

式中

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu, \quad M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c 为常数), P 和 Q 为某些确定的函数, 围线 C 是有界区域 S 的边界.

提示　设法将左边的被积函数凑成 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$, 然后用格林公式. (还可看出满足这个要求的 P, Q 不是唯一的.) □

注　本题的黎曼公式是偏微分方程中求解一类双曲线方程的黎曼方法的基础.

习题 4339 设 $u = u(x,y)$ 和 $v = v(x,y)$ 为定常流的速度分量, C 为有界区域 S 的边界, 求区域 S 内的流体质量的变化率. 若流体是不可压缩的, 且在区域 S 内没有源与汇, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程?

解　对于定常流来说, 在点 (x,y) 处的流体速度和密度都与时间 t 无关. 记密度为 $\rho = \rho(x,y)$, 速度向量为

$$\boldsymbol{w} = u(x,y)\boldsymbol{i} + v(x,y)\boldsymbol{j},$$

则通过曲线 C 的弧长元素 $\mathrm{d}s$ 在单位时间内流出区域 S 的流体质量为

$$\rho\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \rho(x,y)[u(x,y)\cos(\boldsymbol{n},x) + v(x,y)\cos(\boldsymbol{n},y)]\,\mathrm{d}s.$$

将上式求和 (也就是求积) 并应用格林公式的第二形式 (8.13), 即可得到区域 S 内的流体质量的变化率为

$$\begin{aligned}\oint_C \rho\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s &= \oint_C \rho(x,y)[u(x,y)\cos(\boldsymbol{n},x) + v(x,y)\cos(\boldsymbol{n},y)]\,\mathrm{d}s \\ &= \iint\limits_S \Big[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

在流体不可压缩时, 在区域 S 内没有源与汇的条件表明通过边界 C 流入 S 和流出 S 的流体体积相等, 即流体体积的变化率为 0. 这样就可与上面的推导类似地得到

$$\oint_C \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint\limits_S \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

由于这对任何围线 C 包围的区域 S 都成立, 因此速度向量 $\boldsymbol{w}$ 的分量 u 和 v 必须满足的微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \quad \square$$

注 由于在流体力学中的不可压缩流体有均匀与非均匀两类, 因此我们是从体积守恒原理导出上述微分方程的. 这与后面 §8.17.4 的习题 4451 的注一致 (参见 [33] 的 §14.4 的应用例子 2).

习题 4340 根据毕奥–萨瓦尔定律, 通过导线微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的电流 i 在空间的点 $M(x,y,z)$ 处所对应的磁场强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=ki\frac{\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r^3},$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为连接导线微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 与点 M 的向量, k 为比例系数.

对于封闭导线 C 的情形, 求点 M 的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的投影 H_x, H_y 和 H_z.

解 按题意即是计算环路电流在空间的点 M 处所生成的磁场强度. 记曲线 C 上的动点为 (ξ,η,ζ), 则可先计算出向量

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{H}&=\frac{ki}{r^3}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \xi-x & \eta-y & \zeta-z\\ \mathrm{d}\xi & \mathrm{d}\eta & \mathrm{d}\zeta\end{vmatrix}\\ &=\frac{ki}{r^3}\Big\{[(\eta-y)\,\mathrm{d}\zeta-(\zeta-z)\,\mathrm{d}\eta]\boldsymbol{i}+[(\zeta-z)\,\mathrm{d}\xi-(\xi-x)\,\mathrm{d}\zeta]\boldsymbol{j}\\ &\qquad+[(\xi-x)\,\mathrm{d}\eta-(\eta-y)\,\mathrm{d}\xi]\boldsymbol{k}\Big\},\end{aligned}$$

然后按照三个分量分别积分就得到所求的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的三个分量为

$$H_x=ki\oint_C\frac{(\eta-y)\,\mathrm{d}\zeta-(\zeta-z)\,\mathrm{d}\eta}{r^3},$$

$$H_y=ki\oint_C\frac{(\zeta-z)\,\mathrm{d}\xi-(\xi-x)\,\mathrm{d}\zeta}{r^3},$$

$$H_z=ki\oint_C\frac{(\xi-x)\,\mathrm{d}\eta-(\eta-y)\,\mathrm{d}\xi}{r^3}. \quad \square$$

§8.14 曲面积分 (习题 4341–4366)

内容简介 本节的习题分为三个小节. 前两个小节是第一型曲面积分的计算和应用, 第三小节则是按照定义对第二型曲面积分的计算.

8.14.1 第一型曲面积分 (习题 4341–4351)

第一型曲面积分的形式为 $\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, 它与 §8.11.1 的第一型曲线积分有许多相似之处. 另一方面, 第一型曲面积分的积分元就是 §8.4 的曲面面积元 $\mathrm{d}S$, 当被积函数 f 恒等于 1 时就是曲面 S 的面积, 因此在计算方法方面与 §8.4 的曲面面积计算相类似, 即首先要取定曲面的表示方法, 并由此求出 $\mathrm{d}S$. 这样就可以将第一型曲面积分转化为二重积分求积.

习题 4341 若 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, P 为其内接八面体的表面 $|x|+|y|+|z|=a$, 则两个积分

$$I_1=\oiint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S,\quad I_2=\oiint\limits_P (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}P$$

相差多少?

解 对于积分 I_1, 用球面坐标

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=a\sin\varphi\sin\theta,\quad z=a\cos\varphi,$$

则 S 就是 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$, 积分元为 $\mathrm{d}S=a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$, 这样即可计算得到

$$I_1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}a^4\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=4\pi a^4.$$

对于积分 I_2, 利用对称性, 只需计算第一卦限中的部分再乘以 8. 这时方程为 $z=a-x-y$, 因此面积元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

于是即可计算得到

$$\begin{aligned}I_1&=8\sqrt{3}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\,\mathrm{d}y\\&=8\sqrt{3}a^4\int_0^1\mathrm{d}\xi\int_0^{1-\xi}[\xi^2+\eta^2+(1-\xi-\eta)^2]\,\mathrm{d}\eta\\&=8\sqrt{3}a^4\int_0^1\Big(-\frac{5}{3}\xi^3+3\xi^2-2\xi+\frac{2}{3}\Big)\,\mathrm{d}\xi=2\sqrt{3}a^4.\end{aligned}$$

于是得到两者之差为

$$I_1-I_2=4\pi a^4-2\sqrt{3}a^4\approx 9.102a^4.\quad\square$$

习题 4342 计算 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 式中 S 为曲面 $x^2+z^2=2az$ $(a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割下的部分.

解　曲面 S 是柱面 $x^2+(z-a)^2=a^2$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割下的部分，它处于柱面的上半部分，因此可解得

$$z=z(x,y)=a+\sqrt{a^2-x^2}.$$

以 x,y 为自变量，求出 $z'_x=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，$z'_y=0$，即可计算得到曲面面积元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

将 $z=z(x,y)$ 代入锥面方程 $y^2=z^2-x^2$ 中消去 z，就得到曲面 S 的边界在坐标面 xOy 上的投影曲线为

$$y^2=2(a^2-x^2)+2a\sqrt{a^2-x^2}.$$

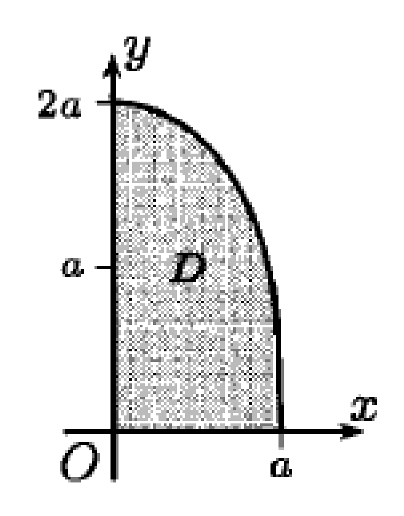
利用对称性，只需在第一象限中的区域 (参见附图)

$$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant y(x)=\sqrt{2(a^2-x^2)+2a\sqrt{a^2-x^2}}\right\}$$

上积分再乘以 4 即可.

以下先将第一型曲面积分转化为二重积分:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S&=4a\iint\limits_D\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=4a^2\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2}}+4a\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$



习题 4342 的附图

将上式右边的两项记为 I_1 和 I_2，先计算 I_1 如下.

$$\begin{aligned}I_1&=4a^2\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2}}=4a^2\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}\mathrm{d}y\\&=4a^2\int_0^a\frac{\sqrt{2(a^2-x^2)+2a\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\ \ (\text{作代换 } x=\sqrt{a^2-t^2})\\&=4\sqrt{2}a^2\int_0^a\frac{\sqrt{t^2+at}}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\mathrm{d}t=4\sqrt{2}a^2\int_0^a t^{\frac{1}{2}}(a-t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\ \ (\text{再作代换 } t=au)\\&=4\sqrt{2}a^3\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=4\sqrt{2}a^3\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=4\sqrt{2}a^3\cdot\frac{1}{2}\pi=2\sqrt{2}\pi a^3.\end{aligned}$$

然后用完全相同的方法可计算得到

$$I_2=\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}a^3.$$

最后即得到 $\displaystyle\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=I_1+I_2=\frac{7\sqrt{2}\pi}{2}a^3$. □

习题 4347 计算第一型曲面积分 $\displaystyle\oiint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{h}$，式中 S 为椭球面，h 为椭球中心到与椭球面微元 $\mathrm{d}S$ 相切的平面的距离.

解 1 设椭球面 S 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 对于 S 上的点 $M(x,y,z)$, 只要将上述方程求全微分得到

$$\frac{x}{a^2}\,\mathrm{d}x+\frac{y}{b^2}\,\mathrm{d}y+\frac{z}{c^2}\,\mathrm{d}z=0,$$

然后将 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 分别换为 $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, 就可整理得到 S 在点 $M(x,y,z)$ 处的切平面方程

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1,$$

其中 (X,Y,Z) 是切平面上的流动点的坐标 (参见 §6.5.2 的习题 3545).

由此切平面方程即可得到椭球中心 (即原点) 到切平面的距离 h 为

$$h=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

利用对称性, 只要计算曲面在第一卦限部分上的积分再乘以 8. 这部分曲面 $z=z(x,y)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}.$$

从方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 计算 $z'_x=-\frac{c^2x}{a^2z}$, $z'_y=-\frac{c^2y}{b^2z}$ 后可得到曲面的积分元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

然后即可用 h 的表达式代入将第一型曲面积分转化为二重积分:

$$\oiint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{h}=8c^2\iint\limits_D\frac{1}{z}\Big(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

为计算右边的二重积分, 可用广义极坐标代换

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

其中变量的范围为 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant r\leqslant 1$, 而 $z=c\sqrt{1-r^2}$. 这时的雅可比行列式等于 abr. 于是得到

$$\begin{aligned}\oiint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{h}&=8abc\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{1-r^2}{c^2}\Big)\,\mathrm{d}\varphi\\&=8abc\Big(\frac{\pi}{4a^2}\int_0^1\frac{r^3\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{\pi}{4b^2}\int_0^1\frac{r^3\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{\pi}{2c^2}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\Big)\\&=8abc\Big(\frac{\pi}{4a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{4b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\\&=8abc\Big(\frac{\pi}{4a^2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4b^2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2c^2}\cdot\frac{1}{3}\Big)\\&=\frac{4\pi abc}{3}\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Big).\quad\square\end{aligned}$$

解 2 为计算第一型曲面积分, 用广义球面坐标将椭球面 S 参数化为

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi.$$

然后求出

$$x'_\varphi = a\cos\varphi\cos\theta,\quad y'_\varphi = b\cos\varphi\sin\theta,\quad z'_\varphi = -c\sin\varphi,$$
$$x'_\theta = -a\sin\varphi\sin\theta,\quad y'_\theta = b\sin\varphi\cos\theta,\quad z'_\theta = 0,$$

计算出

$$E = x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = a^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + b^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + c^2\sin^2\varphi,$$
$$G = x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta = a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + b^2\sin^2\varphi\cos^2\theta,$$
$$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = (b^2-a^2)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta,$$

即可得到曲面的面积元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\ &= \sqrt{a^2b^2\cos^2\varphi + b^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + c^2a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

同时在 S 参数化之后又可从前述的 h 的表达式得到

$$h = \frac{abc\sin\varphi}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

于是可计算得到

$$\begin{aligned}\oiint_S \frac{\mathrm{d}S}{h} &= \frac{1}{abc}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left(a^2b^2\cos^2\varphi + b^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + c^2a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{1}{abc}\Big(2\pi a^2b^2\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + b^2c^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &\qquad + c^2b^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\Big)\\ &= \frac{4\pi}{3abc}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\quad\square\end{aligned}$$

习题 4351 (泊松公式) 证明:

$$\oiint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,)\,\mathrm{d}u,$$

式中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

解 将坐标系 $Oxyz$ 保持原点不动而旋转得到新坐标系 $Ouvw$, 其中将平面 $ax+by+cz=0$ 作为坐标面 vOw, 而 Ou 轴与之垂直. 这时空间中的点 (u,v,w) 的 u 坐标就是该点到平面 $ax+by+cz=0$ 的距离, 因此得到

$$u = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

在新坐标系中的球面 S 的方程为 $u^2+v^2+w^2=1$, 因此就得到

$$\oiint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = \oiint_{u^2+v^2+w^2=1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,)\,\mathrm{d}S.$$

用柱坐标将球面 S 参数化为

$$u=u,\quad v=\sqrt{1-u^2}\cos\varphi,\quad w=\sqrt{1-u^2}\sin\varphi,$$

其中变量的变化范围为 $-1\leqslant u\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, 则有

$$u'_u = 1, \quad v'_u = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\cos\varphi, \quad w'_u = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\sin\varphi$$
$$u'_\varphi = 0, \quad v'_\varphi = -\sqrt{1-u^2}\sin\varphi, \quad w'_\varphi = \sqrt{1-u^2}\cos\varphi,$$

于是得到

$$E = u'^2_u + v'^2_u + w'^2_u = \frac{1}{1-u^2},$$
$$G = u'^2_\varphi + v'^2_\varphi + w'^2_\varphi = 1 - u^2,$$
$$F = u'_u u'_\varphi + v'_u v'_\varphi + w'_u w'_\varphi = 0,$$

这样就求出了面积元为

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}\varphi.$$

从而就得到所要求证的泊松公式:

$$\oiint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = \oiint_{u^2+v^2+w^2=1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}S$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u$$
$$= 2\pi\int_0^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u. \quad \square$$

8.14.2 第一型曲面积分的应用 (习题 4352–4361)

本节主要是第一型曲面积分在力学上的应用, 此外还有含参变量的第一型曲面积分的计算.

习题 4354 求密度为 ρ_0 的均质锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \ (0 \leqslant z \leqslant b)$$

对直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

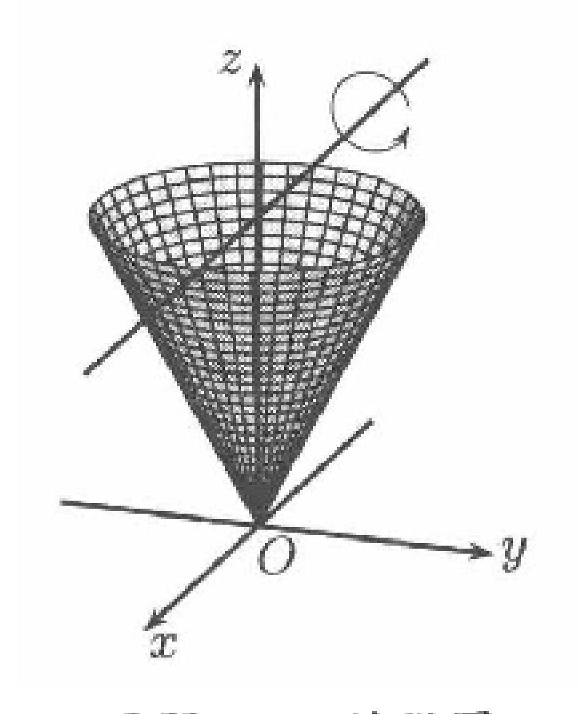
的转动惯量.

解 记题设的曲面为 S. 由于空间中的点 (x,y,z) 到直线 $y=0$, $z=b$ 的距离平方为 $y^2+(z-b)^2$, 因此所求的转动惯量可用积分表示为

$$I = \rho_0 \iint_S [y^2 + (z-b)^2]\,\mathrm{d}S.$$

由 S 的方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ 可求导得到 $z'_x = \frac{b^2x}{a^2z}$, $z'_y = \frac{b^2y}{a^2z}$, 因此可计算得到面积元为

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4z^2}+\frac{b^4y^2}{a^4z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



习题 4351 的附图

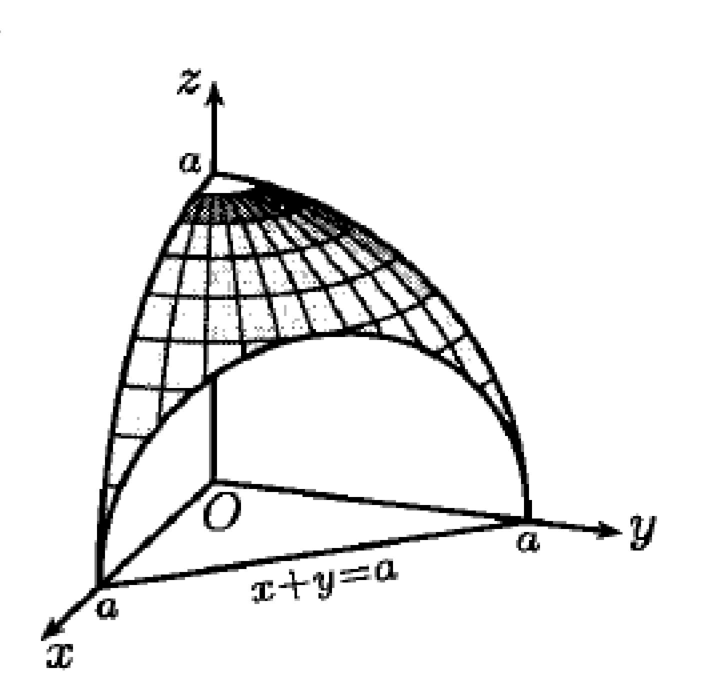
因 S 在坐标面 xOy 上的投影即是圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$, 于是就有

$$I=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}[y^2+(z-b)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

用 $z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ 代入, 并用极坐标代换计算 I, 以下从略. □

习题 4355(b) 求均质曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant a)$ 的质心坐标.

解 不妨设密度常数为 1. 记曲面为 S. 这时的质量 M 在数值上等于曲面 S 的面积. 如附图所示, S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限的部分用平面 $x+y=a$ 截去半个球冠而得到的. 由于球冠的底圆半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 因此其面积与球面坐标中 φ 从 0 到 $\pi/4$ 时所得到的球冠面积相同. 于是即可得到



习题 4355(b) 的附图

$$M=\frac{1}{8}\cdot 4\pi a^2-\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi a^2.$$

将质心坐标记为 (x_c,y_c,z_c), 按照曲面 S 的方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 可计算得到 $\mathrm{d}S=\frac{a}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 于是有:

$$\begin{aligned}
x_c&=\frac{1}{M}\iint\limits_{S}x\,\mathrm{d}S=\frac{1}{M}\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x+y\leqslant a}}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{a}{M}\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{a-y}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{M}\int_0^a\Big(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\Big|_{x=0}^{x=a-y}\Big)\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{a}{M}\Big(\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y-\sqrt{2}\int_0^a\sqrt{ay-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)\\
&=\frac{a}{M}\Big[\frac{1}{4}\pi a^2-\sqrt{2}\int_0^a\sqrt{\Big(\frac{a}{2}\Big)^2-\Big(y-\frac{a}{2}\Big)^2}\,\mathrm{d}y\Big]\\
&=\frac{a}{M}\Big[\frac{1}{4}\pi a^2-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\Big(\frac{a}{2}\Big)^2\Big]=\frac{1}{M}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{8}\pi a^3=\frac{\sqrt{2}a}{4}.
\end{aligned}$$

由对称性有 $x_c=y_c$. 对于 z_c 则有

$$z_c=\frac{1}{M}\iint\limits_{S}z\,\mathrm{d}S=\frac{a}{M}\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x+y\leqslant a}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{M}\frac{a^3}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{\pi}a.\quad\square$$

注 若按照方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 求曲面 S 的面积 (即质量 M), 则可计算如下:

$$\begin{aligned}
M&=\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=a\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x+y\leqslant a}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}=a\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\\
&=a\int_0^a\Big(\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Big|_{y=0}^{y=a-x}\Big)\,\mathrm{d}x=a\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

作代换 $u=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$, 则有 $x=\dfrac{a(1-u^2)}{1+u^2}$, 当 x 从 0 到 a 时, u 从 1 到 0, 于是可计算得到

$$\begin{aligned}M&=a^2\int_1^0\arcsin u\,\mathrm{d}\Big(\frac{1-u^2}{1+u^2}\Big)=a^2\arcsin u\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}\Big|_1^0+a^2\int_0^1\frac{1-u^2}{1+u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\&=a^2\int_0^1\frac{1-u^2}{1+u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\quad(\text{作代换 }u=\sin\theta)\\&=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{(1+\tan^2\theta)(1+2\tan^2\theta)}\quad(\text{作代换 }v=\tan\theta)\\&=a^2\int_0^{+\infty}\Big(\frac{2}{1+2v^2}-\frac{1}{1+v^2}\Big)\,\mathrm{d}v=\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

习题 4359–4361 均为含参变量的第一型曲面积分, 举一个例子.

习题 4359 计算

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

式中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

作出函数 $u=F(t)$ 的图像.

解 为简化计算, 将坐标系 $Oxyz$ 保持原点不动而旋转得到新坐标系 $O\xi\eta\zeta$, 其中将平面 $x+y+z=0$ 作为坐标面 $\eta O\zeta$, 而 $O\xi$ 轴与之垂直. 这时空间中的点 (ξ,η,ζ) 满足 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=x^2+y^2+z^2$, 因此被积函数 f 仍然不变, 而平面 $x+y+z=t$ 变为 $\xi=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$. (这里利用旋转变换下距离不变, 该式右边就是平面 $x+y+z=t$ 与原点的距离.) 由 f 的定义可见, 当 $|t|>\sqrt{3}$ 时 $F(t)=0$, 而当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时可计算如下.

这时 S 是平行于 $\xi=0$ 的平面, 因此即有 $\mathrm{d}S=\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$, 于是得到

$$F(t)=\iint\limits_{\xi=t/\sqrt{3}}f(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\eta^2+\zeta^2\leqslant 1-t^2/3}\Big(1-\frac{t^2}{3}-\eta^2-\zeta^2\Big)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta.$$

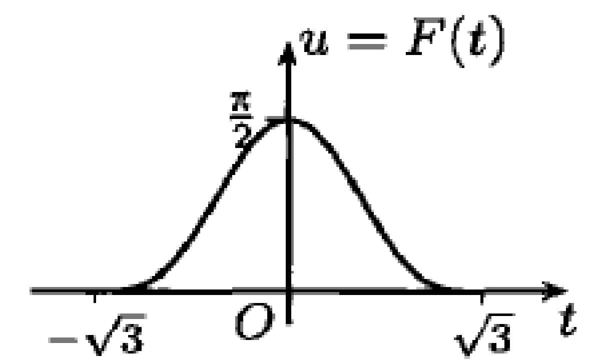
用极坐标代换 $\eta=r\cos\theta,\zeta=r\sin\theta$, 则得到

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-t^2/3}}r\Big(1-\frac{t^2}{3}-r^2\Big)\,\mathrm{d}r\\&=2\pi\Big[\Big(1-\frac{t^2}{3}\Big)\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big]\Big|_0^{\sqrt{1-t^2/3}}=\frac{\pi}{2}\Big(1-\frac{t^2}{3}\Big)^2.\end{aligned}$$

综合以上就得到

$$u=F(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\Big(1-\dfrac{t^2}{3}\Big)^2, & |t|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |t|>\sqrt{3},\end{cases}$$

并在右边的附图中作出其图像. □



习题 4359 的附图

8.14.3 第二型曲面积分 (习题 4362–4366)

第二型曲面积分的定义和计算都比第一型曲面积分复杂. 从定义来看, 与曲线总有两个方向的情况不同, 曲面有单侧和双侧两种, 而第二型曲面积分只考虑在双侧曲面上的积分. 其次, 与第二型曲线积分类似, 在给出积分时必须说清楚在哪一侧上积分.

对于封闭曲面上的第二型曲面积分, 一般将曲面的外侧称为正侧.

第二型曲面积分有多种形式, 较常见的形式之一是

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

若引入向量记号 $\boldsymbol{f} = (P, Q, R)$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, 则在第二型曲面积分的定义中知道有 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 是双侧曲面的指定一侧的单位法向量. 于是就有

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S.} \tag{8.17}$$

注意上式右边为第一型曲面积分, 因此公式 (8.17) 已经建立了将第二型曲面积分转化为第一型曲面积分的计算方法.

若指定一侧的 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则公式 (8.17) 变成

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.} \tag{8.18}$$

以下给出从第二型曲面积分到二重积分的转化公式.

对于由双参数给出的光滑曲面或分片光滑曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in D_{uv}$, 由公式 (8.17) 的右边即可转化得到

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm\iint_{D_{uv}} \left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.} \tag{8.19}$$

其中右边的积分号前的正负号由曲面的指定侧来决定.

若曲面方程为 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, 则 (8.19) 成为

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm\iint_{D_{xy}} \big(-Pz'_x - Qz'_y + R\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \tag{8.20}$$

其中右边积分号前当曲面取上侧时为正, 取下侧时为负.

对于用直角坐标变量表示的曲面, 还有一种更简便的方法, 但要分三种情况处理.

(i) 当曲面为 $S: x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 时,

$$\boxed{I = \iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,} \tag{8.21}$$

其中当 S 取前侧时右边取“+”号, 当 S 取后侧时右边取“−”号. 这里前侧指余弦 $\cos\alpha > 0$, 后侧指 $\cos\alpha < 0$.

(ii) 当曲面为 $S: y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 时,

$$\boxed{I = \iint\limits_{S} Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,} \tag{8.22}$$

其中当 S 取右侧时右边取"+"号, 当 S 取左侧时右边取"−"号. 这里右侧指余弦 $\cos\beta > 0$, 左侧指 $\cos\beta < 0$.

(iii) 当曲面为 $S: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 时, 有

$$\boxed{I = \iint\limits_{S} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,} \tag{8.23}$$

其中当 S 取上侧时右边取"+"号, 当 S 取下侧时右边取"−"号. 这里上侧指余弦 $\cos\gamma > 0$, 下侧指 $\cos\gamma < 0$.

注意以上的三个公式的左边为第二型曲面积分, 右边为二重积分. 它们都比较简单, 但也有缺点. 这就是对于 P, Q, R 要分别处理, 而且具体问题中的曲面往往可能要分成若干片后才能用这些公式.

习题 4362 计算第二型曲面积分 $\displaystyle\oiint\limits_{S} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解 1 这时球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧的单位法向量为 $\left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{a}, \dfrac{z}{a}\right)$, 因此即可用公式 (8.18) 将第二型曲面积分转化为第一型曲面积分如下:

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{S} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{a}\oiint\limits_{S}(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S \\ &= a\oiint\limits_{S}\mathrm{d}S = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3,\end{aligned}$$

其中利用了被积函数恒等于 1 的第一型曲面积分即是曲面的面积, 而半径为 a 的球面面积等于 $4\pi a^2$. □

解 2 利用对称性, 只要计算三个积分之一再乘以 3. 由于对曲面的 $z = z(x, y)$ 形式较为熟悉, 以下用公式 (8.23) 计算第三个积分. 这时要将球面分成两个半球面 $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 其中取正号的为上半球面取上侧, 取负号的为下半球面取下侧, 因此得到

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \text{(用极坐标代换)} \\ &= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi \cdot \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\right] = \frac{4\pi}{3}a^3.\end{aligned}$$

于是本题的答案为 $4\pi a^3$. □

解 3 利用 §8.16 中的奥斯特罗格拉茨基公式, 将 S 所围的球体记为 V, 就有

$$\oiint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= 3\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\cdot\frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3,$$

其中利用了被积函数恒等于 1 的三重积分等于积分区域的体积, 而半径为 a 的球体体积等于 $\frac{4\pi a^3}{3}$. □

习题 4363 计算第二型曲面积分 $\oiint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 $f(x), g(y), h(z)$ 为连续函数, S 为平行六面体 $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$ 的外侧.

解 1 记 S 的外侧面的单位法向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则即可用公式 (8.18) 转化为第一型曲面积分如下:

$$\oiint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oiint_S [f(x)\cos\alpha + g(y)\cos\beta + h(z)\cos\gamma]\,\mathrm{d}S.$$

对右边被积函数的第一项的积分, 由于在侧面 $x=0$ 时 $\cos\alpha = -1$, $x = a$ 时 $\cos\alpha = 1$, 而在其他四个侧面上都有 $\cos\alpha = 0$, 因此就可将上述第一型曲面积分转化为二重积分

$$\oiint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\oiint_{x=0,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \oiint_{x=a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= [-f(0) + f(a)]bc.$$

对于其他两项的计算是类似的. 最后得到所要求的积分

$$I = [f(a) - f(0)]bc + [g(b) - g(0)]ca + [h(c) - h(0)]ab. \quad □$$

解 2 用公式 (8.21) 于第一项的积分, 则只有 $x = 0$, $x = a$ 两个侧面上的积分需要计算. 根据前侧 $x = a$ 取正后侧 $x = 0$ 取负的符号规则, 就得到与解 1 相同的结果:

$$\oiint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\oiint_{x=0,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \oiint_{x=a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= [-f(0) + f(a)]bc.$$

以下从略. □

解 3 若对函数 $f(x), g(y), h(z)$ 的条件加强为连续可微, 则可以用奥斯特罗格拉茨基公式得到

$$\oiint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V [f'(x) + g'(y) + h'(z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 V 为 S 所围的平行六面体.

不妨只看被积函数的第一项的积分, 则有

$$\iiint_V f'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^a f'(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^c \mathrm{d}z = [f(a) - f(0)]bc.$$

其余两项也可类似处理. 可见在加强条件之后得到了相同的结论. □

习题 4364 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 S 是圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧.

解 1 将 S 的方程写为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\leqslant h^2)$, 用公式 (8.20), 这时锥面外侧即是 S 的下侧. 记积分为 I, 有 $z'_x=\dfrac{x}{z}$, $z'_y=\dfrac{y}{z}$, 因此就有

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}[(y-z)z'_x+(z-x)z'_y-(x-y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\frac{1}{z}[(y-z)x+(z-x)y-(x-y)z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}2(y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

这里最后一步是利用被积函数 y 和 x 关于积分区域 $x^2+y^2\leqslant h^2$ 分别为奇函数, 而且积分区域关于 x 和 y 又对称, 因此积分等于 0. □

解 2 题设的锥面不是封闭的, 但可以加一个盖子成为封闭曲面, 然后即可用奥斯特罗格拉茨基公式.

设 S_1 为 $x^2+y^2\leqslant h^2$, $z=h$, 取上侧. 于是 $S\cup S_1$ 就成为封闭曲面, 对于所围的立体 V 为外侧, 因此就有

$$\begin{aligned}&\oint\!\!\!\!\oint\limits_{S\cup S_1}(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\Big(\iint\limits_S+\iint\limits_{S_1}\Big)(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_V\Big[\frac{\partial}{\partial x}(y-z)+\frac{\partial}{\partial y}(z-x)+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0.\end{aligned}$$

下面将证明在 S_1 上的积分等于 0, 从而就知道在 S 上的积分也等于 0.

在 S_1 的上侧, 由于 $z=h$, 因此积分元为 $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ 的第二型曲面积分均为 0, 从而就得到

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_1}(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint\limits_{S_1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

最后一个二重积分等于 0 与解 1 最后的说明相同. □

习题 4365 计算第二型曲面积分 $\oint\!\!\!\!\oint\limits_S\dfrac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x}+\dfrac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}$, 式中 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

解 1 (概要) 用直角坐标变量的转化公式 (8.20), 或者分别用转化公式 (8.21)–(8.23) 都可以. □

解 2　记所求积分为 I, 从椭球面方程求出单位外法向量 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的表达式为

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right),$$

于是可用公式 (8.18) 将所求积分转化为第一型曲面积分

$$I = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\oiint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

由于在椭球面 S 上有

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

因此可以倒用公式 (8.18) 得到第二型曲面积分并接着再用奥斯特罗格拉茨基公式得到

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint\limits_V 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot 4\pi abc, \end{aligned}$$

其中 V 是 S 所围的椭球体, 其体积为 $\dfrac{4\pi abc}{3}$. □

习题 4366 计算第二型曲面积分 $\oiint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解 1 (概要)　用直角坐标变量的转化公式 (8.20), 或者分别用转化公式 (8.21)–(8.23) 都可以. □

解 2　记积分为 I, 球面 S 所围的球体为 V, 用奥斯特罗格拉茨基公式可计算如下:

$$\begin{aligned} I &= 2\iiint\limits_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 2\iiint\limits_V [(x-a)+(y-b)+(z-c)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2(a+b+c)\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

这时在最后一式的第一个积分中, 由于 $x-a$, $y-b$, $z-c$ 在区域 V 中分别为奇函数, 而且 V 关于点 (a,b,c) 为中心对称, 因此积分值等于 0, 于是即可得到

$$I = \frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3.\quad \square$$

§8.15 斯托克斯公式 (习题 4367–4375)

内容简介 斯托克斯公式建立了第二型曲线积分与曲面积分之间的联系, 本节为这方面的基本练习题与应用.

下面先列出斯托克斯公式的两种形式:

第一种形式建立了第二型曲线积分与第二型曲面积分之间的联系:

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$
$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{8.24}$$

其中 C 的取向与 S 的取侧相容, 也就是满足右手法则. 为便于记忆, 可用行列式记号将公式 (8.24) 写成为

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

斯托克斯公式的第二种形式建立了第二型曲线积分与第一型曲面积分之间的联系, 它可用行列式记号写出为

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S, \tag{8.25}$$

其中曲线 C 的取向与曲面 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的取向相容, 即满足右手法则.

由 §8.14.3 的公式 (8.18) 即可知道公式 (8.24) 与 (8.25) 的右边相等.

斯托克斯公式是格林公式的推广. 这可以从公式 (8.24) 直接看出. 若 P,Q 与变量 z 无关, $R\equiv 0$, 曲面 S 为坐标面 xOy 上的区域, 取上侧, 从而 $C=\partial S$ 为坐标面 xOy 上取正向的平面曲线, 则就得到格林公式

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

习题 4367 应用斯托克斯公式, 计算曲线积分

$$\oint_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, 并且从 Ox 轴的正向看去, C 的取向为逆时针方向. 用直接计算法检验结果.

解 1 记 S 为平面 $x+y+z=0$ 上为圆周 C 所包围的圆, 则与题设中 C 的取向相容的 S 的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1),$$

于是从斯托克斯公式 (8.25) 就得到

$$\oint_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{3}}{3}\iint_S \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= -\sqrt{3}\iint_S \mathrm{d}S = -\sqrt{3}\pi a^2,$$

其中利用了 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的大圆, 因此半径为 a, 所包围的圆面积为 πa^2. □

解 2　本题的曲线积分也可以不用斯托克斯公式而直接计算. 先将 C 参数化如下:

$$x = -a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right),\quad y = \frac{2a}{\sqrt{6}}\cos t,\quad z = a\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right),$$

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, 就能同时满足 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x+y+z=0$ 及其取向的要求①.

记所求积分为 I, 则从对称性就有

$$I = 3\oint_C y\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{6}a^2\int_0^{2\pi}\cos t\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathrm{d}t = -\sqrt{3}\pi a^2. \quad □$$

解 3　直接计算的另一种方法是除了利用对称性之外, 再将 C 向坐标面 xOy 投影得到封闭曲线 C', 于是就有

$$I = 3\oint_C y\,\mathrm{d}x = 3\oint_{C'} y\,\mathrm{d}x.$$

由 §8.12.2 的公式 (8.10) 可见上式右边等于曲线 C' 所围区域的面积的三倍乘以 -1.

曲线 C' 显然是一个椭圆, 它的方程可从 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 消去 z 得到

$$x^2+y^2+xy = \frac{a^2}{2}.$$

利用 §4.5 的习题 2406, 即可求出 C' 所围椭圆区域的面积为 $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$, 因此就得到 $I = -3\cdot\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}\pi a^2$. □

习题 4368　计算积分

$$\oint_{AmB}(x^2-yz)\,\mathrm{d}x + (y^2-zx)\,\mathrm{d}y + (z^2-xy)\,\mathrm{d}z,$$

此积分是从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 沿着螺旋线 $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$ 进行的.

---

① 将 C 参数化的方法很多. 这里的做法是先从 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ 消去 x, 得到 $y^2+z^2+yz=\dfrac{a^2}{2}$, 然后将左边配方得到 (参见 §4.5 的习题 2406 的解 7):

$$\left(z+\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

最后令 $y=\dfrac{2a}{\sqrt{6}}\cos t$, $z+\dfrac{y}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t$, 并由此得到 $x=x(t)$. 可以验证当 t 从 0 到 2π 时, 从 Ox 轴的正向看去, 点 $(y(t),z(t))$ 在坐标面 yOz 上以逆时针方向描出一个椭圆.

提示 这里可以添加直线段 AB, 得到封闭曲线 $AmBA$, 然后设 S 为该曲线张成的曲面, 用斯托克斯公式即可. (这种方法在格林公式的应用中已用过, 见 §8.12.1 的习题 4303.) □

习题 4369 设 C 为平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为平面之法线的方向余弦) 上的封闭围线, 所围面积为 S, 求

$$\oint_C \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

积分沿围线的正方向进行.

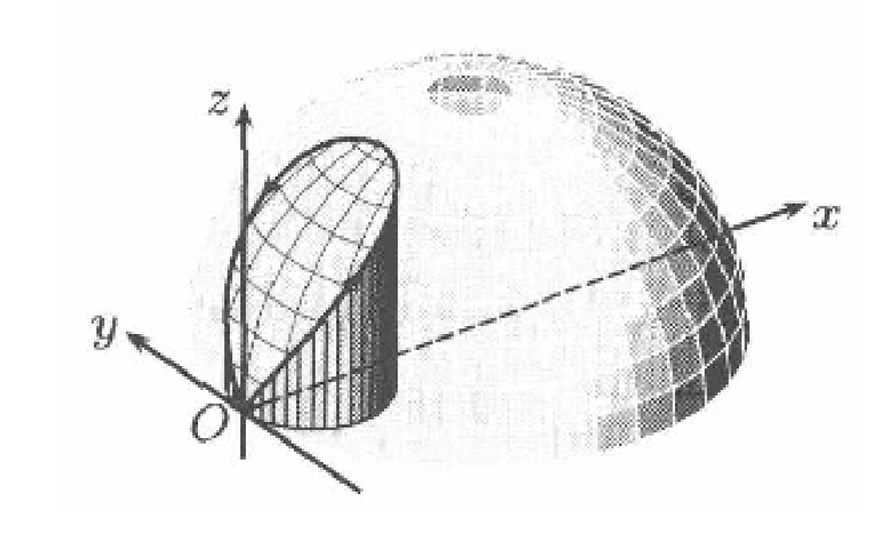
解 (概要) 将所给的积分中的被积表达式写为 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$, 然后用斯托克斯公式. □

注 所得结果为 $2S$, 联系到 §8.12.2 中用格林公式求平面图形面积的公式 (8.10), 可看出本题是该公式的推广.

习题 4372 用斯托克斯公式计算积分 $\oint_C (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 是曲线 $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$, $x^2+y^2 = 2rx$ $(0 < r < R,\ z > 0)$, 并且在沿此曲线进行积分时, 球面 $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$ 外侧被该曲线所围的最小区域始终位于左边.

解 1 如附图所示, 曲线 C 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2rx$ 的交线 (在 $2r = R$ 时就是维维亚尼体的曲顶的边界曲线). C 的方向是由它所围的球面部分 S 取外侧而确定的. 由球面方程求出单位外法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x-R}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right).$$



习题 4372 的附图

记所求积分为 I, 即可用斯托克斯公式 (8.25) 得到

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{x-R}{R} & \dfrac{y}{R} & \dfrac{z}{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= \frac{2}{R}\iint_S [(y-z)(x-R) + (z-x)y + (x-y)z]\,\mathrm{d}S = 2\iint_S (z-y)\,\mathrm{d}S.$$

利用曲面 S 关于坐标面 xOz 对称, 因此有 $\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S = 0$. 由于 $\cos\gamma = \frac{z}{R}$, $\cos\gamma\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 而曲面 S 对于变量 x, y 为上侧, 这样就可得到

$$I = 2\iint_S z\,\mathrm{d}S = 2R\iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2R\iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi r^2 R. \quad \square$$

解 2　不用斯托克斯公式也可以直接计算第二型曲线积分. 利用曲线 C 在坐标面 xOy 上的投影为圆周 $x^2+y^2=2rx$, 即可参数化为

$$x=r(1+\cos\varphi),\quad y=r\sin\varphi,\quad z=\sqrt{2(R-r)r(1+\cos\varphi)},$$

参数 φ 从 0 递增到 2π 与题设的曲线取向一致. 由对称性可见本题的积分中与积分元 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}z$ 有关的项的积分均为 0[①], 因此就有

$$\begin{aligned}I&=\oint_C(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}[2(R-r)r(1+\cos\varphi)+r^2(1+\cos\varphi)^2]r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=2(R-r)r^2\pi+2r^3\pi=2\pi Rr^2.\quad\square\end{aligned}$$

解 3　用投影法计算也是方便的. 将有向曲线 C 在坐标面 xOy 上的投影曲线记为 $C_{xy}:x^2+y^2=2rx$, 取正向, 于是有

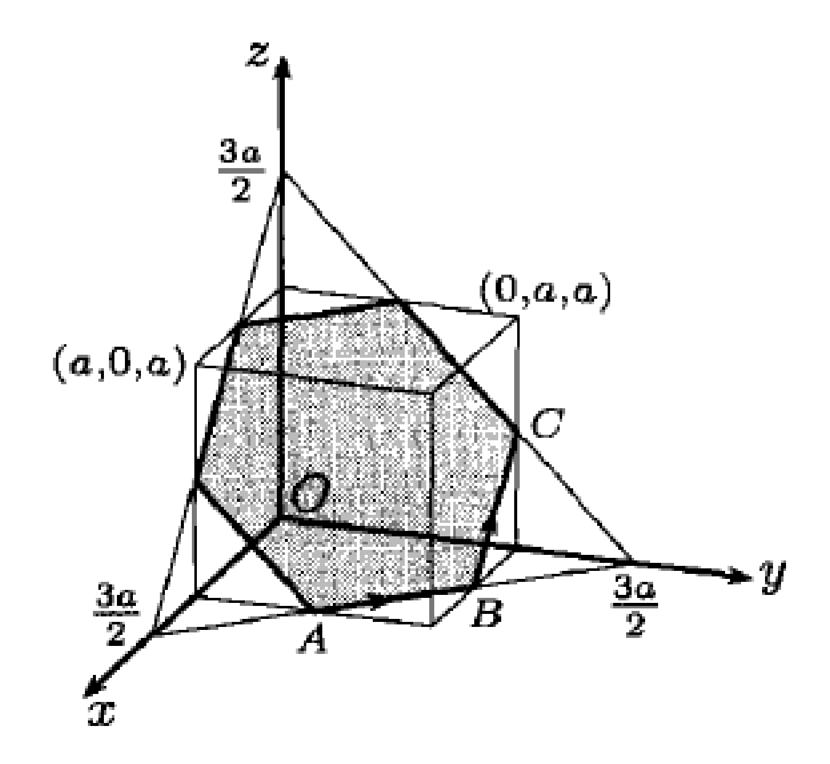
$$\begin{aligned}I&=\oint_{C_{xy}}(2Rx-x^2)\,\mathrm{d}x+(2Rx-y^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,(z'_x\,\mathrm{d}x+z'_y\,\mathrm{d}y)\\&=\oint_{C_{xy}}[2Rx-x^2+(x^2+y^2)z'_x]\,\mathrm{d}x+[2Rx-y^2+(x^2+y^2)z'_y]\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对上式的最后一个积分用格林公式就得到

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2rx}2R\Big(1-\frac{y}{z}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2R\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi r^2R.\quad\square$$

习题 4373　应用斯托克斯公式计算积分 $\oint_C(y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为用平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ 截立方体 $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant a$ 所得截面的边界, 并且若从 Ox 轴的正向看去, 积分是沿 C 依逆时针方向进行的.

解 1　如附图所示, C 是平面 $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ 上的一个正六边形的边界. 将该正六边形记为 S, 根据题设关于 C 的取向, 可知 S 的取侧方向的单位法向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 记积分为 I, 根据斯托克斯公式就有



习题 4373 的附图

$$\begin{aligned}I&=\iint_S\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\y^2-z^2&z^2-x^2&x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S\\&=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S(x+y+z)\,\mathrm{d}S=-2\sqrt{3}a|S|,\end{aligned}$$

其中 $|S|$ 为正六边形 S 的面积. 由于该正六边形的边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, 因此就有

$$I=-2\sqrt{3}a\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2}{2}=-\frac{9}{2}a^3.\quad\square$$

---

① 这来自于第二型曲线积分的定义, 对于解 1 和解 3 也适用.

解 2 直接计算可如下进行. 利用对称性, 只需要计算附图所示的带有方向的直线段 AB 和 BC 上的积分之和再乘以 3. 于是有

$$I = 3\Big(\int_{AB} + \int_{BC}\Big)(y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z$$
$$= 3\int_{AB} y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y + 3\int_{BC}(a^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - a^2)\,\mathrm{d}z.$$

将直线段 AB 参数化为 $x = \dfrac{3a}{2} - y$ $(\frac{a}{2} \leqslant y \leqslant a)$, 将直线段 BC 参数化为 $x = \dfrac{a}{2} - z$ $(0 \leqslant z \leqslant \frac{a}{2})$, 则有

$$I = 3\int_{\frac{a}{2}}^{a}\Big[-y^2 - \Big(\frac{3a}{2} - y\Big)^2\Big]\mathrm{d}y + 3\int_0^{\frac{a}{2}}\Big[-(a^2 - z^2) + \Big(\frac{a}{2} - z\Big)^2 - a^2\Big]\mathrm{d}z$$
$$= 3\int_{\frac{a}{2}}^{a}\Big(-2y^2 + 3ay - \frac{9a^2}{4}\Big)\mathrm{d}y + 3\int_0^{\frac{a}{2}}\Big(2z^2 - az - \frac{7a^2}{4}\Big)\mathrm{d}z$$
$$= 3a^3\Big(-\frac{7}{12} - \frac{11}{12}\Big) = -\frac{9}{2}a^3. \quad \square$$

习题 4374 应用斯托克斯公式计算积分 $\oint_C y^2z^2\,\mathrm{d}x + z^2x^2\,\mathrm{d}y + x^2y^2\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为封闭曲线 $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, 并且以参数 t 增加所对应的方向为积分时的正方向.

分析 本题似有误. 取 $a = 1$, 则从所给的参数方程可见有 $y = 2x^2 - 1$, $z = 4x^3 - 3x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 因此 C 不是封闭曲线. 如果参数 t 从 0 递增至 2π, 则点 (x, y, z) 确实从点 (a, a, a) 出发后回到自身, 但这只是“原路返回”, 不可能张成什么曲面, 因此谈不上用斯托克斯公式. 若给定参数 t 的变化范围, 对题设的曲线积分作直接计算是容易的. □

习题 4375 设有函数

$$W(x, y, z) = ki\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S \quad (k = \text{常数}),$$

其中曲面 S 的边界为围线 C, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的法向量, $\boldsymbol{r}$ 为连接空间的点 $M(x, y, z)$ 与围线 C 上的动点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 所成的径向量. 证明: 此函数为通过围线 C 的电流 i 所产生磁场 $\boldsymbol{H}$ 的势 (参阅 §8.13 的习题 4340).

解 在习题 4340 已求出磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的三个分量为

$$H_x = ki\oint_C \frac{(\eta - y)\,\mathrm{d}\zeta - (\zeta - z)\,\mathrm{d}\eta}{r^3},$$
$$H_y = ki\oint_C \frac{(\zeta - z)\,\mathrm{d}\xi - (\xi - x)\,\mathrm{d}\zeta}{r^3},$$
$$H_z = ki\oint_C \frac{(\xi - x)\,\mathrm{d}\eta - (\eta - y)\,\mathrm{d}\xi}{r^3}.$$

本题的目的是要证明①

① 在 §8.11.3 已引入关于平面上的第二型曲线积分的全微分与原函数的概念. 原函数也称为势函数.

$$\mathrm{d}W = H_x\,\mathrm{d}x + H_y\,\mathrm{d}y + H_z\,\mathrm{d}z.$$

这相当于成立三个等式: $\dfrac{\partial W}{\partial x} = H_x$, $\dfrac{\partial W}{\partial y} = H_y$ 和 $\dfrac{\partial W}{\partial z} = H_z$. 利用对称性, 只需要先看第一式如何证明.

记 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位向量为

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \left(\frac{\xi - x}{r}, \frac{\eta - y}{r}, \frac{\zeta - z}{r},\right)$$

因此就可将 $W(x,y,z)$ 写为

$$W(x,y,z) = ki\iint\limits_S \left(\frac{\xi - x}{r^3}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r^3}\cos\beta + \frac{\zeta - z}{r^3}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S.$$

函数 $W(x,y,z)$ 对参变量 x,y,z 的求导可以通过积分号进行, 即有

$$\frac{\partial W}{\partial x} = ki\iint\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi - x}{r^3}\right)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta - y}{r^3}\right)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta - z}{r^3}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S.$$

对 H_x 的第二型曲线积分的表达式用斯托克斯公式, 即得到

$$H_x = ki\oint_C \frac{(\eta - y)\,\mathrm{d}\zeta - (\zeta - z)\,\mathrm{d}\eta}{r^3} = ki\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\zeta} \\ 0 & -\dfrac{\zeta - z}{r^3} & \dfrac{\eta - y}{r^3} \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$= ki\iint\limits_S \left\{\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta - y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta - z}{r^3}\right)\right]\cos\alpha - \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\eta - y}{r^3}\right)\right]\cos\beta - \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\zeta - z}{r^3}\right)\right]\cos\gamma\right\}\mathrm{d}S.$$

注意到 $\dfrac{1}{r} = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{-\frac{1}{2}}$ 满足关于 ξ, η, ζ 的拉普拉斯方程, 即有 $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$ (参见 §6.2.4 的习题 3311), 而这就是

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi - x}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta - y}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta - z}{r^3}\right) = 0,\end{aligned}$$

于是就得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi - x}{r^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi - x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta - y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta - z}{r^3}\right).$$

又可以看出有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta - y}{r^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\eta - y}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta - z}{r^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\zeta - z}{r^3}\right),$$

这样就得到了 $\dfrac{\partial W}{\partial x} = H_x$. 同样可以得到 $\dfrac{\partial W}{\partial y} = H_y$ 和 $\dfrac{\partial W}{\partial z} = H_z$. □

§8.16 奥斯特罗格拉茨基公式 (习题 4376–4400)

内容简介 奥斯特罗格拉茨基公式建立了曲面积分与三重积分之间的联系, 是计算第二型曲面积分和物体体积的有效工具. 本节为这方面的基本练习题与应用.

奥斯特罗格拉茨基公式在英美等文献中一般称为高斯公式, 在 [11, 33] 中称为高斯–奥斯特罗格拉茨基公式, 在我国的部分教科书中简称为奥–高公式.

下面先列出奥斯特罗格拉茨基公式的两种形式:

第一种形式建立了第二型曲面积分与三重积分之间的联系:

$$\oiint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_V\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{8.26}$$

其中 $S=\partial V$, 取外侧.

奥斯特罗格拉茨基公式的第二种形式建立了第一型曲面积分与三重积分之间的联系:

$$\oiint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{8.27}$$

其中的方向余弦是曲面 S 的单位外法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的各个分量.

习题 4378 应用奥斯特罗格拉茨基公式变换曲面积分

$$\oiint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}S.$$

解 计算得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)\\&=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac32}}+\frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac32}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac32}}\\&=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned}$$

由于被积函数有奇点 $O(0,0,0)$, 因此在该点位于封闭曲面 S 之外的条件下, 可用公式 (8.27) 得到

$$\oiint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}S=2\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\quad\square$$

习题 4380 应用奥斯特罗格拉茨基公式变换曲面积分

$$\oiint\limits_S \Big[\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big]\,\mathrm{d}S.$$

解 计算得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)=0,$$

可见从公式 (8.27) 得到

$$\oiint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$
$$=\iiint_V 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0.\quad\square$$

注 学过场论之后可以知道, 本题的结论表明, 由于旋度场必定是无源场, 因此经过封闭曲面的通量必定等于 0.

习题 4381 证明: 若 S 为封闭的简单曲面而 $\boldsymbol{l}$ 为任意的固定方向, 则

$$\oiint_S \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,\mathrm{d}S=0,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量.

提示 本题是 §8.12.3 的习题 4323 在空间的推广, 也有相同的物理意义. □

习题 4382 证明: 以曲面 S 为边界的物体的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\oiint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

注 直接用公式 (8.27) 即得. 类似地还有求体积的其他几个公式:

$$V=\frac{1}{3}\oiint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\oiint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_S y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z=\oiint_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

若其中最后一式的 S 所围的立体是具有曲顶 $z(x,y)$ ($(x,y)\in D_{xy}$ 的曲顶柱体, 则就可导出 §8.3 中用二重积分求体积的公式

$$V=\iint_{D_{xy}} z(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

习题 4383 证明: 以光滑曲面 $F(x,y,z)=0$ 和平面 $Ax+By+Cz=0$ 为界的锥体的体积等于

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

式中 S 为位于该平面的锥底之面积, H 为锥体的高.

解 设锥体的顶点为 (x_0,y_0,z_0), 将锥体的侧面记为 S_1, 底面记为 S_2, 于是锥体的边界为 $S_1\cup S_2$, 并假设取外侧. 由习题 4382 知道有

$$V = \frac{1}{3} \oiint\limits_{S_1 \cup S_2} \left[(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma \right] \mathrm{d}S$$
$$= \frac{1}{3} \iint\limits_{S_1} \left[(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma \right] \mathrm{d}S$$
$$+ \frac{1}{3} \iint\limits_{S_2} \left[(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma \right] \mathrm{d}S.$$

以下分别计算最后一式的两个积分.

在锥体的侧面 S_1 上, 由于 $t \geqslant 0$ 时满足方程

$$F(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)) = 0,$$

对 t 求导并令 $t = 1$ 代入, 就得到

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0.$$

由于曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的法线方向即是 (F'_x, F'_y, F'_z) (见 §6.5.2 之 (2)), 因此在侧面 S_1 上的积分中被积函数恒等于 0, 即知积分等于 0.

在锥体底面 S_2 上, 方向余弦由平面方程 $Ax + By + Cz = D$ 确定. 由于 S_2 的取侧指向与顶点 (x_0, y_0, z_0) 相反的方向, 因此被积表达式就是顶点到该平面的距离, 也就是锥体的高 H. 由于锥体底面 S_2 的面积为 S, 这样就得到所要求证的公式

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{S_2} \left[(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma \right] \mathrm{d}S$$
$$= \frac{1}{3} H \iint\limits_{S_2} \mathrm{d}S = \frac{1}{3} HS. \quad \square$$

习题 4384 求以曲面 $z = \pm c$ 及

$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v + b\sin u \sin v, \\ y = a\cos u \sin v - b\sin u \cos v, \\ z = c\sin u \end{cases}$$

为界的物体的体积.

解 按照惯例, 取 $c > 0$. 对于 $z \in [-c, c]$, 有

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u$$
$$= a^2 + \frac{b^2 - a^2}{c^2} z^2,$$

因此本题可通过对截面面积求积分的体积计算方法 (见 §4.7.1) 简单地求出答案为

$$V = \pi \int_{-c}^{c} \left(a^2 + \frac{b^2 - a^2}{c^2} z^2 \right) \mathrm{d}z$$
$$= 2\pi a^2 c + 2\pi \frac{b^2 - a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{3} c^3$$
$$= \frac{2\pi c}{3} (b^2 + 2a^2). \quad \square$$

习题 4385.1 求以曲面 $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = -u + a\cos v\ (u \geqslant 0, a > 0)$ 及平面 $x = 0, z = 0$ 为边界的物体的体积.

提示 将 u, v 看成为坐标面 xOy 上的极坐标变量, 用柱面坐标 u, v, z 来观察曲面. 从曲面与 $z = 0$ 的交线为 $u = a\cos v$, 可见从 $u \geqslant 0$ 可确定 v 的变化范围 $|v| \leqslant \frac{\pi}{2}$. 然后又可确定 u 的变化范围为 $0 \leqslant u \leqslant a\cos v$. 这样就可直接通过对于 u, v 的二重积分求出所要物体的体积. 条件 $x = 0$ 似不起作用. □

习题 4385.2 求环面

$$\begin{cases} x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \qquad (0 < a \leqslant b) \\ z = a\sin\psi \end{cases}$$

所围区域的体积.

解 这是环面的双参数方程, 在 §8.4.1 的习题 2404 已经用它来计算环面的面积.

根据习题 4382, 现在可以用曲面积分来计算曲面所围的体积. 利用 §8.14.1 的公式 (8.19), 即双参数表示的曲面积分计算公式, 可以计算如下.

记双参数的变化范围 $D_{\psi\varphi} = \{(\psi, \varphi) \mid 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, 环面为 S, 则有

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{3}\left|\iint\limits_{D_{\psi\varphi}} \left(x\frac{\partial(y,z)}{\partial(\psi,\varphi)} + y\frac{\partial(z,x)}{\partial(\psi,\varphi)} + z\frac{\partial(x,y)}{\partial(\psi,\varphi)}\right)\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi\right| \\ &= \frac{1}{3}\left|\iint\limits_{D_{\psi\varphi}} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x'_\psi & y'_\psi & z'_\psi \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix}\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi\right| \\ &= \frac{a}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}[ab + (a^2 + b^2)\cos\psi + ab\cos^2\psi]\,\mathrm{d}\psi \\ &= 2\pi^2 a^2 b. \quad \square \end{aligned}$$

注 在 §4.7.3 的习题 2477 中已经举出了圆环体积的 4 种计算方法.

习题 4390 计算

$$\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

式中 S 为部分圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2\ (0 \leqslant z \leqslant h)$, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

提示 S 不是封闭曲面, 但可以采取添加一个“盖子”的方法构成封闭曲面, 然后用奥斯特罗格拉茨基公式. 在 §8.14.3 的习题 4364 的解 2 中已经用过这样的方法. □

习题 4391 证明公式:

$$\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{r} = \frac{1}{2}\oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S,$$

其中封闭曲面 S 为区域 V 的表面, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 处的外法向量, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, $\boldsymbol{r}$ 为从点 (x,y,z) 到点 (ξ,η,ζ) 的径向量.

解　不妨取 $\boldsymbol{n}$ 为单位向量, 记 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则有

$$\oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S = \oiint\limits_S \left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S.$$

若点 (x,y,z) 在封闭曲面 S 之外, 则可对上述积分用奥斯特罗格拉茨基公式, 得到

$$\begin{aligned}\oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S &= \iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \iiint\limits_V \left\{\frac{3}{r}-\frac{1}{r^3}[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]\right\}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= 2\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{r}.\end{aligned}$$

若点 (x,y,z) 在封闭曲面之内部, 则上述三重积分的被积函数 $\dfrac{1}{r}$ 以点 (x,y,z) 为奇点, 即为广义三重积分. 这时不能直接用奥斯特罗格拉茨基公式, 而需要采取挖洞的方法. 这在格林公式的应用中已见过多次 (例如见于 §8.12.1 的习题 4307).

取 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得以点 (x,y,z) 为中心以 ε 为半径的球面完全处于封闭曲面 S 之内. 将此球面的内侧记为 S_ε.

将区域 V 挖去球面 S_ε 所包围的小球体 V_ε, 则所余的区域 $V-V_\varepsilon$ 以 $S\cup S_\varepsilon$ 为边界, 而 S 取外侧和 S_ε 取内侧相对于区域 $V-V_\varepsilon$ 都是外侧. 这样就可以用奥斯特罗格拉茨基公式得到

$$2\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{r} = \oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S + \oiint\limits_{S_\varepsilon} \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S.$$

由于上式的第二个积分中的 $\boldsymbol{r}$ 与 S_ε 的内法线方向恰好相反, 因此在 S_ε 上处处有 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=-1$, 从而该积分值等于 $-4\pi\varepsilon^2$.

在等式

$$2\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{r} = \oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S - 4\pi\varepsilon^2$$

的两边令 $\varepsilon\to 0$, 就证明了当点 (x,y,z) 为 S 所包围时, 题中提出的等式仍然成立.

对于点 $(x,y,z)\in S$ 的情况, 可参见 §8.13 的习题 4329 及其附图, 从略. □

习题 4392 (高斯积分) 计算积分

$$I(x,y,z)=\oiint\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S,$$

式中 S 为简单封闭光滑曲面, 它是区域 V 的边界, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 处的外法向量, $\boldsymbol{r}$ 为连接点 (x,y,z) 和点 (ξ,η,ζ) 的径向量,

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

研究两种情况:

(a) 曲面 S 不包围点 (x,y,z); (b) 曲面 S 包围点 (x,y,z).

解 (概要) 这时的曲面积分的被积函数与 §8.15 的习题 4375 相同 (不过那里不是在封闭曲面上积分). 利用 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$, 在情况 (a) 时直接用奥斯特罗格拉茨基公式就得到被积函数恒等于 0 的三重积分, 从而知道 $I(x,y,z)=0$. 而在情况 (b) 时可以用上题中的挖洞方法, 将 $I(x,y,z)$ 的计算归结为以 (x,y,z) 为中心, 以 $\varepsilon>0$ 为半径的球面外侧上的积分, 即得到 $I(x,y,z)=4\pi$. □

注 本题与 §8.13 的习题 4329 相似, 具有明显的几何意义. 为此首先回顾在 §8.4.2 的习题 4050 中引入的立体角概念, 其中在命题 8.4 中已经给出了度量立体角的公式 (8.7), 其中的积分就是本题的曲面积分, 只是那里的 S 不必是封闭的. 由此容易理解本题的 $I(x,y,z)$ 就是自点 (x,y,z) 看封闭曲面 S 的立体角度量, 从而对在两种情况时的不同答案可作出几何解释. 本题可参看 [11] 第三卷的 653 小节, 其中还指出, 当点 $(x,y,z)\in S$ 时, 若 S 于该点处光滑, 则 $I(x,y,z)=2\pi$.

习题 4393 证明: 若

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2},$$

有界区域 V 的边界 S 为光滑曲面, 则成立下列公式:

(a) $\displaystyle\oiint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$

(b) $\displaystyle\oiint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iiint\limits_V u\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

式中 u 及其一阶和二阶偏导数是在区域 $V+S$ 上连续的函数, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导数.

解 这两个公式都是三维空间的格林第一恒等式 (也成为格林第一公式) 的特例 (参见 §8.13 的习题 4332), 因此不妨先证明这个恒等式.

格林第一恒等式 设 v 具有与 u 相同的光滑性条件, 则就成立

$$\oiint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iiint\limits_V v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{8.28}$$

证明是简单的. 只要将左边积分号下的 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 写出为梯度向量 $\operatorname{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ 与单位外法向量 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的标量积, 然后用奥斯特罗格拉茨基公式即可得到:

$$\oiint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = \oiint\limits_S v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$= \iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

然后将右边方括号内的表达式加以整理并分成两个积分就得到 (8.28).

容易看出, 若令 $v \equiv 1$, 就得到公式 (a), 若令 $v = u$, 即可得到公式 (b). □

习题 4394 证明三维空间的**格林第二恒等式** (也称为格林第二公式):

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

式中区域 V 以曲面 S 为边界, $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法向量, 而函数 $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ 在区域 $V + S$ 上二阶连续可微.

解 写出格林第一恒等式 (8.28), 又将其中的 u, v 对换, 两式相减即得. □

习题 4395 设函数 $u = u(x, y, z)$ 在某区域内具有连续的一阶和二阶导数, 若

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

则称 $u(x, y, z)$ 为此区域内的调和函数.

证明: 若有界区域 V 以光滑曲面 S 为边界, u 是此区域内的调和函数, 则成立下列公式:

$$\text{(a)} \oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = 0;$$

$$\text{(b)} \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量.

用公式 (b) 证明: 区域 V 内的调和函数由它在边界 S 上的值唯一确定.

解 公式 (a) 和 (b) 显然可从习题 4393 的两个公式得到.

为证明区域 V 内的调和函数由其在边界 S 上的值唯一确定, 只需要对于在 S 上恒等于 0 的调和函数 u 证明它在整个区域 V 上也恒等于 0. 由公式 (b) 可见这时三重积分中的被积函数必须恒等于 0, 这就导出 u 在 V 内的所有偏导数处处恒等于 0, 因此只能是常值函数. 由于在边界 S 上为 0, 因此在 V 内处处为 0. □

习题 4396 证明: 若函数 $u=u(x,y,z)$ 是以光滑曲面 S 为边界的有界闭区域 V 内的调和函数, 则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_S\left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S,$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从区域 V 的内点 (x,y,z) 引至曲面上的点 (ξ,η,ζ) 的径向量,

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 在点 (ξ,η,ζ) 处的外法向量.

提示 本题与 §8.13 的习题 4335 类似, 其差别在于, 在该题中 $\ln r$ 为二维的调和函数 (见 §6.2.4 的习题 3307), 而在本题中 $\dfrac{1}{r}$ 为三维的调和函数 (见习题 3311). 具体来说, 即在习题 4394 提供的格林第二恒等式中用 $v=\dfrac{1}{r}$ 代入. 又由于 v 在内点 (x,y,z) 处有奇点, 因此需要从 V 中挖去以点 (x,y,z) 为心而半径 $\varepsilon>0$ 充分小的一个球 V_ε, 使得它在区域 V 的内部. 然后对于区域 $V-V_\varepsilon$ 用上述恒等式即可. □

习题 4397 (平均值定理) 证明: 若 $u=u(x,y,z)$ 为一个球内的调和函数, 此球的半径为 R, 球心位于点 (x_0,y_0,z_0), 则

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_S u(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

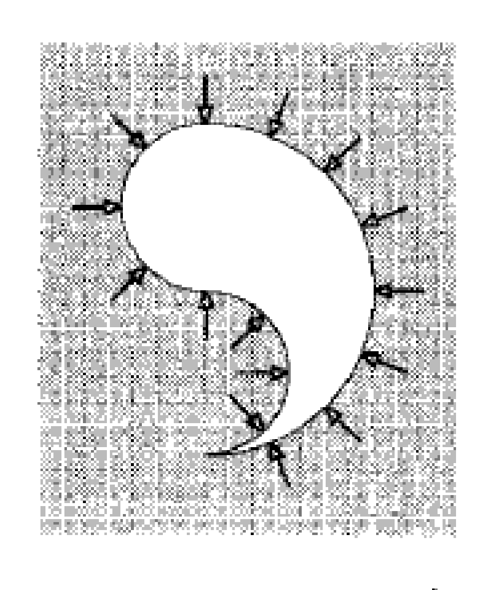
提示 可参考 §8.13 的习题 4336 的证明及其注 1. □

习题 4398 (极大值原理) 证明: 若有界闭区域 V 内的连续函数 $u=u(x,y,z)$ 在此区域内部是调和函数, 并且它不是常数, 则此函数在区域内的点处不能达到最大值和最小值.

提示 §8.13 的习题 4337 中的证明只依赖于相应维数的平均值定理, 在其他方面与维数无关. □

习题 4399 (阿基米德原理) 设物体 V 全部浸没于液体中, 利用帕斯卡定律证明: 液体的浮力等于物体所排开的液体的重量, 其方向是竖直向上.

解 如附图所示, 问题就是求浸没在静止液体中的物体 V 的表面 S 上所受压力的合力, 这正是一个曲面积分问题.



习题 4399 的附图

将液体的自由表面取为坐标面 xOy, 使 Oz 轴垂直向下. 设液体密度为 ρ, 重力加速度为 g, 则在深度为 z 的曲面面积元 $\mathrm{d}S$ 上所受的压力的大小为 $\rho gz\,\mathrm{d}S$, 其方向为曲面的内法线方向. 若记曲面的外法线方向的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$, 则所受的压力为

$$(-\rho gz\cos\alpha\,\boldsymbol{i}-\rho gz\cos\beta\,\boldsymbol{j}-\rho gz\cos\gamma\,\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}S.$$

在曲面 S 上积分后就得到物体所受的合力为

$$\boldsymbol{F} = -\Big(\rho g \oiint\limits_S z\cos\alpha\,\mathrm{d}S\Big)\,\boldsymbol{i} - \Big(\rho g \oiint\limits_S z\cos\beta\,\mathrm{d}S\Big)\,\boldsymbol{j} - \Big(\rho g \oiint\limits_S z\cos\gamma\,\mathrm{d}S\Big)\,\boldsymbol{k}.$$

对每个分量用奥斯特罗格拉茨基公式, 就得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= 0\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} - \Big(\rho g \iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\Big)\,\boldsymbol{k}\\ &= -\rho g|V|\,\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

其中 $|V|$ 为物体 V 的体积. 这就是阿基米德原理. □

注 1　本题可参考 [11] 第三卷的 654 小节的例题 8), 其中还进一步证明, 竖直向上的合力的作用线通过物体的几何重心.

注 2　考虑到液体自由表面所受的压强 p_0 (通常这就是地球大气所施加的压强), 在面积元 $\mathrm{d}S$ 上所受的压力大小应修改为 $(p_0 + \rho g z)\,\mathrm{d}S$. 这里用到帕斯卡定律, 即外加压强将按照原来的大小传递到液体的所有部分. 但从上述计算可见, 这对于最后的结论 (即阿基米德原理) 没有影响.

注 3　阿基米德原理对于没有自由面的情况仍然成立. 这时对上述解法需作如下修改, 即将坐标面 xOy 取在物体之上液体的任何水平面上, 假定这里的压强为 p_0, 然后再进行计算即可. 注意这时的压强仍然是坐标 z 的线性函数.

习题 4400 (波动方程的基尔霍夫公式) 设 S_t 是动球面 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$, 而函数 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 为二阶连续可微①, 证明: 函数

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\,\mathrm{d}S_t$$

满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初始条件 $u\big|_{t=0} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x, y, z)$.

解　在球面 S_t 上用以点 (x, y, z) 为中心的球面坐标, 将 $u(x, y, z, t)$ 的基尔霍夫公式改写为

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(x + t\beta_1, y + t\beta_2, z + t\beta_3)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \tag{8.29}$$

其中为简明起见记 $\beta_1 = \sin\varphi\cos\theta$, $\beta_2 = \sin\varphi\sin\theta$, $\beta_3 = \cos\varphi$, 而 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \boldsymbol{n}$ 即是 S_t 的单位外法向量.

由等式 (8.29) 即可见满足条件 $u\big|_{t=0} = 0$. 又将此等式对 t 求导得到

① 在《习题集》中对本题只假设 f 连续, 这个条件是不够的, 除非要在广义解的意义上来理解. 为保持本题的初等性质, 这里将 f 的条件增强为二阶连续可微.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}f(x+t\beta_1,y+t\beta_2,z+t\beta_3)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(f_1'\beta_1+f_2'\beta_2+f_3'\beta_3)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}\tag{8.30}$$

令 $t=0$ 代入即可见满足条件 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=f(x,y,z)$[①].

将拉普拉斯算子 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 作用于 (8.29) 的两边, 就得到

$$\begin{aligned}\Delta u&=\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(f_{11}''+f_{22}''+f_{33}'')\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{4\pi t}\oiint\limits_{S_t}(f_{11}''+f_{22}''+f_{33}'')\,\mathrm{d}S_t.\end{aligned}\tag{8.31}$$

为求 u 对于 t 的二阶偏导数, 先将等式 (8.30) 改写成曲面积分的形式, 并对其右边的曲面积分用奥斯特罗格拉茨基公式, 这样就得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi t}\oiint\limits_{S_t}(f_1'\beta_1+f_2'\beta_2+f_3'\beta_3)\,\mathrm{d}S_t\\&=\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi t}I(t),\end{aligned}$$

其中

$$I(t)=\iiint\limits_{V_t}(f_{11}''+f_{22}''+f_{33}'')\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta,$$

右边的积分区域 V_t 是球面 S_t 所包围的球体.

然后即可对 t 求导得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi t}I(t)\right)-\frac{u}{t^2}-\frac{1}{4\pi t^2}I(t)+\frac{1}{4\pi t}\cdot\frac{\partial I(t)}{\partial t}=\frac{1}{4\pi t}\cdot\frac{\partial I(t)}{\partial t}.$$

最后将 $I(t)$ 的三重积分用球坐标写为三次积分, 就有

$$I(t)=\int_0^t\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(f_{11}''+f_{22}''+f_{33}'')r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

其中右边的变量 t 只出现在对 r 积分的上限中, 因此即可求出

$$\begin{aligned}\frac{\partial I(t)}{\partial t}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(f_{11}''+f_{22}''+f_{33}'')t^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\oiint\limits_{S_t}(f_{11}''+f_{22}''+f_{33}'')\,\mathrm{d}S_t,\end{aligned}$$

将此式代入 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 的表达式中, 并与 (8.31) 作比较, 即可看出用基尔霍夫公式表示的 $u(x,y,z,t)$ 满足波动方程. □

① 由于基尔霍夫公式在 $t=0$ 时没有定义, 因此初始条件应理解为在 $t\to 0$ 的意义上满足.

§8.17 场论初步 (习题 4401.1–4462)

内容简介 本节的习题按照场论中的梯度、散度、旋度、通量、环量和有势场等基本概念分成小节, 并在补注小节中讨论最后两个较为困难的习题.

场论的参考材料除了 [11] 的 §18.4 之外, 可看 [33] 的第十四章和 [20] 的第六章.

8.17.1 梯度计算 (习题 4401.1–4419)

梯度是对于标量场 (也称为数量场) 的一种刻画. 从场论的角度看, 对于给定的连续可微的标量场 $u = u(x, y, z)$, 定义其梯度向量为

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

在场论中也经常使用微分算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

于是梯度就可记为 ∇u①.

在连续可微的标量场 u 的定义域的每一点处有梯度向量, 这样就得到一个向量场, 即梯度场. 根据定义, 梯度场是有势场, u 就是该向量场的一个势函数.

习题 4401.2 设 $u = xy - z^2$, 求 $\operatorname{grad} u$ 在点 $M(-9, 12, 10)$ 的大小和方向. 沿坐标角 xOy 的等分线方向的导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ 等于什么?

解 根据定义求导得到

$$\operatorname{grad} u = (y, x, -2z),$$

在点 M 处则为 $\operatorname{grad} u(M) = (12, -9, -20)$. 它的模长为

$$\|\operatorname{grad} u(M)\| = \sqrt{144 + 81 + 400} = 25,$$

方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{12}{25}, \quad \cos\beta = -\frac{9}{25}, \quad \cos\gamma = -\frac{4}{5}.$$

为了求点 M 处沿坐标角 xOy 的等分线方向的导数, 先求该方向的单位向量

$$\boldsymbol{l} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

然后就有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \operatorname{grad} u(M) \cdot \boldsymbol{l} = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 20 \cdot 0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad \square$$

习题 4404 作标量场

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 8)^2}$$

的等值面. 求通过点 $M(9, 12, 28)$ 的等值面. 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

---

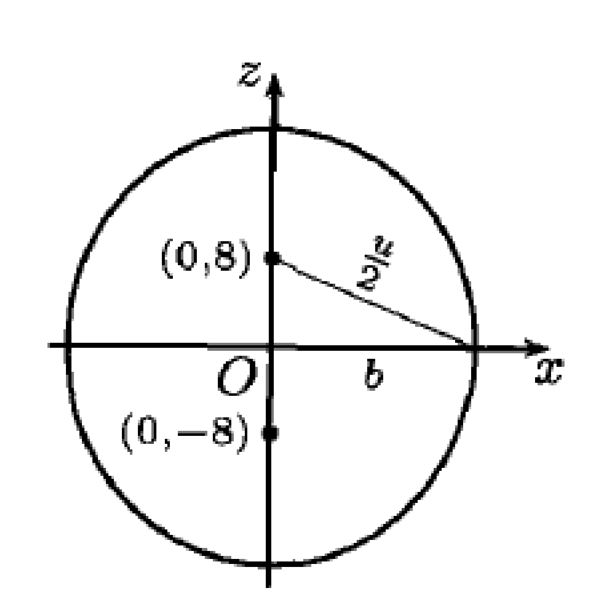
① 与方向导数相联系, 在 §6.2.6 已经引入梯度的概念. 建议初学者复习该小节的前言和习题, 其中包括梯度的基本性质和它与方向导数的关系.

解 用一点中学数学的平面解析几何知识已经足够解决本题.

$u(x,y,z)$ 的值就是点 (x,y,z) 到点 $(0,0,-8)$ 和 $(0,0,8)$ 的距离之和. 由于这两点的距离为 16, 根据距离的三点不等式, 可见 $u \geqslant 16$.

对于 $u=16$, 则只有连接上述两个点的直线段上的点满足这个要求. 因此等值面退化为直线段.

对于 $u>16$ 的等值面, 可先求坐标面 xOz 与该等值面的交线 (参见附图). 由于它是焦点已给定的椭圆曲线, 就可按照 u 的定义求出椭圆的长半轴为 $a=\dfrac{u}{2}$, 短半轴为 $b=\sqrt{\dfrac{u^2}{4}-64}$, 因此就得到椭圆的标准方程为



习题 4404 的附图

$$\frac{x^2}{\frac{u^2}{4}-64}+\frac{z^2}{\frac{u^2}{4}}=1\ \ (u>16).$$

将上式中的 x^2 换为 x^2+y^2, 就得到 u 的等值面为旋转椭球面:

$$\frac{x^2+y^2}{\frac{u^2}{4}-64}+\frac{z^2}{\frac{u^2}{4}}=1\ \ (u>16).$$

为求经过点 $M(9,12,28)$ 的等值面, 只要求出 $u(9,12,28)=25+39=64$, 然后代入上式就得到所求的等值面为

$$\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1.$$

在满足条件 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 36$ 时, 根据上述等值面即可看出 u 的最大值一定在此不等式成立等号时达到. 下面对此给出计算和证明.

先看出取 $x^2+y^2=36$, $z=0$, 就得到 $u=20$. 下面将证明它就是在约束条件 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 36$ 下 u 的最大值.

为此可利用前述等值面方程, 即有

$$\begin{aligned}\left(\frac{u^2}{4}-64\right)\cdot\frac{u^2}{4}&=\frac{u^2}{4}(x^2+y^2)+\left(\frac{u^2}{4}-64\right)z^2\\&\leqslant\frac{u^2}{4}(x^2+y^2+z^2)\leqslant\frac{u^2}{4}\cdot 36.\end{aligned}$$

两边约去 $\dfrac{u^2}{4}$ 并加以整理就得到 $u^2 \leqslant 400$, 即 $u \leqslant 20$. 还可以看出当且仅当 $z=0$ 时 $u=20$. □

习题 4407 精确到高阶无穷小量, 求在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处之两个无限接近的等值面

$$u(x,y,z)=c, \quad 及 \quad u(x,y,z)=c+\Delta c$$

之间的距离, 其中 $u(x_0,y_0,z_0)=c$ $(\operatorname{grad} u(x_0,y_0,z_0)\neq \mathbf{0})$.

解 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到等值面 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 的距离就是点 M_0 到该等值面上的点 $M(x,y,z)$ 的距离之最小值. 记 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, 则需要求 r^2 在约束条件 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 下的最小值点.

由简单的点集拓扑概念知道, 等值面上的点全体成为一个闭集, 而点到闭集的最小值必可达到, 因此上述最小值点存在①.

由函数 u 的连续可微性可知, 最小值点将随着 $\Delta c \to 0$ 而趋于点 M_0. 于是当 Δc 的绝对值充分小时, 根据 $\operatorname{grad} u(M_0)$ 不是零向量的条件, 在最小值点处的梯度向量也不会是零向量, 因此可以用 §6.7.2 的拉格朗日乘子法于上述条件极值问题 (参看命题 6.6 和 6.7).

作拉格朗日函数

$$L = r^2 - \lambda(u(x,y,z) - c - \Delta c),$$

则得到驻点方程为

$$2(x-x_0) - \lambda u'_x = 2(y-y_0) - \lambda u'_y = 2(z-z_0) - \lambda u'_z = 0.$$

这个方程组表明, 从 M_0 到最小值点的径向量

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

在相差高阶无穷小量的意义上与点 M_0 处的梯度向量共线. 由于梯度的模就是在梯度方向上的方向导数的绝对值, 因此从方向导数的定义可见, 在点 M_0 处所求的等值面之间的距离在相差高阶无穷小量的意义上等于

$$r = \frac{|\Delta c|}{\|\operatorname{grad} u(M_0)\|}. \quad \Box$$

习题 4414.2 证明: 若函数 $u = u(x,y,z)$ 在凸区域 Ω 内可微, 且 $\|\operatorname{grad} u\| \leqslant M$, 其中 M 为常数, 则对于 Ω 中任意两点 A, B 有:

$$|u(A) - u(B)| \leqslant M\rho(A,B),$$

式中 $\rho(A,B)$ 为 A 与 B 两点之间的距离.

解 将点 A, B 分别记为 (x_0,y_0,z_0) 和 (x_1,y_1,z_1), 定义从点 A 到点 B 的直线方程

$$x(t) = x_0 + t(x_1-x_0),\ y(t) = y_0 + t(y_1-y_0),\ z(t) = z_0 + t(z_1-z_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

然后定义复合函数 $F(t) = u(x(t),y(t),z(t))$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 则 $u(A) = F(0)$, $u(B) = F(1)$, 且知道 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可微, 因此根据拉格朗日微分中值定理, 存在 $0 < \xi < 1$, 使得

$$u(B) - u(A) = F(1) - F(0) = F'(\xi).$$

利用复合函数求导的链式法则, 就有

$$F'(\xi) = u'_x(x_1-x_0) + u'_y(y_1-y_0) + u'_z(z_1-z_0),$$

其中 u 的三个偏导数是在点 $(x(\xi),y(\xi),z(\xi))$ 处取值.

最后用柯西不等式作估计就得到所要求的不等式:

$$|u(B)-u(A)| = |F'(\xi)| \leqslant \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z} \cdot \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2}$$

$$\leqslant M\rho(A,B). \quad \Box$$

① 在引入空间点集的开和闭的概念之后, 即可证明点到闭集的距离, 无论该闭集有界还是无界, 都一定可以达到.

注 将本题与 §6.2.1 的习题 3254 作比较, 差别只在于本题对 u 加上可微条件, 从而可以用复合函数的链式法则, 所得的结论比那里好, 而证明还比那里简单得多.

习题 4415 (a) 对于函数 $u = u(x, y, z)$, 写出 $\operatorname{grad} u$ 在圆柱坐标系中的表达式.

解 先要求出在空间的点 (x, y, z) 处按柱坐标系生成的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{e}_z$.

以 $\boldsymbol{e}_r$ 为例, 它是当 φ 和 z 固定而 r 变化时得到的坐标线的单位切向量. 从柱坐标代换

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

对 r 求导, 即可求出 $\boldsymbol{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$.

同样可求出 $\boldsymbol{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$.

然后需要将 $\operatorname{grad} u = (u'_x, u'_y, u'_z)$ 投影到上述三个单位向量上去. 由于它们相互正交, 为此只要分别作标量积即可. 作如下计算:

$$\begin{aligned}
u'_r &= u'_x \cdot x'_r + u'_y \cdot y'_r + u'_z \cdot z'_r \\
&= u'_x \cos\varphi + u'_y \sin\varphi = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}_r, \\
u'_\varphi &= u'_x \cdot x'_\varphi + u'_y \cdot y'_\varphi + u'_z \cdot z'_\varphi \\
&= u'_x(-r\sin\varphi) + u'_y r\cos\varphi = r \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}_\varphi, \\
u'_z &= \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}$$

就可得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} u &= (\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}_r)\,\boldsymbol{e}_r + (\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}_\varphi)\,\boldsymbol{e}_\varphi + (\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}_z)\,\boldsymbol{e}_z \\
&= u'_r \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} u'_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + u'_z \boldsymbol{e}_z. \quad \square
\end{aligned}$$

注 柱坐标以及球坐标都是更为一般的正交坐标的特例. 仿照 §8.17.2 的习题 4434, 可以考虑用正交坐标 u, v, w 表示梯度向量 $\operatorname{grad} F$ 的更为一般的问题, 其中 F 为连续可微的标量场.

引用习题 4434 的记号, 在得到 $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ 和 L, M, N 之后, 只需要求出 $\operatorname{grad} F$ 与这些单位向量的标量积.

根据复合函数求导的链式法则, 就可以得到

$$\begin{aligned}
F'_u &= F'_x \cdot x'_u + F'_y \cdot y'_u + F'_z \cdot z'_u = \operatorname{grad} F \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = L \operatorname{grad} F \cdot \boldsymbol{e}_u, \\
F'_v &= F'_x \cdot x'_v + F'_y \cdot y'_v + F'_z \cdot z'_v = \operatorname{grad} F \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = M \operatorname{grad} F \cdot \boldsymbol{e}_v, \\
F'_w &= F'_x \cdot x'_w + F'_y \cdot y'_w + F'_z \cdot z'_w = \operatorname{grad} F \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = N \operatorname{grad} F \cdot \boldsymbol{e}_w,
\end{aligned}$$

于是就有

$$\operatorname{grad} F = \frac{1}{L} F'_u \boldsymbol{e}_u + \frac{1}{M} F'_v \boldsymbol{e}_v + \frac{1}{N} F'_w \boldsymbol{e}_w.$$

对于柱坐标有 $L = N = 1$, $M = r$, 因此就得到前面的结果.

习题 4416 求场 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x,y,z)$ 处沿此点的径向量 $\boldsymbol{r}$ 之方向的导数. 在怎样的情况下, 此导数等于梯度的模.

解 1 先求出梯度向量

$$\operatorname{grad} u=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right),$$

然后写出 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的方向余弦 $\left(\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{r},\dfrac{z}{r}\right)$, 就可以得到所要的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}=\frac{2u}{r}.$$

要使得方向导数等于梯度的模, 也就是达到最大值, 只有当该方向为梯度方向时才可能, 这就是以下两个向量平行:

$$\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)\parallel(x,y,z).$$

由此可见, 若 $a=b=c$ (按惯例它们均取正数), 则任何点的径向量方向的导数都达到最大值.

对于此条件不成立的情况, 则当 a,b,c 中只有两个相等时, 例如 $a=b\neq c$, 则在 $z=0$ 的平面上的点, 沿径向量方向的导数达到最大值.

对于 a,b,c 全不相等的情况 (此时 $u=$ 常数为三轴椭球面), 在三个坐标轴上的点沿径向量方向的导数达到最大值. □

解 2 在解 1 中利用了梯度与方向导数的关系, 但这并非必要. 如解 1 中求出的梯度向量可计算得到其模为

$$\|\operatorname{grad} u\|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

因此当 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}=\dfrac{2u}{r}=\|\operatorname{grad} u\|$ 时就得到等式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

然而将上式左边写成两组数的乘积之和, 然后用柯西不等式即可得到

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=x\cdot\frac{x}{a^2}+y\cdot\frac{y}{b^2}+z\cdot\frac{z}{c^2}\\&\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.\end{aligned}$$

这表明目前的柯西不等式以等号成立, 而这只有当两组数成比例时才可能发生. 于是就导致与解 1 相同的等式与结论 (参见 §2.7.2 的习题 1293 及其注). □

8.17.2 散度计算 (习题 4420–4434)

散度是对于向量场的一种刻画. 对于连续可微的向量场 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 定义其散度为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

在场论中也经常用微分算子 ∇ 将散度记为 $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$.

在连续可微的向量场 $\boldsymbol{a}$ 的定义域中考虑每一个点处的散度, 就得到散度场. 它是一个标量场.

在 §8.16 中的奥斯特罗格拉茨基公式在场论中经常写成为

$$\oiint\limits_S a_n \, \mathrm{d}S = \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

其中 $a_n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在 S 的外法线方向上的投影.

习题 4421 用直接计算的方法证明: 向量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度与直角坐标系的选择无关.

解 为记号简单且便于用线性代数知识起见, 这里对一般的 n 维空间中作出证明.

设原来的直角坐标系中相互正交的单位向量系为 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, 空间中点的坐标为 $(x_1, \cdots, x_n)$. 向量场 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, 其中 $a_i = a_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 为连续可微函数. 散度为 $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$.

现在选用新的直角坐标系①, 其中相互正交的单位向量系为 $\boldsymbol{e}'_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, 空间中点的新坐标为 $(x'_1, \cdots, x'_n)$. 坐标变换公式为

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \ (i = 1, \cdots, n),$$

于是在新坐标系中向量场 $\boldsymbol{a} = (a'_1, \cdots, a'_n)$, 其中

$$a'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j \ \ (i = 1, \cdots, n).$$

由于上述变换中的系数组成的矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ 为实正交阵, 因此 $A^{-1} = A^T$. 于是逆变换公式为

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x'_j \ \ (i = 1, \cdots, n).$$

这样就可以计算新坐标系中的向量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度如下:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a'_i}{\partial x'_i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x'_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x'_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik}\Big) \frac{\partial a_j}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

① 由于在平移变换下的不变性是平凡的, 这里的原点不作变动.

由于矩阵 A 为正交阵, 各行相互正交, 而模均等于 1, 因此上式中的 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik}$ 仅当 $j=k$ 时为 1, 而当 $j \neq k$ 时为 0. 这样就得到所要求证明的等式:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i'}{\partial x_i'} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j},$$

即散度的定义与直角坐标系的选择无关. □

注 对于 $n=3$ 的情况, 又可将本题看成为后面的习题 4434 的特例. 按照那里的记号, 由于 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}x_1'^2 + \mathrm{d}x_2'^2 + \mathrm{d}x_3'^2$, 因此 $L = M = N = 1$, 从而就得到 $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i'}{\partial x_i'}$.

习题 4422 证明:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim_{d(S)\to 0} \frac{1}{V} \oiint_S a_n \, \mathrm{d}S,$$

其中 S 表示包围点 M 的封闭曲面, V 是该曲面所围区域的体积, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量, $d(S)$ 为曲面 S 的直径.

解 题中的 a_n 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影. 将封闭曲面 S 所围区域记为 Ω, 用奥斯特罗格拉茨基公式就得到

$$\oiint_S a_n \, \mathrm{d}S = \iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

然后对右边的三重积分用积分中值定理, 即存在点 $C \in \Omega$, 使得上式右边等于 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(C) \cdot V$. 两边除以 V, 令 $d(S) \to 0$, 则点 C 趋于点 M, 即得所求的公式. □

注 本题的结论表明散度与直角坐标系的选择无关, 因此相当于对习题 4421 所要的结论给出一个新的证明, 但不是通过直接计算的方法.

习题 4423.2 求

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

解 直接计算得到

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \left[\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{k} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z \partial y} = 0,
\end{aligned}$$

其中利用了向量场 $\boldsymbol{\omega}$ 为二阶连续可微的条件, 因此它的所有二阶混合偏导数均与求导顺序无关. □

注 利用旋度概念, 题中的行列式就是向量场 ω 的旋度场 $\mathrm{rot}\,\omega$, 因此本题证明了 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\omega)=0$, 即旋度场必定是无源场. 这在 §8.16 的习题 4381 的注中已经提到过, 又见于后面的习题 4439(b).

习题 4425 求 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)$.

解 直接计算得到

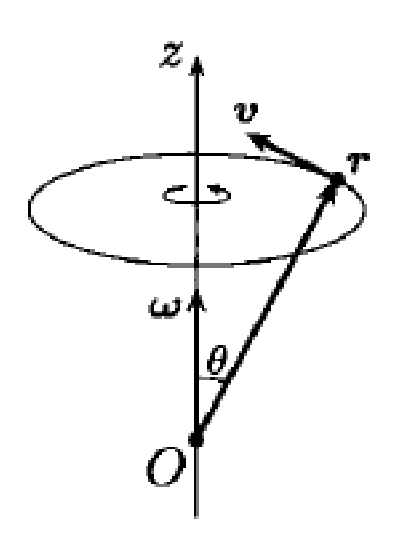
$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u. \quad \square$$

注 本题的结论是一个常用的公式, 也可记为 $\nabla\cdot(\nabla u)=\Delta u$, 或者按照算子符号记为 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\Delta$.

习题 4431 设流体充满空间并以恒定角速度 ω 沿逆时针方向绕 Oz 轴旋转, 求速度向量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度向量 $\boldsymbol{w}$ 在给定时刻在空间点 $M(x,y,z)$ 处的散度.

解 在旋转轴上取某点为原点 O, 将角速度用向量 $\boldsymbol{\omega}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+\omega\boldsymbol{k}$ 表示. 用 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 表示从 O 到空间点 $M(x,y,z)$ 的径向量, 则在该点的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 都正交 (参见附图). 记它们的夹角为 θ, 则速度的大小为 $\|\boldsymbol{r}\|\cdot\omega\sin\theta$, 因此就有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&\omega\\x&y&z\end{vmatrix}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}.$$



习题 4431 的附图

由此即可求出速度向量 $\boldsymbol{v}$ 的散度为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0.$$

由于径向量 $\boldsymbol{r}$ 的端点 M 作匀速圆周运动, 即可知其 (向心) 加速度向量为指向 Oz 轴且大小等于 $\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$, 因此用向量表出为

$$\boldsymbol{w}=-\omega^2x\boldsymbol{i}-\omega^2y\boldsymbol{j},$$

于是就可求出其散度为 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}=-2\omega^2$. $\square$

习题 4433 求由极坐标 r 与 φ 表示的平面向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ 之散度的表达式.

解 1 利用 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ 对 r 求偏导, 可求出在 φ 不变时的向量线 (即矢径方向) 的单位向量 $\boldsymbol{e}_r=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$, 又将上述两式对 φ 求偏导, 可求出在 r 不变时的向量线 (即以原点为中心的圆周) 的单位向量 $\boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}$.

将给定的平面向量场 $\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ 向上述两个方向投影, 得到

$$\boldsymbol{a}(r,\varphi)=a_r(r,\varphi)\boldsymbol{e}_r+a_\varphi(r,\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

问题就是如何用 a_r 和 a_φ 来计算散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$. 将 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 的表达式代入 $\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ 的上述等式的右边, 即可得到它在直角坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=(a_r\cos\varphi-a_\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{i}+(a_r\sin\varphi+a_\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{j}.$$

为了计算上述两个方向的分量对 x 和 y 的偏导数, 需要先写出以下等式:

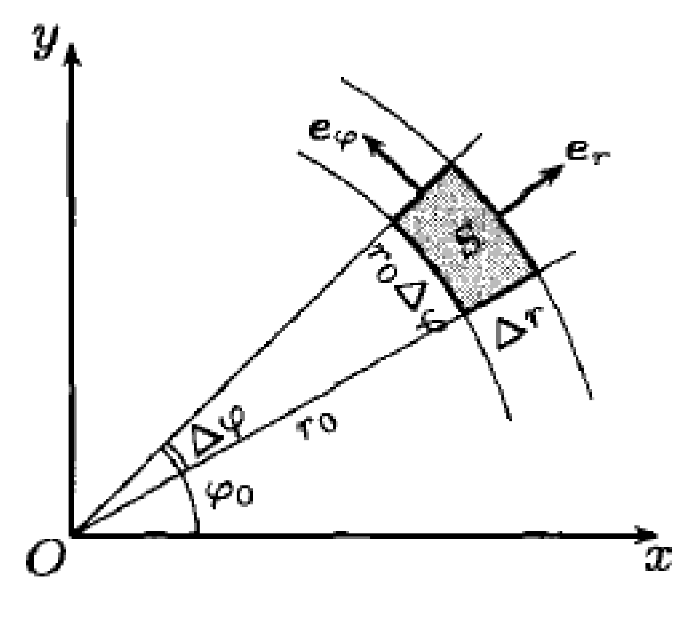
$$r'_x = \frac{x}{r} = \cos\varphi, \quad r'_y = \frac{y}{r} = \sin\varphi, \quad \varphi'_x = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \varphi'_y = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

然后即可计算如下:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{a} &= \frac{\partial}{\partial x}(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi)r'_x + \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi)\varphi'_x \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial r}(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi)r'_y + \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi)\varphi'_y \\
&= \left(\frac{\partial a_r}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\sin\varphi\right)\cos\varphi - \left(\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\cos\varphi - a_r\sin\varphi - \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\sin\varphi - a_\varphi\cos\varphi\right)\frac{\sin\varphi}{r} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_r}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\cos\varphi\right)\sin\varphi + \left(\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\sin\varphi + a_r\cos\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\right)\frac{\cos\varphi}{r} \\
&= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}. \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 用格林公式可给出一个计算较简单的证明. 其中 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, a_r, a_φ, a_x 和 a_y 与解 1 相同.

取极坐标系的点 (r_0, φ_0), 如附图所示作出等值线 $r = r_0$, $r = r_0 + \Delta r$, $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, 其中增量 $\Delta r > 0$, $\Delta\varphi > 0$. 这样就围成图中的灰色区域, 在相差高阶无穷小量时可以作为矩形来看待. 将该区域记为 S, 其边界的正方向围线记为 C, 则可以用格林公式的第二形式 (见 §8.12.3 的命题 8.6 的公式 (8.13)) 得到



习题 4433 的附图

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C [a_x\cos(\boldsymbol{n}, x) + a_y\cos(\boldsymbol{n}, y)]\,\mathrm{d}s.$$

在相差高阶无穷小量的意义上, 上式左边等于在点 (r_0, φ_0) 的散度乘以区域 S 的面积. 将 S 看成矩形, 其两边长为 $r_0\Delta\varphi$ 和 Δr, 面积就是 $r\Delta r\Delta\varphi$.

右边则是在四段边界曲线上的积分. 先看 $r = r_0 + \Delta r$ 上的一段边界. 在相差高阶无穷小量的意义上这时的外法向量可看成为曲线段上某个点的 $\boldsymbol{e}_r$, 而积分表达式 $a_x\cos(\boldsymbol{n}, x) + a_y\cos(\boldsymbol{n}, y)$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在此单位向量上的投影 a_n, 也就是 a_r, 其中变量 $r = r_0 + \Delta r$. 由于曲线段长度可用 $(r_0 + \Delta r)\Delta\varphi$ 来代替, 因此积分为 $(ra_r\Delta\varphi)\Big|_{r=r_0+\Delta r}$. 对于 $r = r_0$ 上的一段边界, 其外法向量为 $-\boldsymbol{e}_r$, 相应的积分为 $-ra_r\Delta\varphi\Big|_{r=r_0}$. 将这两段曲线上的积分相加, 就可将其主部写为

$$\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}\Delta r\Delta\varphi.$$

对 $\varphi = \varphi_0$ 和 $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ 上的两段曲线的积分作类似的讨论, 就得到

$$\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\Delta r\Delta\varphi.$$

等置以上结果, 除以 $\Delta r\Delta\varphi$ 并令 $\Delta r^2 + \Delta\varphi^2 \to 0$, 又利用 (r_0, φ_0) 的任意性, 就有

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]. \quad \square$$

习题 4434 设 u, v, w 为正交曲线坐标, 且

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w),$$

用坐标 u, v, w 表示 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x, y, z)$.

作为特殊情形, 求 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ 在柱坐标和球坐标下的表达式.

解 如习题 4433 所示, 以下将采用该题的解 2 中的方法.

仿照习题 4433 以及 §8.17.1 的习题 4415(a), 先求出在空间的点 (x, y, z) 按照新的坐标系生成的单位向量 $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$.

记径向量为 $\boldsymbol{r} = (f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w))$, 则就可得到沿坐标线的切向量

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w},$$

将它们的模分别记为 L, M, N, 于是就得到

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{1}{L}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{e}_v = \frac{1}{M}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \quad \boldsymbol{e}_w = \frac{1}{N}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w},$$

根据题设条件, 它们相互正交.

将向量 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 通过标量积计算投影到上述三个方向上得到

$$\boldsymbol{a} = a_u \boldsymbol{e}_u + a_v \boldsymbol{e}_v + a_w \boldsymbol{e}_w,$$

以下的问题是如何计算散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

任意取定参数值 u_0, v_0, w_0, 并取充分小的增量 $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$, $\Delta w > 0$, 作出等值面 $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$, $w = w_0$, $w = w_0 + \Delta w$, 则在相差高阶无穷小的意义上围成一个小的平行六面体 V. 将它的外侧边界面记为 S, 根据奥斯特罗格拉茨基公式得到

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \oiint\limits_S a_n \, \mathrm{d}S. \tag{8.32}$$

这时左边在相差高阶无穷小量的意义上就是体积 $LMN\Delta u \Delta v \Delta w$ 与 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(u_0, v_0, z_0)$ 的乘积. 右边则需要分别考察 6 个面上的通量.

先观察在 $u = u_0 + \Delta u$ 的等值面上的通量. 在相差高阶无穷小量的意义上, 这时的外侧单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 就是 $\boldsymbol{e}_u$, 因此 $a_n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = a_u$, 曲面面积为 $MN\Delta v \, \Delta w$. 于是通量就是 $MNa_u \Delta v \, \Delta w$, 其中的自变量 $u = u_0 + \Delta u$. 而在 $u = u_0$ 的等值面上的通量为 $-MNa_u \Delta v \, \Delta w$, 其中的自变量 $u = u_0$. 这两个面上的通量之和就是

$$\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) \, \Delta u \, \Delta v \, \Delta w.$$

对于其余四个面的通量作类似的计算, 这样就求出了流过封闭曲面 S 的总通量.

将以上计算结果代入 (8.32) 的两边, 约去 $\Delta u \Delta v \Delta w$, 并令 $(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2 \to 0$, 就得到

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NL\, a_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LM a_w)\right].$$

有了这个一般公式之后, 对于具体的正交曲线坐标 u, v, w, 只需要求出 L, M, N. 这时利用 $\boldsymbol{r} = (f, g, h)$ 可得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}w,$$

又利用正交性条件, 就有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\|^2 = L^2\,\mathrm{d}u^2 + M^2\,\mathrm{d}v^2 + N^2\,\mathrm{d}w^2,$$

即有可能提供一个较为方便的计算方法.

对于柱坐标系 (r, φ, z), 由 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ 即可求得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2,$$

因此 $L = N = 1$, $M = r$, 这样就有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

对于球坐标系 (r, φ, θ), 由 $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$ 即可求得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\theta^2,$$

因此 $L = 1$, $M = r$, $N = r\sin\varphi$, 这样就有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial(a_\varphi\sin\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}. \quad \square$$

注 关于曲线坐标下的向量运算可以参考 [33] 的 §14.1 之 5 和 [20] 的 §6.17.

8.17.3 旋度计算 (习题 4435–4441.2)

旋度是对向量场在散度之外的又一种刻画. 对于连续可微的向量场 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 定义其旋度为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

在场论中也经常用微分算子 ∇ 将旋度记为 $\nabla \times \boldsymbol{a}$.

在连续可微的向量场 $\boldsymbol{a}$ 的定义域的每一个点处有旋度, 这样就得到旋度场. 它是一个向量场.

在 §8.15 中的斯托克斯公式在场论中经常写成为

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\,\mathrm{d}S$$

其中左边积分的被积表达式即是 $a_x\,\mathrm{d}x + a_y\,\mathrm{d}y + a_z\,\mathrm{d}z$, 右边积分的被积函数是旋度在 S 的指定一侧的法线方向上的投影. 如 §8.15 所示, S 的指定侧的法向量与其边界曲线 C 的取向满足右手法则.

习题 4439 求: (a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$; (b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})$.

分析 本题的计算是容易的, 但要重视它们的意义. 题 (a) 的答案是 $\boldsymbol{0}$ (零向量), 它表明有势场必定是无旋场. 题 (b) 的答案也是 0, 它表明旋度场一定是无源场. 可以证明, 在空间区域为单连通的条件下, 上述两个结论的逆也是正确的. $\square$

习题 4440 设流体充满空间并以恒定角速度 ω 绕轴 $\boldsymbol{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 旋转. 求速度向量 $\boldsymbol{v}$ 在给定时刻在空间点 $M(x, y, z)$ 处的旋度.

解 (概要) 将本题与 §8.17.2 的习题 4431 比较, 同时参考其附图, 可见只要将那里的角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 修改为本题的 $\omega\boldsymbol{l}$, 就仍然可以按照公式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ 求出它的各个分量. 以下从略. □

习题 4441.1 求由极坐标 r 和 φ 表示的平面向量场 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r, \varphi)$ 的旋度的表达式.

提示 本题与 §8.17.2 的习题 4433 类似, 建议用该题的解 2 中的方法 (参考其附图). 对于平面向量场 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$, 其中 a_x, a_y 与 z 无关, 因此按照旋度定义即可得到

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \Big[\frac{\partial(a_y)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x)}{\partial y}\Big]\boldsymbol{k},$$

然后仿照习题 4433 的解 2 用格林公式即可. □

习题 4441.2 写出 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 在下列坐标系中的表达式:

(a) 圆柱坐标系; (b) 球坐标系.

解 (概要) 如在 §8.17.1 的习题 4415(a) 的注中所示, 柱坐标系和球坐标系都是正交曲线坐标系的特例. 因此这里将如该题的注和 §8.17.2 的习题 4434 中那样, 直接对一般的正交曲线坐标系求出解答, 然后本题的两种情况就只是它的推论了.

设有 $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$, 且已知 u, v, w 为正交曲线坐标. 引用习题 4434 的记号, 在得到 $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ 和 L, M, N 之后, 将向量场 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\boldsymbol{a} = a_u\boldsymbol{e}_u + a_v\boldsymbol{e}_v + a_w\boldsymbol{e}_w,$$

问题是如何计算旋度向量 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ 在坐标系 $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ 上的各个分量.

由于对于三个分量的计算方法相同, 只叙述如何求在 $\boldsymbol{e}_u$ 上的分量. 任意取定参数值 u_0, v_0, w_0, 并取充分小的增量, $\Delta v > 0$, $\Delta w > 0$, 在等值面 $u = u_0$ 上由等值面$v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$, $w = w_0$, $w = w_0 + \Delta w$ 围成在相差高阶无穷小的意义上的矩形 S, 它的法线与其中某个点的方向 $\boldsymbol{e}_u$ 也只相差高阶无穷小量. 将 S 的边界记为 C, 其取向与 $\boldsymbol{e}_u$ 符合右手法则. 然后用斯托克斯公式进行计算即可 (参看习题 4433 的附图).

最后可将三个分量的结果用行列式综合如下:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{MN}\boldsymbol{e}_u & \dfrac{1}{NL}\boldsymbol{e}_v & \dfrac{1}{LM}\boldsymbol{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ La_u & Ma_v & Na_w \end{vmatrix}. \quad \square$$

8.17.4 通量计算 (习题 4442.1–4451)

设有连续可微的向量场 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, 则将积分

$$\iint\limits_S a_n\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

称为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 方向上通过曲面 S 的通量 (也称为流量).

奥斯特罗格拉茨基公式的向量形式为

$$\oiint\limits_S a_n\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

它可用于 S 为封闭曲面的情况的通量计算 (前提是 S 所包围的区域 V 完全落在向量场 $\boldsymbol{a}$ 的定义域内), 同时这个公式揭示了通量与散度之间的关系.

习题 4442.1 求径向量 $\boldsymbol{r}$ 的通量: (a) 通过圆锥体 $x^2+y^2 \leqslant z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ 的侧面; (b) 通过此圆锥面的底面.

解 这里的向量场为 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

(a) 记所说的圆锥体的侧表面为 S_1, 取相对于圆锥体的外侧, 则通量计算公式为

$$\iint\limits_{S_1} r_n\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

由于锥面上从顶点到任何一点的径向量 (对本题即 $\boldsymbol{r}$) 与法向量 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 正交 (参见 §8.16 的习题 4383 中对于一般锥面的讨论), 因此上述积分的被积函数恒等于 0, 通量当然等于 0.

(b) 将圆锥体的底面记为 S_2, 则 $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$. 在底面 $x^2+y^2 \leqslant h^2$, $z = h$ 上处处有 $r_n = h$, 因此通量为

$$\iint\limits_{S_2} r_n\,\mathrm{d}S = h\iint\limits_{S_2}\mathrm{d}S = \pi h^3. \quad \square$$

注 顺便介绍题 (b) 的另一个计算方法.

在已求出通过 S_1 的通量时, 也可以用奥斯特罗格拉茨基公式求出通过圆锥体全表面外侧的通量, 然后减去通过 S_1 的通量, 即可得到通过 S_2 的通量. 作为验证, 将圆锥体记为 V, 其体积记为 $|V|$, 则可计算通过全表面外侧的通量如下:

$$\iint\limits_{S_1\cup S_2} r_n\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3|V| = 3\cdot\frac{1}{3}h\cdot\pi h^2 = \pi h^3.$$

习题 4446 证明: 向量场 $\boldsymbol{a}$ 通过由方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ $(u, v) \in \Omega$ 给出的曲面 S 的通量等于

$$\iint\limits_S a_n\,\mathrm{d}S = \iint\limits_\Omega \left(\boldsymbol{a}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\,\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

式中 $a_n = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量①.

① 三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 可记为 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 或 $(\boldsymbol{abc})$.

解　由于在曲面的双参数方程的表示中, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ 和 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ 与法向量垂直, 因此它们的向量积与法向量共线. 又由于 $\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ (参看 §8.4 的前言), 而 $\sqrt{EG-F^2}$ 即是上述向量积的模, 因此就得到

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Big),$$

从而就得到所要求证的等式:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S a_n\,\mathrm{d}S&=\iint\limits_\Omega \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\&=\pm\iint\limits_\Omega\Big(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

其中积分前的正负号需要根据 S 的指定侧和具体的双参数方程来选取. □

习题 4447 求向量场 $\boldsymbol{a}=m\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ (m 为常数) 通过包围坐标原点的封闭曲面 S 的通量.

解　取 $\boldsymbol{n}$ 为封闭曲面 S 外侧的单位法向量, 由于

$$a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{m}{r^2}\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{n}\Big)=\frac{m}{r^2}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}),$$

因此已将本题归结为 §8.16 的习题 4392 的高斯积分之情况 (b), 可见所求的通量 $Q=4\pi m$. □

习题 4448 已知向量场

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\Big(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\Big),$$

其中 e_i 为常数, r_i 为点 M_i (点源) 距动点 $M(\boldsymbol{r})$ 的距离. 求此向量场通过包围点 M_i $(i=1,\cdots,n)$ 的封闭曲面 S 的通量.

提示　利用 §8.17.2 的习题 4425, 有 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\Delta u$, 而已知 $\dfrac{1}{r_i}$ 是以 M_i 为奇点的调和函数, 因此在封闭曲面 S 内部除了 n 个奇点 M_i $(i=1,\cdots,n)$ 之外, 向量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度处处为 0. 利用挖洞法, 在 S 包围的区域中将以 M_i $(i=1,\cdots,n)$ 为中心半径充分小的 n 个球挖去. 在所余的区域上用奥斯特罗格拉茨基公式可知通量为 0, 从而通过封闭曲面 S 的通量等于通过上述 n 个小球的边界面的通量之和, 而后者是不难计算的. □

习题 4449 证明:

$$\oiint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\nabla^2u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

式中曲面 S 是区域 V 的边界面.

提示　由 §8.17.2 的习题 4425, 有 $\nabla^2=\Delta$, 因此本题与 §8.16 的习题 4393(a) 相同. □

习题 4450 (热传导方程) 在温度场 u 内, 在单位时间内通过面微元 $\mathrm{d}S$ 的热量为

$$\mathrm{d}Q = -k\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{grad} u \, \mathrm{d}S,$$

其中 k 为热导率, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量, 求在单位时间内物体 V 所吸收的热量. 研究温度上升的速度, 从而推出物体温度所满足的方程.

解 在 $\mathrm{d}Q$ 的表达式中的负号代表热量的传递是从温度高处向温度低处进行. 由题设可知, 在单位时间内通过边界面的热量为

$$Q = -\oiint\limits_S k \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S,$$

将它改变符号就得到通过边界面进入物体的热量, 即物体 V 所吸收的热量.

对 $-Q$ 用奥斯特罗格拉茨基公式得到

$$\oiint\limits_S k \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \iiint\limits_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

另一方面, 物体中的体积元 $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ 在时间 $\mathrm{d}t$ 内吸收的热量与其质量和上升的温度 $\mathrm{d}u$ 成正比, 即有

$$c \, \mathrm{d}u \cdot \rho \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t,$$

其中 c 为物体的比热 (质量热容), ρ 为密度. 于是在单位时间内物体吸收的热量为

$$\iiint\limits_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

在物体内部没有热源时, 等置以上两个三重积分就得到

$$\iiint\limits_V \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0.$$

由于这个积分的被积函数在 V 的任何子区域上的积分都等于 0, 因此该被积函数恒等于 0 (见 §8.6 的习题 4097), 这样就得到没有热源和热汇条件下的热传导方程

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0.$$

在 c, ρ, k 均为常数时, 令 $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, 并利用 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$ (习题 4425), 就得到最常见的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u. \quad \square$$

注 关于一维热传导方程见前面 §6.2.4 的习题 3308 和 §7.3.3 的习题 3840 等.

习题 4451 (流体的连续性方程) 处于运动状态的流体充满区域 V. 假定在区域 V 内没有源和汇, 试推出连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 为流体密度, $\boldsymbol{v}$ 为速度向量, t 为时间.

解 1 想象区域 V 中的任意封闭曲面 S (它不妨碍流体运动), 将它所包围的区域记为 $V_1 \subset V$. 在 V_1 内的流体质量为 $\iiint\limits_{V_1} \rho \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, 它随时间的增加速率为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V_1}\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{V_1}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

另一方面, 根据质量守恒定律, V_1 内流体的质量增加只能来自于通过边界面 S 的流体的流入. 在时间 $\mathrm{d}t$ 中通过曲面面积元 $\mathrm{d}S$ 流出的流体质量为 $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 是封闭曲面 S 的单位外法向量, 因此通过曲面 S 流入的流体质量的速率为

$$-\oint\!\!\!\!\oint\limits_{S}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=-\iiint\limits_{V_1}\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

其中右边是用奥斯特罗格拉茨基公式得到的三重积分.

由于假设在区域 V 内无源无汇, 等置前面写出的区域 V 的流体质量的增加速率与通过曲面 S 流入的流体质量的速率, 就得到

$$\iiint\limits_{V_1}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0.$$

最后利用 $V_1\subset V$ 的任意性, 可见其被积函数在区域 V 内必定恒等于 0 (见 §8.6 的习题 4097), 这就是所要证明的连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0.\quad\square$$

解 2 [20] 向量 $\boldsymbol{Q}=\rho\boldsymbol{v}$ 的方向为 $\boldsymbol{v}$, 其大小 Q 是流体通过垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的单位面积的质量变化率. 将向量 $\boldsymbol{Q}$ 写为

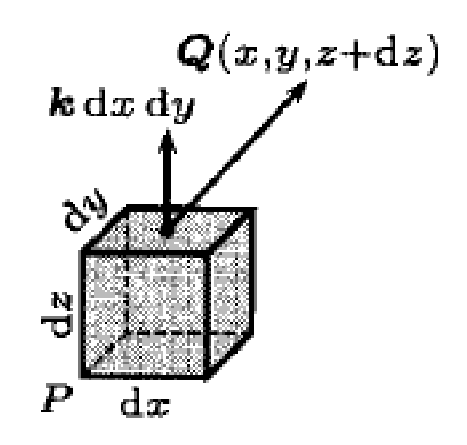
$$\boldsymbol{Q}=Q_x\boldsymbol{i}+Q_y\boldsymbol{j}+Q_z\boldsymbol{k},$$

同时考虑以点 $P(x,y,z)$ 为顶点之一的体积元 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 它是各边平行于坐标轴的平行六面体, 边长为 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$. 取其边界面的外侧, 则通过以 $-\boldsymbol{k}$ 为外法向量的边界面的流体质量变化率为

$$\boldsymbol{Q}\cdot(-\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)=-Q_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

而通过以 $\boldsymbol{k}$ 为外法向量的边界面的流体质量变化率为 (参见附图)

$$(\boldsymbol{Q})_{z+\mathrm{d}z}\cdot(\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)=(Q_z)_{z+\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(Q_z+\frac{\partial Q_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$



习题 4451 的附图

这里略去了高阶的无穷小量.

以相同的方式考虑其余四个面, 并将所得的六个面上流出的流体质量变化率相加, 就得到从体积元 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 流出的流体质量变化率为

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_x}{\partial y}+\frac{\partial Q_x}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=(\mathrm{div}\,\boldsymbol{Q})\,\mathrm{d}V.$$

根据假设, 在体积元 $\mathrm{d}V$ 内没有发生流体的源, 也没有使流体渗漏的汇, 因此根据质量守恒定律只可能是成立等式

$$\mathrm{div}\,Q=-\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

而这就是连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0.\quad\square$$

注 在《习题集》的原文中对本题还假设流体不可压缩, 这对于导出连续性方程是多余的. 实际上, 在流体为不可压缩时, 在区域 S 内没有源与汇的条件表明通过边界

面 S 流入 V_1 和流出 V_1 的流体体积相等. 如解 1 中那样用奥斯特罗格拉茨基公式就得到 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$. 这与 §8.13 的习题 4339 的后半题对平面流的处理相同. 此外可以参考 [33] 的 §14.4 之应用例子 2, 其中给出了变密度不可压缩流体的连续性方程.

8.17.5 环量计算 (习题 4452.1–4456)

设有连续可微的向量场 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, 则将在封闭曲线 C 上的积分

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_C a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y+a_z\,\mathrm{d}z$$

称为向量场沿围线 C 的环量 (或环流量).

斯托克斯公式的向量形式为

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\mathrm{d}S,$$

它揭示出环量与旋度之间的关系.

习题 4454.1(a) 求向量场 $\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ (c 为常数) 的环量: 沿着圆周 $x^2+y^2=1$, $z=0$.

(本题应当选定 C 的方向. 以下取 C 为坐标面 $z=0$ 上的逆时针方向.)

解 1 将围线 C 参数化为 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=0$, t 从 0 到 2π, 则有

$$\oint_C -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+c\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}[-\sin t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t+c\cdot 0]\,\mathrm{d}t=2\pi.\quad\square$$

解 2 将 C 在 $z=0$ 上包围的区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 记为 S, 取上侧, 其面积 $|S|=\pi$, 则可用斯托克斯公式得到

$$\oint_C -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+c\,\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & c\end{vmatrix}=2\iint_S\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\cdot|S|=2\pi.\quad\square$$

解 3 将积分拆开为两个积分:

$$\oint_C -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+c\,\mathrm{d}z=\oint_C -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\oint_C c\,\mathrm{d}z,$$

对其中第一个积分可以用格林公式导出的面积公式得到 2π (见 §8.12.2 的 (8.10)), 而第二个积分存在原函数 cz, 因此在封闭曲线上的积分等于 0. $\square$

习题 4454.2 求下列情况下向量场 $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$ 沿着围线 C 的环量 Γ:

(a) C 不围绕 Oz 轴; (b) C 围绕 Oz 轴.

解 从向量场 $\boldsymbol{a}$ 的定义可见它有原函数 (即势函数) $\arctan\dfrac{y}{x}$, 其中的反正切函数应当理解为 $\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$, 也就是极坐标系中的极角, 或者复数平面上点 $x+\mathrm{i}y$ 的幅角. 它是一个具有无限多个值的多值函数, 当路径以逆时针方向围绕原点一周时增加 2π, 而以

顺时针方向围绕原点一周时减少 2π. 因此对于 (a) 的环量 $\Gamma=0$, 而对于 (b) 则环量等于 C 以逆时针方向围绕 Oz 轴的圈数减去以顺时针方向围绕 Oz 轴的圈数乘以 2π. □

注 这个原函数在前面已多次见到, 例如 §8.11 的习题 4254, §8.12.1 的习题 4307, 4321, §8.13 的习题 4329 (参见其注 2) 等. 由于在平面情况只要限制封闭曲线 C 为简单曲线, 即无自交点, 从而只可能有三种情况: 不围绕原点, 以逆时针方向围绕原点一周, 以顺时针方向围绕原点一周. 本题则是在空间的封闭曲线, 因此在没有自交点的前提下仍然可以围绕 Oz 轴任意旋转, 从而会得到多种答案. 其中 (b) 的答案中也包含了 0 的可能性.

习题 4455 已知向量场

$$\boldsymbol{a}=\frac{y}{\sqrt{x}}\boldsymbol{i}-\frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j}+\sqrt{xyz}\boldsymbol{k}.$$

计算 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ 在点 $M(1,1,1)$ 的表达式, 然后近似地求出该向量场沿无穷小圆周

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2,\\(x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0\end{cases}$$

(其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$) 的环量 Γ.

解 按照旋度的定义得到

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\\dfrac{y}{\sqrt{x}}&-\dfrac{x}{\sqrt{z}}&\sqrt{xyz}\end{vmatrix}=\Big(\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}-\frac{x}{2z\sqrt{z}}\Big)\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}\boldsymbol{j}-\Big(\frac{1}{\sqrt{z}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\boldsymbol{k},$$

因此在点 $M(1,1,1)$ 处有 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

对于题设的小圆周, 将它记为 C, 其方向与 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 符合右手法则, 又将 C 在平面 $(x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0$ 上围绕的圆记为 S, 则可以用斯托克斯公式得到环量的表达式为

$$\Gamma=\oint_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

当 $\varepsilon>0$ 充分小时用 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)$ 代替 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, 而 S 的面积为 $\pi\varepsilon^2$, 这样就得到

$$\Gamma\approx-\pi\Big(\frac{1}{2}\cos\beta+2\cos\gamma\Big)\varepsilon^2.\quad\square$$

习题 4456 平面定常流由速度向量

$$\boldsymbol{w}=u(x,y)\boldsymbol{i}+v(x,y)\boldsymbol{j}$$

描述, 试确定: (1) 通过区域 S 的边界 (封闭围线) C 流出的流体的质量 Q (流量); (2) 速度向量沿着围线 C 的环量 Γ. 若流体是不可压缩的, 在 S 内无源无汇且流场无旋, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程?

解 由于是定常流, 于点 (x,y) 处的速度 w 和密度 $\rho=\rho(x,y)$ 都与时间 t 无关.

(1) 如 §8.17.4 的习题 4451 的分析表明, 通过封闭曲线 C 的流量的速率为

$$Q=\oint_C \rho\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=\oint_C \rho(-v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y)=\iint_S\Big(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中利用了格林公式的第二形式 (见 §8.12.3 的公式 (8.13)).

(2) 速度场 $\boldsymbol{w}$ 沿围线 C 的环量为

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_C u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y=\iint_S\Big(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中利用了格林公式的常见形式.

若流体不可压缩, 又在 S 内无源无汇, 则从 §8.13 的习题 4339 的后半题 (又见习题 4451 (连续性方程) 的注) 已知有散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{w}=0$, 于是得到方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

又由于无旋, 环量对任何围线 C 等于 0, 因此还满足方程

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.\quad\square$$

注　由所得的方程可见有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{\partial v}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial v}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial v}{\partial y}\Big)=-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

即有 $\Delta u=0$, $\Delta v=0$, 因此无源无旋的不可压缩流体的速度向量的分量都是调和函数.

若场 $\boldsymbol{w}$ 的定义域为单连通区域, 则从 $\boldsymbol{w}$ 无旋可知它是有势场 (见下一小节), 即存在标量函数 φ, 使得 $\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{w}$. 又由于 $\boldsymbol{w}$ 无源, 因此就得到

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w}=\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\Delta\varphi=0,$$

即势函数 φ 也是调和函数.

8.17.6　有势场的计算 (习题 4457.1–4460)

本小节的内容与 §8.11.3 实际上是相同的, 只是在那里没有用场论的语言来说, 而问题的提法也是从第二型曲线积分与路径无关的问题出发的. 那里的原函数在场论中一般称为势函数.

若对于向量场 $\boldsymbol{a}$ 存在标量场 u, 使得 $\operatorname{grad}u=\boldsymbol{a}$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为有势场.

从 §8.17.4 的习题 4439(a) 知道有势场必定是无旋场. 可以证明, 在单连通区域上的无旋场 $\boldsymbol{a}$ 也一定是有势场. 对于二维和三维空间的向量场, 无旋的条件也就是 §8.11.3 中的条件 (8.8) 和 (8.9).

习题 4457.1 证明: 场

$$\boldsymbol{a}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+zx(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$$

是有势场, 并求这个场的势.

解 1 这个向量场的定义域为全空间 $\mathbb{R}^3$, 满足单连通的条件, 因此从

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz(2x+y+z) & zx(x+2y+z) & xy(x+y+2z)\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

可知为有势场.

设 $u=u(x,y,z)$ 为势函数, 则从 $u'_x=yz(2x+y+z)$ 可求出

$$u=x^2yz+xy^2z+xyz^2+\varphi(y,z),$$

代入到 $u'_y=zx(x+2y+z)$ 中, 得到

$$x^2z+2xyz+xz^2+\varphi'_y(y,z)=x^2z+2xyz+xz^2,$$

可见有 $\varphi'_y(y,z)=0$, 即 φ 与 y 无关. 将它改记为 $\varphi(z)$. 再将这时的 u 代入到 $u'_z=xy(x+y+2z)$ 中, 得到

$$x^2y+xy^2+2xyz+\varphi'_z(z)=x^2y+xy^2+2xyz,$$

可见有 $\varphi'_z(z)=0$, 即 φ 与 z 也无关, 所以 φ 为常值函数 C. 这样就得到所求的势函数为

$$u=x^2yz+xy^2z+xyz^2+C.\quad\square$$

解 2 求势函数的第二个方法就是在 §8.11.3 的习题 4284 中的方法二, 即利用平行于坐标轴的折线来计算. 对于本题可以用从原点出发经过点 $(x,0,0)$, 点 $(x,y,0)$ 到点 (x,y,z) 的折线来得到所要的势函数:

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}yz(2x+y+z)\,\mathrm{d}x+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}zx(x+2y+z)\,\mathrm{d}y\\&\qquad+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}xy(x+y+2z)\,\mathrm{d}z+C\\&=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y 0\,\mathrm{d}y+\int_0^z xy(x+y+2z)\,\mathrm{d}z+C\\&=x^2yz+xy^2z+xyz^2+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 4458 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$ 的势.

解 向量场的定义域为去掉原点 $O(0,0,0)$ 后的全空间, 是单连通区域. 计算

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\dfrac{mx}{r^3} & -\dfrac{my}{r^3} & -\dfrac{mz}{r^3}\end{vmatrix}$$

$$=m\Big[\Big(\frac{3z}{r^4}\cdot\frac{y}{r}-\frac{3y}{r^4}\cdot\frac{z}{r}\Big)\boldsymbol{i}+\Big(\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{z}{r}-\frac{3z}{r^4}\cdot\frac{x}{r}\Big)\boldsymbol{j}+\Big(\frac{3y}{r^4}\cdot\frac{x}{r}-\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{y}{r}\Big)\boldsymbol{k}\Big]=\mathbf{0},$$

可见是有势场.

由于在有势场中 $\boldsymbol{a}$ 的曲线积分只与端点有关, 即等于两个端点处的势函数值之差, 而与路径无关, 因此即有

$$u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\Big(-\frac{m}{r^3}\Big)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)$$
$$=-\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\frac{m}{2r^3}\,\mathrm{d}(r^2)=-\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\frac{m}{r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{m}{r}-\frac{m}{r_0}.$$

由于 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ 的任意性, 可见势函数为 $u=\dfrac{m}{r}+C$. □

注 如将本题的向量场理解为引力场, 则在 §8.11.3 的习题 4295 中已经求出了势函数 (即原函数).

8.17.7 补注 (习题 4461–4462)

这是《习题集》的最后两个习题. 由于在这两题中除了需要场论的知识之外, 还涉及含参变量的广义重积分等概念, 所用的技巧比较多样, 证明过程也较长, 因此将它们放在这里讨论, 其中习题 4461 是为解习题 4462 所做的准备.

习题 4461 证明公式:

$$\mathrm{grad}_P\Big\{\iiint\limits_V\rho(Q)\frac{\mathrm{d}V}{r}\Big\}=-\oiint\limits_S\rho(Q)\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}S}{r}+\iiint\limits_V\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\frac{\mathrm{d}V}{r},$$

其中 S 为区域 V 的边界面, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量, r 为点 $P(x,y,z)$ 与点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 之间的距离.

解 积分号下的 $\rho(Q)=\rho(\xi,\eta,\zeta)$, $\dfrac{1}{r}=\big[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\big]^{-\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 设函数 ρ 连续可微. 为简明起见将体积元 $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ 记为 $\mathrm{d}V$.

以下需要分两种情况讨论.

(1) 点 $P(x,y,z)$ 在封闭曲面 S 之外. 这时公式左边的积分为含参变量 x,y,z 的常义积分, 因此对参变量求导可在积分号下进行.

对第一个分量, 有

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint\limits_V\frac{\rho}{r}\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_V\rho\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]\mathrm{d}V=\iiint\limits_V\rho\frac{\xi-x}{r^3}\,\mathrm{d}V$$
$$=\iiint\limits_V\rho\Big[-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]\mathrm{d}V=\iiint\limits_V\Big[\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(-\frac{\rho}{r}\Big)\Big]\mathrm{d}V$$
$$=\iiint\limits_V\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{r}\,\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)\mathrm{d}V$$
$$=\iiint\limits_V\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{r}\,\mathrm{d}V-\oiint\limits_S\frac{\rho}{r}\cos\alpha\,\mathrm{d}S,$$

其中最后一步是用奥斯特罗格拉茨基公式得到的.

与所欲求证的等式比较可见已经证明了两边的第一个分量相等. 对其他两个分量的证明完全相同, 不再重复.

(2) 点 $P(x,y,z)$ 在封闭曲面 S 的内部, 这时公式左边的积分是含参变量 (x,y,z) 的广义积分, 而且奇点 P 的坐标就是这些参变量.

首先证明这时的广义积分收敛. 为此考虑以点 $P(x,y,z)$ 为中心, 以 $\varepsilon>0$ 为半径的球体 B_ε. 取 ε 充分小使得 $B_\varepsilon\subset V$. 取 $M>0$ 使得 $|\rho(\xi,\eta,\zeta)|<M$ 在区域 V 上成立, 则对于球 B_ε 上的积分用球坐标代换

$$\xi=x+r\sin\varphi\cos\theta,\quad \eta=y+r\sin\varphi\sin\theta,\quad \zeta=z+r\cos\varphi,$$

就可得到

$$\left|\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{\rho}{r}\,\mathrm{d}V\right|\leqslant M\left|\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}V\right|=M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\varepsilon}r\,\mathrm{d}r=2\pi M\varepsilon^2,$$

可见当 $\varepsilon\to0$ 时在 B_ε 上的积分趋于 0, 因此广义积分 $\iiint\limits_V\frac{\rho}{r}\,\mathrm{d}V$ 收敛.

现在证明对于这个广义积分求关于参变量 x 的导数时仍然可以通过积分号. 为此只要证明含参变量的广义积分 $\iiint\limits_V\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}V$ 一致收敛. 同样对于在 B_ε 上的积分用球坐标代换作估计, 就可得到

$$\begin{aligned}\left|\iiint\limits_{B_\varepsilon}\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}V\right|&\leqslant\iiint\limits_{B_\varepsilon}\left|\rho\frac{\xi-x}{r^3}\right|\mathrm{d}V\leqslant M\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}V\\&=M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\varepsilon}\mathrm{d}r=4\pi M\varepsilon,\end{aligned}$$

可见关于 x 一致收敛.

以下可重复情况 (1) 中的推导, 其中涉及的广义三重积分的收敛性均可如上解决, 只是在最后一步需要注意, 由于三重积分 $\iiint\limits_V\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\rho}{r}\right)\mathrm{d}V$ 的被积函数在点 $P(x,y,z)$ 处有奇性, 因此不能直接用奥斯特罗格拉茨基公式.

将 B_ε 的边界球面记为 S_ε, 取其内侧, 则在 V 中挖去小球 B_ε 的区域上可以用奥斯特罗格拉茨基公式得到

$$\iiint\limits_{V-B_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\rho}{r}\right)\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint\limits_S\frac{\rho}{r}\cos\alpha\,\mathrm{d}S+\oint\!\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\rho}{r}\cos\alpha\,\mathrm{d}S.$$

上式左边当 $\varepsilon\to0$ 时的收敛性可如前面几个广义三重积分一样讨论, 其极限就是 $\iiint\limits_V\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\rho}{r}\right)\mathrm{d}V$. 对于右边第二个曲面积分有 $r=\varepsilon$, 因此即可估计得到

$$\left|\oint\!\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\rho}{r}\cos\alpha\,\mathrm{d}S\right|\leqslant\frac{M}{\varepsilon}\oint\!\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\mathrm{d}S=4\pi M\varepsilon,$$

于是当 $\varepsilon\to0$ 时极限为 0. 这样就得到了所要求的公式. □

注 在证明中所用的方法可一般化为三重积分的分部积分公式:

$$\iiint\limits_V u\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V}uv\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iiint\limits_V v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

见 [32] 的例题 26.1.1.

习题 4462 证明: 若 $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}u$, 其中

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$$

则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\rho(x,y,z)$$

(假设相应积分有意义).

分析 与 §8.8 的习题 4155, 4156 比较, 可见除去积分号前的常数之外, 可以将题中给定的函数 $u(x,y,z)$ 理解为在整个三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中无限分布的质量在点 (x,y,z) 处的牛顿引力势.

由于 $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\Delta u$, 因此本题的目的就是要证明这样给出的势函数 $u(x,y,z)$ 是泊松方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=\rho(x,y,z)$$

的解.

注意到 $u(x,y,z)$ 的表达式中的广义三重积分既是在无界区域 $\mathbb{R}^3$ 上的积分, 又具有奇点 $P(x,y,z)$, 因此要证明它二阶连续可微就比较复杂. 为此密度函数 ρ 需要满足一定的条件, 既需要保证积分收敛, 还应使得对 u 求二阶偏导的运算能够通过积分号. 以下将假设 ρ 连续可微, 在证明中将集中注意由奇点 $P(x,y,z)$ 带来的复杂性, 而对于它在点 (ξ,η,ζ) 离原点充分大处的性态不作具体规定.

解 作以奇点 $P(x,y,z)$ 为中心以 $\varepsilon>0$ 为半径的球体 B_ε, 将它的边界球面记为 S_ε, 取内侧. 这样就可以将三维空间 $\mathbb{R}^3$ 分解为球 B_ε 和挖去球后所余的区域 V_ε 之并, 从而将 u 分拆为两项之和:

$$u(x,y,z)=u_1(x,y,z)+u_2(x,y,z),$$

其中

$$u_1(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,\mathrm{d}V,$$

$$u_2(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,\mathrm{d}V,$$

其中为简明起见将体积元 $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ 记为 $\mathrm{d}V$.

假设密度函数 ρ 所满足的条件使得 $u_1(x,y,z)$ 对 x,y,z 求二阶偏导数时能够通过积分号, 于是由 $\Delta\Big(\dfrac{1}{r}\Big)=0$ (§6.2.4 的习题 3311) 在 $r\neq0$ 时处处成立, 而区域 V_ε 中 $r\geqslant\varepsilon>0$, 因此就得到

$$\Delta u_1=0.$$

以下只需要考虑对 u_2 求二阶偏导数的计算.

利用习题 4461 中的公式, 就得到

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{r}\,\mathrm{d}V+\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\rho}{r}\cos\alpha\,\mathrm{d}S,$$

其中第二项的积分前取正号, 因为 S_ε 是取内侧, $\cos\alpha$ 是指向奇点 $P(x,y,z)$ 的法线方向的方向余弦.

上式右边的第一项为广义的三重积分, 按照习题 4461 的情况 (2) 中的同样分析, 可知对 x 求导仍然可以通过积分号, 因此就得到

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V+\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\rho\cos\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S.$$

用同样的方法求出 $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}$, 并将它们相加, 就得到

$$\Delta u_2=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\left(\mathrm{grad}_Q\,\rho\cdot\mathrm{grad}_P\,\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V+\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\rho\left(\mathrm{grad}_P\,\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中用下标 P 表示对 x,y,z 的梯度, 用下标 Q 表示对 ξ,η,ζ 的梯度.

对 Δu_2 的上述表达式的第一项, 利用 ρ 连续可微, 可以在 $\varepsilon=1$ 的 B_1 上取模 $\|\mathrm{grad}_Q\,\rho\|$ 的上界 M, 同时又有 $\|\mathrm{grad}_P\,\dfrac{1}{r}\|=\dfrac{1}{r^2}$, 这样就可以得到估计

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\left(\mathrm{grad}_Q\,\rho\cdot\mathrm{grad}_P\,\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V\right|&\leqslant\left|\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\|\mathrm{grad}_Q\,\rho\|\cdot\|\mathrm{grad}_P\,\frac{1}{r}\|\,\mathrm{d}V\right|\\&\leqslant\frac{M}{4\pi}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}V}{r^2}\quad(\text{用球坐标代换})\\&=\frac{M}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\varepsilon}\mathrm{d}r=M\varepsilon,\end{aligned}$$

因此当 $\varepsilon\to 0$ 时这一项的极限等于 0.

对 Δu_2 的前述表达式的第二项, 由于 $\|\mathrm{grad}_P\,\dfrac{1}{r}\|=\dfrac{1}{r^2}$, 而梯度向量 $\mathrm{grad}_P\,\dfrac{1}{r}$ 指向 $\dfrac{1}{r}$ 的最大增加方向, 因此与指向奇点 $P(x,y,z)$ 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向完全一致, 而在球面 S_ε 上 $r=\varepsilon$, 从而就有

$$\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left(\mathrm{grad}_P\,\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\rho\,\mathrm{d}S=\rho(\xi_1,\eta_1,\zeta_1),$$

其中最后一步用了积分中值定理. 因此当 $\varepsilon\to 0$ 时这一项的极限等于 $\rho(x,y,z)$.

综合以上, 就有

$$\begin{aligned}\Delta u&=\Delta u_1+\Delta u_2=\lim_{\varepsilon\to 0}(\Delta u_1+\Delta u_2)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta u_2=\rho(x,y,z).\quad\square\end{aligned}$$

注 习题 4462 是偏微分方程中有关椭圆型方程的内容, 有多种证明方法. 关于泊松方程的讨论可参考 [6] 的第一卷第五章和第二卷第四章.

附录　命题索引

在这个附录中列出在第三册中的命题编号、内容与页码.

参 考 文 献

[说明] 以下文献按作者名 (编者名) 的 (拼音) 字母顺序排列, 对翻译著作未列出译者名.

[1] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities. Berlin: Springer–Verlag, 1961

[2] Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. New York: McGraw-Hill, 1960

[3] Перельман Я И. Занимательная физика. Москва: Физматгиз, 1976 (中译本: 别莱利曼. 趣味物理学. 北京: 中国青年出版社, 1979)

[4] Birkhoff G, Rota G-C. Ordinary Differential Equations. Boston: Ginn and Company, 1962

[5] 曹敏谦. 数学分析习题集题解. 上海: 上海交通大学应用数学系, 1979

[6] Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. New York: Interscience Publishers, Inc, 1953

[7] Courant R, John F. Introduction to Calculus and Analysis. New York: Springer–Verlag, 1989 (中译本: 柯朗, 约翰. 微积分和数学分析引论, 北京: 科学出版社, 2001)

[8] Дринфельд Г И. Дополнения к общему курсу математического анализа. Харьков: ИХГУ, 1958 (中译本: 德林费尔特. 普通数学分析教程补篇. 北京: 人民教育出版社, 1960)

[9] 费定晖, 周学圣. 吉米多维奇数学分析习题集题解. 济南: 山东科学技术出版社, 2007

[10] Fisz M. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenshaften, 1958 (中译本: 费史. 概率论及数理统计. 上海: 上海科学技术出版社, 1962)

[11] Фихтенгольц Г М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003 (中译本: 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 (第 8 版). 北京: 高等教育出版社, 2006)

[12] Feyman R P. The Character of Physical Law. 1965 (中译本: 费曼. 物理定律的本性. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2005)

[13] Gelbaum B R, Olmsted J M H. Counterexamples in Analysis. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1964 (中译本: 盖尔鲍姆, 奥姆斯特德. 分析中的反例. 上海: 上海科学技术出版社, 1980)

[14] Goursat E. A Course in Mathematical Analysis, Vol. 1. Boston: Ginn and Company, 1904

[15] Гребенча М К, Новоселов С И. Курс математического анализа. Москва: Учпедгиз, 1951 (中译本: 格列本卡, 诺渥舍诺夫. 数学分析教程. 北京: 高等教育出版社, 1953)

[16] Halliday D, Resnick R. Physics. New Jersey: John Wiley, 1966 (中译本: 哈里德, 瑞斯尼克. 物理学. 北京: 科学出版社, 1978)

[17] 郝柏林, 从抛物线谈起——混沌动力学引论. 上海: 上海科技教育出版社, 1993

[18] Hardy G, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities (Second Edition). Cambridge: Cambridge University Press, 1952

[19] Hilbert D, Cohn-Vossen S. Anschauliche Geometrie. Berlin: Springer–Verlag, 1932 (中译本: 希尔伯特, 康福森. 直观几何. 北京: 高等教育出版社, 1959)

[20] Hildebrand F B. Advanced Calculus for Applications. Englecood Cliffs: Prentice–Hall, Inc., 1962

[21] 胡雁军, 李育生, 邓聚成. 数学分析中的证题方法与难题选解. 郑州: 河南大学出版社, 1987

[22] 华罗庚. 高等数学引论. 北京: 高等教育出版社, 2009

[23] Kamke E. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Leibzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1959 (中译本: 卡姆克. 常微分方程手册. 北京: 科学出版社, 1977)

[24] Klambauer G. Problems and Propositions in Analysis. New York: Marcel Dekker, Inc., 1979 (中译本: 克莱鲍尔. 分析中的问题与命题. 长沙: 湖南师院学报增刊, 1984)

[25] 廖良文, 许宁. 吉米多维奇数学分析习题全解. 合肥: 安徽人民出版社, 2007

[26] Новоселов С И. Специальный курс тригонометрии, Москва: Государственное Издательство. Советская Наука, 1954 (中译本: 诺渥塞洛夫. 三角学专门教程. 北京: 高等教育出版社, 1956)

[27] 秦曾复, 朱学炎. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1991

[28] 日本数学会. 岩波数学辞典. 东京: 岩波书店, 1968 (中译本: 数学百科辞典. 北京: 科学出版社, 1984)

[29] Riesz F, Sz-Nagy B. Leçons d'analyse fonctionelle, Budapest: Akademiai Kaidó, 1955 (中译本: 黎茨, 塞克佛尔维–纳吉. 泛函分析讲义, 第一卷. 北京: 科学出版社, 1963)

[30] 汪林, 戴正德, 杨富春, 郑喜印. 数学分析问题研究与评注. 北京: 科学出版社, 1995

[31] Whittaker E T, Watson G N. A Course of Modern Analysis (Fourth Edition). Cambridge: Cambridge University Press, 1958

[32] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义. 北京: 高等教育出版社, 2003

[33] Зорич В А (Zorich V A). Mathematical Analysis (Fourth Edition). Berlin: Springer, 2002 (中译本: 卓里奇. 数学分析 (第四版). 北京: 高等教育出版社, 2006)

后 记

在完成本书之际，说说在编写过程中的一些想法也许对读者使用本书是有益的.

本书的宗旨是为《吉米多维奇数学分析习题集》(简称《习题集》) 写“指引”，而不是“题解”，因此对于其中的习题及其求解的考虑就与学生完成作业大不相同.

就一道习题本身而言，需要思考的问题很多，例如，此题有何意义或者是否重要？它的结论有用吗？它与《习题集》中的其他习题有联系吗？它在数学分析 (甚至更广阔的知识范围) 中的地位如何？解出了这道题对解其他题有帮助吗？对于证明题，还需要考虑其中的条件对于所导出的结论是否多余或不足.

就习题的解法而言，需要思考的问题就更多了. 已有的传统解法好不好？其中有什么规律性？它有普遍意义吗？其思路是从哪里来的？为什么要这样求解 (也就是有道理没有)？这个解法触及了问题的核心没有？还有更好的方法吗？我们很快发现，许多传统的解法往往存在这样或那样的不足，而“没有最好，但有更好”则几乎成为规律. 与其用同一种方法解几个题，不如发掘几种方法解一个题的收获更大.

在如此思考中我们发现，对于一个习题本身的认识会有从浅到深的过程，而往往到最后也不能说已经达到了十全十美的境界. 本书在选择解法时，大体上对于重要的或者作为示范性质的习题举出多种解法，而对于其他问题则选择尽可能简单的一种解法. 希望这样的安排有益于读者.

通过本书的编写，我们对于《习题集》的经典性有了新的理解和认识. 首先，该《习题集》所包含的内容与我国从 20 世纪 50 年代直到今天的数学分析和高等数学的教学实践是一致的，其中所收入的习题，无论从知识范围来说，还是从难易程度来说，都具有很强的“稳定性”. 《指引》中的习题和解法的选取也考虑了这样的稳定性. 从组织结构来看，《习题集》全书的编排和每一章节的层次安排都有精心的考虑，在将几何、代数与分析的结合方面堪称楷模. 如前言所说，《指引》在揭示其丰富内容方面起了一定程度的解构作用，这样就有可能对于读者在今后使用该《习题集》提供一点帮助. 勿以善小而不为，这也是我们编写本书时的一个指导思想.

如《指引》第一册的前言所说，本书的编写得到了许多热心人的多方面的帮助. 除了在前言中已经提到之外，这里还要感谢高尚华老师和袁安锋老师对《指引》的审阅. 此外，还要感谢北京大学的李植老师对本书提出的许多改进意见，特别是在与力学和物理有关的习题方面所作出的贡献.

《指引》的主要编写工作是在苏州大学数学科学学院完成的，对于该学院的领导和许多老师对此项工作的热情支持和帮助在此一并致谢. 这里还特别要感谢苏州大学的资深教师汤正谊，他对于《指引》的第二册和第三册的稿件提出了许多改进意见，还对若干习题提供了高质量的解法.

谢惠民 沐定夷

2011 年 7 月 11 日

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
习题集与配套辅导书		
25439-6	数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
31004-7	工科数学分析习题集 (根据 2006 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第一册)	沐定夷、谢惠民 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
32356-6	吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第二册)	谢惠民、沐定夷 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
32293-4	吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第三册)	谢惠民、沐定夷 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
25766-3	偏微分方程习题集（第 2 版）	[俄] A. C. 沙玛耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] A. H. 施利亚耶夫
28888-9	微分几何与拓扑学习题集（第 2 版）	[俄] A. C. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、 A. T. 福明柯
18773-1	微分几何例题详解和习题汇编	陈维桓
俄罗斯数学教材选译		
18303-0	微积分学教程（第一卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程（第二卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程（第三卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析（第一卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析（第二卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义（第 3 版）	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、 В. Н. 丘巴里阔夫
30578-4	复分析导论（第一卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论（第二卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步（第 7 版）	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
29221-3	实变函数论（第 5 版）	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法（第 6 版）	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程（第 6 版）	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义（第 2 版）	[俄] О. А. 奥列尼克
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫

书号	书名	著译者
27249-9	数值方法 (第 5 版)	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫，Н. П. 热依德科夫，Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论 (第一卷) 基础代数 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论 (第二卷) 线性代数 (第 3 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论 (第三卷) 基本结构 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用 (第一卷) 曲面几何、变换群与场 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21492-5	现代几何学：方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 2 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
22059-9	概率 (第一卷) (第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率 (第二卷) (第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. В. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础 (第一卷) 事实. 模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础 (第二卷) 理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法 (第 4 版)	[俄] В. И. 阿诺尔德
18530-0	理论力学 (第 3 版)	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学 (第一卷) (第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学 (第二卷) (第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
29223-7	非线性动力学定性理论方法 (第一卷)	[俄] L. P. Shilnikov 等
29464-4	非线性动力学定性理论方法 (第二卷)	[俄] L. P. Shilnikov 等